Pourcentages

I. Introduction

Définition :

On considère deux quantités Q et Q' de même nature, exprimées dans la même unité.
Dire que Q' est égale à t % de Q revient à dire que $Q' = \frac{t}{100} \times Q$.

Remarque : la connaissance de deux des nombres Q, Q' et t permet de calculer le troisième.

Exemples :

- Dans une assemblée de 45 membres, 80 % sont des femmes. Combien y a-t-il de femmes dans cette assemblée ?

  Soit N le nombre de femmes dans cette assemblée alors $N = \frac{80}{100} \times 45 = 36$

  Il y a 36 femmes dans l'assemblée.

- A la fin de la saison, un gérant de magasin s'aperçoit qu'il lui reste 52 articles, soit 13% des articles qu'il avait en stock. Combien avait-il d'articles en début de saison ?

  Soit Q le nombre d'articles en début de saison, alors $52 = \frac{13}{100} \times Q$ *. D'où* $Q = 52 \times \frac{100}{13} = 400$

  Il y avait 400 articles dans le stock en début de saison.

- Un capital de 25000 euros placé pendant un an à t % a rapporté 750 euros d'intérêts. Calculer le taux t du placement.

  On a : $750 = \frac{t}{100} \times 25000$ *d'où* $t = \frac{750 \times 100}{25000} = 3$*. Le taux du placement est ainsi de 3 %.*

→ Exercices 1 et 2 page 4/6

II. Variation en pourcentage

Propriété :

° Augmenter une quantité de t % revient à multiplier cette quantité par $1 + \frac{t}{100}$.

° Diminuer une quantité de t % revient à multiplier cette quantité par $1 - \frac{t}{100}$.

Propriété :

° Lorsqu'une quantité augmente de t %, on dit que son pourcentage d'évolution est : $+t$ %.
° Lorsqu'une quantité baisse de t %, on dit que son pourcentage d'évolution est $-t$ %.

Exemple :

En l'an 2000, une ville A comptait 2520 habitants et une ville B en comptait 3525. Depuis, la ville A a vu sa population croître de 5 % tandis que la ville B a perdu 564 de ses habitants. Calculer les populations actuelles de la ville A. Quel est pourcentage d'évolution de la population de la ville B ?

- $2520 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 2520 \times 1{,}05 = 2646$. Il y a actuellement 2646 habitants dans la ville A.
- Soit t le pourcentage d'évolution de la population de la ville B. On a alors : $3525 - 564 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times 3525$

  Donc $1 + \frac{t}{100} = \frac{3525 - 564}{3525} = \frac{2961}{3525} = 0{,}84$ d'où $\frac{t}{100} = -0{,}16$ c'est-à-dire $t = -16$.

  Le taux d'évolution de la population de la ville B est donc de −16 %, ce qui signifie que le nombre d'habitants de cette ville a baissé de 16 %.

→ Exercices 3 et 4 page 4/6

III. Augmentations ou diminutions successives en pourcentage

Propriété :

Soient t et t' deux nombres réels positifs ou négatifs.
Si on soumet à une quantité successivement une variation de t % suivie d'une variation de t' %, on obtient la quantité finale en multipliant la quantité initiale par $\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)$.

Démonstration :

Soient Q_0 la quantité initiale, Q_1 la quantité intermédiaire et Q_2 la quantité finale.

$$Q_0 \xrightarrow{\times\left(1+\frac{t}{100}\right)} Q_1 \xrightarrow{\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)} Q_2$$

Alors $Q_1=\left(1+\frac{t}{100}\right)\times Q_0$ et $Q_2=\left(1+\frac{t'}{100}\right)\times Q_1$ d'où en remplaçant Q_1 par $\left(1+\frac{t}{100}\right)\times Q_0$ dans la deuxième formule, on obtient $Q_2=\left(1+\frac{t'}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times Q_0$.

La quantité finale est bien égale à la quantité initiale multipliée par $\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)$.

Exemple :

Le chiffre d'affaire d'une entreprise était en 2002 de 15 millions d'euros. Il a baissé en 2003 de 5 % puis il a augmenté en 2004 de 12 %. Calculer le chiffre d'affaire en 2004.

Appelons C_{2002}, et C_{2004} les chiffres d'affaire en 2002 et 2004.

Alors $C_{2004}=\left(1-\frac{5}{100}\right)\times\left(1+\frac{12}{100}\right)\times C_{2002}=0,95\times1,12\times15=15,96$.

Le chiffre d'affaire en 2004 est donc de 15,96 millions d'euros.

Remarque :
Dans cet exemple,
$t=-5$ ce qui signifie à une baisse de 5 %.
$t'=12$ ce qui signifie à une hausse de 12 %.

→ Exercices 5 et 6 page 4/6

IV. Indices

Un exemple pour comprendre.

Le tableau ci-contre donne les montants du SMIC mensuel net en euros en septembre de chaque année :

Années	2001	2002	2003	2004
Montant	890,98	913,03	957,51	1013,44

On décide de choisir 100 pour base en 2001 et on obtient donc une nouvelle ligne « Indice ». Les lignes « Montant » et « Indice » déterminent un tableau de proportionnalité. Les valeurs (arrondies) de chacune des cases se déduit donc facilement :

Années	2001	2002	2003	2004
Montant	890,98	913,03	957,51	1013,44
Indice	100	102,5	107,5	113,7

Pour 2003 : $\frac{957,51\times100}{890,98}\approx107,5$

Propriété admise :

Le pourcentage d'évolution d'une grandeur entre deux dates est le pourcentage d'évolution de l'indice quelle que soit la base choisie.

Conséquence :

Dans un exemple de base 100, pour déterminer le pourcentage d'évolution entre une date quelconque et la date de référence, il suffit de soustraire 100 à l'indice de cette date.

Démonstration

Soit I_1 l'indice à une date T_1 donnée et 100 l'indice I_0 à la date de référence T_0. Alors le pourcentage t d'évolution entre T_0 et T_1 est le pourcentage d'évolution entre I_0 et I_1, on a donc : $1+\frac{t}{100}=\frac{I_1}{I_0}$

Donc $t=\left(\frac{I_1}{I_0}-1\right)\times100=\frac{I_1-I_0}{I_0}\times100=I_1-I_0$ car $I_0=100$

Applications

- Entre 2002 et 2004 le pourcentage d'évolution de l'indice est $\frac{113,7}{102,5}=1+\frac{t}{100}$ soit $t=\left(\frac{113,7}{102,5}-1\right)\times100\approx10,9$.
  Ainsi entre 2002 et 2004, le SMIC a connu une augmentation de 10,9 % environ.

- Entre 2004 et 2001, le SMIC a augmenté de 13,7 % environ car $113,7-100=13,7$

→ Exercices 7 et 8 pages 4 et 5/6

V. Pourcentage de pourcentage

Propriété :

Soient t et t' deux nombres réels positifs.

Calculer t' % de t % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par $\frac{t'}{100} \times \frac{t}{100}$.

Exemple

Dans une entreprise, 40 % des employés sont des femmes. Parmi elles, 15 % sont secrétaires. Quel est le pourcentage de secrétaires féminines dans cette entreprise ?

$\frac{40}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{6}{100}$. Ainsi 6% des salariés de cette entreprise sont des femmes secrétaires.

→ Exercice 9 page 5/6

VI. Addition et comparaison de pourcentages

Propriété :

Pour que la somme (ou la différence) de deux pourcentages ait un sens, il faut que les conditions suivantes sont respectées simultanément :

° Les ensembles de référence des deux pourcentages sont les mêmes.
° Les parties correspondant à ces deux pourcentages n'ont pas d'éléments communs.

Exemples :

- Lors du referendum de mai 2005, 54,67 % des français ont répondu « non » à la question qui leur était posée. Quel a été le pourcentage du « oui » à ce référendum ?
  Les ensembles de référence sont ici les mêmes (les votants). Les deux ensembles n'ont pas d'élément en commun (un électeur ne peut pas voter « oui » et « non »). Les conditions sont vérifiées pour utiliser la propriété.
  100 – 54,67 = 45,33. Ainsi 45,33 % des français ont voté « oui ».
- Dans une classe de 1ère ES, 78 % des élèves ont choisi l'option S.E.S. et 69 % des élèves étudient l'espagnol en LV2. On ne peut pas ajouter les deux pourcentages. En effet, les ensembles de référence sont bien les mêmes (les élèves de cette classe) mais les parties correspondant aux pourcentages ont des éléments en commun (les élèves qui ont choisi LV2 espagnol et SES en option)
- Dans une ville A, 16 % des habitants sont au chômage alors que dans une ville B, seulement 5 % des habitants est à la recherche d'un emploi. Quel est le pourcentage de chômeurs sur l'ensemble des deux villes ? Sans données supplémentaires, on ne peut pas répondre car on ne peut pas ajouter les pourcentages. En effet, les deux ensembles de référence ne sont pas les mêmes (population de chacune des villes).

Propriété :

Lorsque les ensembles de référence de deux pourcentages sont les mêmes, les pourcentages sont dans le même ordre que les quantités auxquelles ils correspondent. Sinon, on ne peut pas comparer deux pourcentages.

Exemples :

- Dans l'exemple précédent, il y a 7525 habitants dans la ville A et dans la ville B il y a 64180 habitants.
  D'où : $\frac{16}{100} \times 7525 = 1204$ → il y a 1204 chômeurs dans la ville A.
  $\frac{5}{100} \times 64180 = 3209$ → il y a 3209 chômeurs dans la ville B.
  Ainsi malgré que $16 > 5$, il y a plus de personnes sans emploi dans la ville B (les ensembles de référence ne sont pas les mêmes).
- Lors du dernier recensement de 1999, on a constaté que 1,7 % de la population française vivait en Limousin alors que 18,9 % des français vivaient en Ile-de-France. Les deux ensembles de références sont identiques (la population française), on peut donc en déduire que l'Ile-de-France est environ 10 fois plus peuplée que le Limousin.

VII. Les pièges à éviter

- Dans une succession d'augmentations ou de diminutions, les taux ne s'ajoutent pas. En particulier, une hausse de t % n'est pas compensée par une baisse de t %.
- Lorsqu'on dit que le chômage est passé de 10 % à 12 %, cela ne signifie pas que le taux a augmenté de 2 % (il serait égal à 10,2 % : $10 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 10{,}2$). Par contre, on dit qu'e le taux de chômage a augmenté de 2 points.

→ Exercices 10 à 15 pages 5 et 6/6

Pourcentages - Exercices

Exercice 1

b. Calculer 23 % de 154 ; 3 % de 850 ; 0,8 % de 420 et 152 % de 56.
b. Préférez-vous gagner 2,5 % de 780 ou 82 % de 24 euros ?

Exercice 2

Dans une entreprise la production d'un objet s'élevait en 2002 à 20 000 articles fabriqués.

a. 5 % de ces objets étaient défectueux. Combien d'objets n'ont pu être mis en vente ? Combien ont été mis en vente ?
b. Sur les produits mis en vente, 18 050 ont été vendus. Quel est le pourcentage d'objets vendus par rapport à ceux mis en vente ? par rapport à ceux fabriqués ?
c. En 2002, la production s'élevait à environ 99 % de la production de l'année 2001. Déterminer une estimation de la production en 2001 de cet objet.

Exercice 3

Steve court le $100m$ en 11,5 secondes et lance le poids à $16m$. Il pense que grâce à son entraînement intensif, il peut améliorer ses performances de 2 % l'an prochain. Quelles seront-elles alors ?

Exercice 4

Une entreprise emploie deux catégories de personnels : 100 personnes de catégorie A dont le salaire mensuel moyen est de 1000 euros et 30 personnes de catégorie B dont le salaire mensuel moyen est de 1400 euros. Le secteur d'activité de cette entreprise est en pleine expansion et un an plus tard la situation a évolué de la manière suivante :

- Le nombre de salariés de catégorie A a augmenté de 250 % et leur salaire moyen est en hausse de 5 %.
- Le nombre de salariés de catégorie B est passé de 30 à 35 et leur salaire moyen est en hausse de 6 %.

« Tous nos chiffres sont en hausse ! » a déclaré le PDG.
« Sauf le salaire moyen… » a répondu un salarié.
Qu'en pensez-vous ?

Exercice 5

On a demandé à Bastien et à Sophie de répondre au problème suivant : "En supposant que l'herbe de ma pelouse grandit de 5 % par jour, quel sera le pourcentage d'augmentation, arrondi à l'unité, de sa hauteur en 15 jours ?"

Après un calcul, Bastien trouve que la pelouse a grandi de 75 % en 15 jours. Sophie pense, pour sa part, que la pelouse a grandi d'environ 108 %. Quel est le raisonnement de chacun des deux élèves ? Qui a raison ? Quelle propriété peut-on en tirer ?

1. *Remarque : on verra plus tard dans l'année que cette propriété est à nuancer !*

Exercice 6

Si le taux de TVA sur les CD audio passait de 19,6 % à 5,5 %, quel serait le pourcentage de diminution du prix de vente TTC des CD audio ?

Exercice 7

Le tableau suivant donne les taux d'évolution du pouvoir d'achat du revenu brut des ménages par rapport à l'année 2000.

Année	2001	2002	2003
Taux d'évolution (en %)	3,3	5,4	6,6

1. Calculer les indices du pouvoir d'achat du revenu brut des ménages, en prenant pour base 100 en 2000.
2. En déduire les taux d'évolution annuels du pouvoir d'achat du revenu brut des ménages.

Exercice 8
Le tableau suivant donne le niveau de vie moyen annuel des professionnels indépendants en France métropolitaine pour certaines années :

Date	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Niveau de vie (en €)	17 370	17 470		19 870		20 850
Indice	100		105,7		119,8	

1. Recopier et compléter le tableau.
2. En utilisant uniquement les indices, calculer le pourcentage d'évolution du niveau de vie :
   a. entre 1996 et 1998
   b. entre 1996 et 2001
   c. entre 1998 et 2001

Exercice 9
Dans cette société, 45 % des employés effectuent des travaux de secrétariat et parmi ceux-ci, 75 % sont des femmes. Dans cette autre société, 70 % des salariés sont des secrétaires parmi lesquels 49 % sont des femmes. Dans quelle société la, proportion des secrétaires féminines est-elle la plus importante parmi le personnel ?

Exercice 10
Lu dans la presse : « le taux de remplissage des avions de la première compagnie aérienne espagnole s'est établi à 79,2 % en juillet, en repli de 0,5 point par rapport au même mois de juillet de l'an dernier (79,7 %) ».
1. Exprimer en pourcentage (à 0,1 % près) cette diminution du taux de remplissage.
2. Plus loin, dans le même article : « Sur les longs courriers, le taux de remplissage a été de 84,5 %, soit une hausse de 0,6 point ». Exprimer en pourcentage (à 0,1 % près) cette augmentation du taux de remplissage.

Exercice 11
Le "CAC 40" est un indice que l'on exprime en points et qui sert à évaluer les variations de la bourse de Paris. Le tableau ci-dessous indique ses évolutions en pourcentage pendant une semaine boursière.

Jours	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Variation en %	1,2	1	-1,4	-1,3	0,3

2. Calculer à 0,01% près, le taux global d'évolution pendant cette semaine.

Sachant qu'il valait 3600 points à l'ouverture lundi matin, combien valait le CAC 40, à 0,1 point près, à la fermeture le vendredi soir ?

Exercice 12
Voici la répartition des groupes sanguins pour la population française.

Groupe	A	B	AB	O
Répartition	40 %	10 %	5 %	45 %

Pour chaque groupe, voici la répartition selon que le sang possède (Rh +) ou non (RH -), le facteur Rhésus.

Groupe	A	B	AB	O
Rh +	82 %	81 %	83 %	80 %
Rh -	18 %	19 %	17 %	20 %

1. A quel pourcentage de la population totale correspond la catégorie A^+, c'est-à-dire Groupe A Rhésus + ?
2. Reprendre le deuxième tableau de l'énoncé en faisant apparaître dans chacune des huit cases le pourcentage de la population totale auquel chacune correspond.

Exercice 13

Lors d'une épizootie, à l'aide d'un test sûr mais cher, les services vétérinaires ont acquis la certitude que 2 % des animaux du cheptel de la région sont malades.
On souhaite contrôler les animaux à grande échelle à l'aide d'un autre test moins sûr que le premier mais moins onéreux.
Ce nouveau test est positif dans 85 % des cas si l'animal est malade et négatif dans 95 % des cas si l'animal est sain.

1. Montrer que la proportion du cheptel correspondant aux animaux malades pour lequel le test se révèle positif est 1,7 %.
2. Compléter le tableau de la répartition des animaux en pourcentage du cheptel total établi selon deux critères :
   - Animal malade (M) ou sain (S)
   - Résultat du test positif (T^+) ou négatif (N^-).

	M	S	$Total$
T^+	1,7		
T^-			
$Total$			100

3. Pour quel pourcentage des animaux le test est-il positif ?
   Parmi les animaux pour lesquels le test est positif, calculer le pourcentage d'animaux sains.
4. Parmi les animaux pour lesquels le test est négatif, calculer le pourcentage d'animaux malades.

Exercice 14

Une société qui organise des vacances décide de faire une étude sur l'usage du tabac par sa clientèle.
Les effectifs des diverses catégories de clients sont les suivants :

	De 18 à 30 ans	De 31 à 50 ans	Plus de 50 ans	TOTAL
Hommes	150	600	230	980
Femmes	500	50	100	650
TOTAL	650	650	330	1630

Les pourcentages de fumeurs parmi la clientèle de la société sont les suivants :

	De 18 à 30 ans	De 31 à 50 ans	Plus de 50 ans
Hommes	60 %	25 %	30 %
Femmes	50 %	20 %	25 %

Au vu de ces tableaux, un employé affirme que les femmes clientes de la société fument moins que les hommes.
A-t-il raison ou tort ? Argumenter la réponse.

Exercice 15

Voici quelques lignes d'un humoriste, trouvées dans la presse : « 20 % de tous les accidents automobiles sont provoqués par des conducteurs ivres. Ceci veut dire que 80 % de tous les accidents sont provoqués par des automobilistes sobres… Pourquoi les sobres ne peuvent-ils pas se retirer de la circulation afin que notre sécurité augmente de 400 % ».

1. Retrouver le raisonnement mathématique de cet humoriste.
2. Expliquer son erreur.
3. On suppose que sur un échantillon de 2000 véhicules, on a 20 accidents et d'autre part que 50 des 2000 conducteurs soient ivres.
   En reprenant l'information « 20 % des accidents automobiles sont provoqués par des automobilistes ivres » et en l'appliquant à l'échantillon ci-dessus, démontrer qu'il est beaucoup plus dangereux de conduire ivre que sobre.