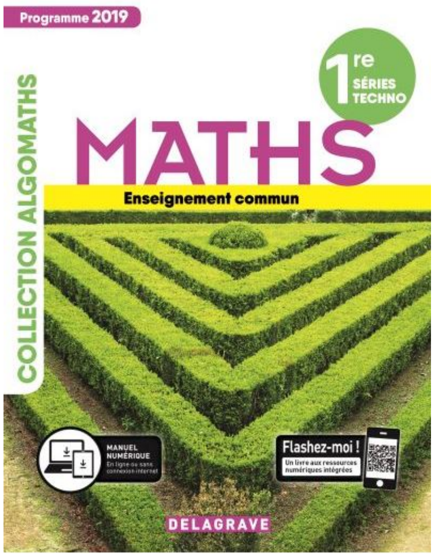
Cours de Mathématiques de Première STMG (programme 2019)

Michel IMBERT

Année scolaire 2019-2020

Lycée Bertran de Born - *Périgueux*



Livre de la classe

Table des matières

Chapitre 1

Automatismes

Sommaire

I Proportions et pourcentages

I.1 Définition

EXERCICE 1 Quels sont les nombres égaux partis tous ceux qui suivent :

$$0,25 \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{50}{200} \qquad 25\% \qquad \frac{0.025}{0.1} \qquad \frac{25}{100} \qquad \frac{750}{3000}$$

• ○ • ○ •

Définition Une proportion est un rapport entre deux quantités. Elle s'exprime de plusieurs manières : sous forme décimale, fractionnaire ou sous la forme d'un pourcentage.
par exemple : 80% = ... = ...

• ○ •

Exemple 1 Sur 150 candidats à l'examen, 120 ont été admis. Quel est le pourcentage d'élèves admis ?

• ○ •

EXERCICE 2 Une urne contient 7 jetons rouges, 9 jetons bleus et 5 jetons noirs. Donner le pourcentage arrondi à 0,1% du nombre de jetons rouges dans l'urne. Donner la proportion sous forme fractionnaire et sous forme décimale.

• ○ •

A 1 Compléter le tableau suivant :

Proportion écrite sous forme :		
fractionnaire	décimale	de pourcentage
$\frac{3}{5}$		
$\frac{12}{250}$		
		7 %
	$0,195$	

I.2 Calculer un pourcentage d'une quantité

Exemple 2 38% de $40 =$

A 2

- calculer 20% de 190 . . . .
- calculer 25% de 150 . . . .
- calculer 75% de 250 . . . .
- calculer 10% de 123 . . . .
- calculer 29% de 300 . . . .
- calculer 90% de 600 . . . .

EXERCICE 3 Avec un contexte : Dans un lycée de 1250 élèves, il y a 26% des élèves qui ont les yeux bleux. Calculer le nombre d'élèves aux yeux bleux.

• ○ •

EXERCICE 4 Un smartphone, qui vaut initialement 653€, est remisé à -10%. Quel est le montant de la remise ?

• ○ •

I.3 Proportion d'une proportion

Propriété Si p_1 est la proportion de A dans B,
et p_2 est la proportion de B dans E,
alors la proportion de A dans E est $p = p_1 \times p_2$. *((dessin)*

• ○ •

Exemple 3 Dans un lycée, 60% des élèves sont en filière technologique. On sait de plus que 55% des élèves en filière technologique sont des garçons. Quelle est la proportion de garçons en filière technologique par rapport à l'ensemble du lycée.

• ○ •

Différentes situations de proportion de proportion

A 3

- Parmi les 40% de Français qui partent en vacances, 90% partent en France. Quel est le popurcentage de Français qui partent en vacances en France ?
- Sur un site de VOD, 23% des films proposés sont des comédies dont 26% sont françaises. Quelle est la proportion de comédies françaises que ce site ?
- Sur un parc automobile, 73% des voitures sont des diesel, dont 36% ont plus de 2 ans. Quelle est la proprtion de voitures diesel de plus de 2 ans sur ce parc automobile ?

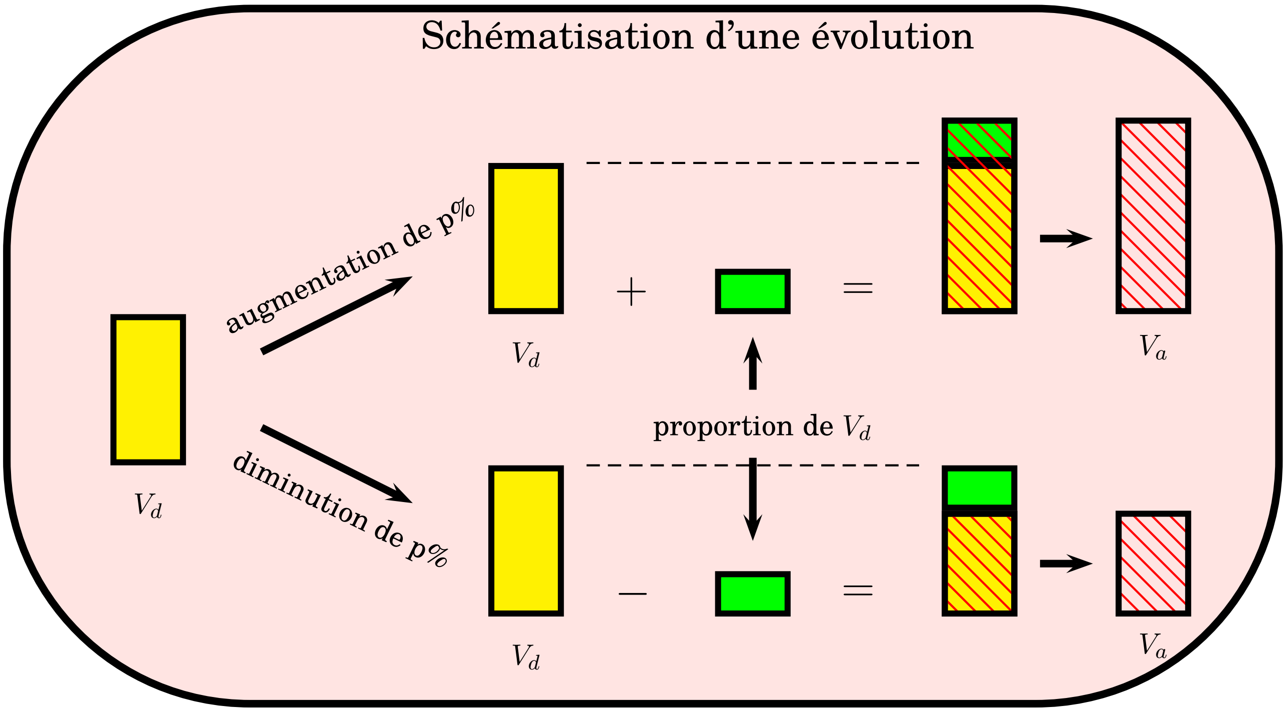
II Évolutions et variations

II.1 Principe, calcul d'une valeur d'arrivée ou de départ

*Il s'agit de revenir sur des « augmentations » et des « diminutions » en pourcentage qualifiées d'**évolutions**.*
Durant toute l'année, on utilisera les notation de :

- V_d pour valeur de départ avant évolution ;
- V_a pour valeur d'arrivée après évolution ;
- on qualifiera de **taux** un pourcentage écrit sous forme décimale.

• ○ • ○ •



• ○ •

`Traduction mathématique :`

1. Comment calcule-t-on la proprotion de V_d ajoutée ou retranchée ?

2. Dans le cas d'une augmentation, écrire la relation permettant d'exprimer V_a.

3. En déduire la relation permettant d'exprimer V_a dans le cas d'une diminution.

• ○ •

Remarque 1 Une simple multiplication permet de déterminer V_a en multipliant V_d par un coefficient relativement simple à trouver. Ce coefficient sera noté c_m.

Théorème

Pour une évolution, *quelle qu'elle soit*, on utilisera $\boxed{V_a = c_m \times V_d}$ où

- augmentation : $c_m = 1 + p\% = 1 + t$
- diminution : $c_m = 1 - p\% = 1 - t$

• ○ •

Exemple 4

1. Donner les coefficients multiplicatifs liés aux évolutions suivantes : augmenter de 12%, baisser de 6%, augmenter de 100%, baisser de 80%, augmenter de 3%.

2. Donner les évolutions correspondant aux coefficients multiplicateurs suivants : $c_m = 1,13$, $c_m = 0,8$, $c_m = 1,056$, $c_m = 0,94$, $c_m = 2$, $c_m = 1,5$, $c_m = 0,5$.

• ○ •

Pour s'entraîner sur les évolutions

A 4

- Un objet coûte 28€. Il baisse de 10%. Quel est son nouveau prix ?
- Un objet coûte 45€. Il augmente de 20%. Quel est son nouveau prix ?
- Un objet coûte 1230€. Il baisse de 30%. Quel est son nouveau prix ?
- Un objet coûte 29,99€. Il baisse de 33%. Quel est son nouveau prix ?
- Un objet coûte 89,99€. Il augmente de 23%. Quel est son nouveau prix ?
- Après une augmentation de 20%, un objet coûte 26,40€. Quel est son ancien prix ?
- Après une augmentation de 6%, un objet coûte 59,36€. Quel est son ancien prix ?
- Après une diminution de 10%, un objet coûte 80,10€. Quel est son ancien prix ?

II.2 Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage

Théorème

Le taux d'évolution t *sous forme décimale* qui permet de passer de V_d à V_a est donné par la formule

$$t = \frac{V_a - V_d}{V_d}$$

pour obtenir le pourcentage, il suffit de multiplier par 100.

• ○ •

Exemple 5 Calculer dans chaque cas le pourcentage de baisse ou de hausse.

1. $V_d = 56, \quad V_a = 65$;
2. $V_d = 84, \quad V_a = 210$;
3. $V_d = 70, \quad V_a = 56$;
4. $V_d = 35, \quad V_a = 78$;

Pour s'entraîner sur les taux d'évolution

A 5

- Le nombre d'élèves dans un lycée est passé de 1480 à 1332. Quel est le pourcentage de baisse du nombre d'élèves ?
- La moyenne de mathématiques de Zoé est passée de 15,5 à 17,3. De quel pourcentage sa moyenne a-t-elle augmentée à 0,1% près ?
- Un homme qui a perdu 20 kg pèse maintenant 75 kg. Quel pourcentage de baisse son poids a-t-il subi ?
- Une maison avait une superficie de 120 m^2. Les propriétaires font une extension de 32 m^2. Quelle est l'évolution de la superficie de la maison ?
- Dans une station service, le prix du gasoil à été multiplié par 1,08 alors que le prix du SP95 a été multiplié par 0,96. Quels sont en pourcentage les taux d'évolution des deux prix ?

II.3 Taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives

Dans cette partie, on considère plusieurs évolutions successives (augmentation ou diminution), disons n pour fixer les choses.

Définition

On note $c_{m_1}, c_{m_2}, \dots, c_{m_n}$ les coefficients multiplicateurs des évolutions successives.
On appelle **coefficient multiplicateur global**, noté c_g, le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution. En d'autres termes,

$$c_g = c_{m_1} \times c_{m_2} \times \dots \times c_{m_n}$$

puis,
Le **taux d'évolution global** t_g, sous forme décimale, est donné par la relation déjà rencontrée

$$t_g = c_g - 1$$

• ○ • ○ •

Exemple 6 Le prix d'un article subit une première hausse de 30% suivie d'une baisse de 20% suivie d'une hausse de 10%. Quel est le taux d'évolution global (en pourcentage) après ces trois évolutions ?

• ○ •

A 6

Pour s'entraîner sur les évolutions successives

- Après avoir augmenté le prix d'un article de 30%, le vendeur décide de le baisser de 30%. Quelle évolution aura subi le prix de cet article ?
- Un prix augmente de 20% puis baisse de 35%. Quelle est l'évolution globale de ce prix ?
- Le prix du timbre a augmenté de 5% par an depuis 10 ans. Quel est le taux d'évolution subi par le prix du timbre sur ces dix années ?
- Un élève souhaite diminuer le temps passé sur son smartphone de 2% par semaine. De combien aura-t-il diminué au bout d'un an ?
- Un compte est rémunéré à 1,25% la première année, puis à 1% la deuxième année, puis de 0,75% la troisième année. Si le client ne touche pas à l'argent qu'il y a sur ce compte, quelle sera l'augmentation subie par le capital sur ces trois ans ?

II.4 Taux d'évolution réciproque

Définition

Une quantité passe d'une valeur de départ V_d à une valeur d'arrivée V_a après une évolution de p% (hausse ou baisse).
On appelle **taux d'évolution réciproque** le taux d'évolution qui permet de passer de V_a à V_d.

• ○ •

Propriétés

On note c_{m_r} le coefficient multiplicateur lié au taux d'évolution réciproque t_r.
De,

$$V_a = c_m \times V_d$$

et,

$$V_d = c_{m_r} \times V_a$$

il vient naturellement,

$$c_m \times c_{m_r} = 1 \Leftrightarrow c_{m_r} = 1/c_m$$

• ○ •

Exemple 7 Un article subit une hausse de 25%. Quel est le taux réciproque associé ?

• ○ •

A 7

Pour s'entraîner sur les taux réciproque

- Un prix baisse de 50%. Quel est le taux réciproque associé ?
- Un prix augmente de 40%. Quelle baisse faut-il appliquer au nouveau prix pour retrouver l'ancien ?
- Un gouvernement augmente les impôts sur le revenu de 10% deux années consécutives. Face au mécontentement de ses concitoyens, il décide la troisième année d'appliquer une baisse qui compense complètement les deux hausses précédentes. De quel pourcentage doit être cette baisse ?

II.5 Indice de base 100

Définition

Disposant d'une série de données, **l'indice de base 100** est la valeur 100 donnée à l'une d'entre elles.
Les indices correspondant aux autres données étant calculés proportionnellement.

Données	d_1	d_2	d_3	...	d_n
Indice		100			

• ○ •

A 8

Pour s'entraîner sur les indices

- Calculer les indices manquants

Prix (en €)	240	270	320	180
Indice	100			

- À partir du tableau suivant

Année	2014	2015	2016	2017
Indice	100	94	110	115

donner l'évolution en pourcentage entre les années 2014 et 2015, 2014 et 2017 puis entre 2016 et 2017

III Calcul numérique et algébrique

III.1 Effectuer des opérations et des comparaisons entre fractions simples

5 règles

a, b, c, d et k peuvent être remplacés par n'importe quel nombre réel
(sauf 0 pour b, d et k)

• $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a \div k}{b \div k}$ • $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$ • $\dfrac{a}{d} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{d}$ • $\dfrac{a}{d} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{d}$

Obligation d'y avoir même dénominateur pour additionner ou soustraire deux fractions

• Si deux fractions ont le même dénominateur, elles sont rangées dans l'ordre de leur numérateur.

• ◯ • ◯ •

A 9

Pour s'entraîner sur les fractions

- Calculer et simplifier $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{5}$
- Calculer et simplifier $\dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{}$
- Calculer et simplifier $3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \times \dfrac{3}{4}$
- Calculer et simplifier $3 \times \dfrac{6}{7} - \dfrac{4}{7}$
- Comparer $\dfrac{7}{2}$ et $\dfrac{10}{3}$
- Comparer $\dfrac{12}{7}$ et $\dfrac{5}{3}$
- Comparer $\dfrac{17}{10}$ et $\dfrac{413}{250}$
- Calculer $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}$
- Calculer $1 + \dfrac{3}{4}$
- Calculer $2 + 3 \times \dfrac{2}{7}$
- Comparer $0,25$ et $\dfrac{1}{5}$
- Comparer $\dfrac{2}{7}$ et $\dfrac{3}{8}$
- Comparer 1 et $\dfrac{11}{12}$

III.2 Effectuer des opérations sur les puissances

7 règles

a, b et k peuvent être remplacés par n'importe quel nombre réel non égal à 0.
m, n sont des entiers relatifs. Par convention, on décide que $a^0 = 1$.

• $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ facteurs}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ • $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

• $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^n)^m = a^{m \times m}$

• ◯ •

`VRAI ou FAUX`

- $9^0 = 0$
- $10^7 = 10 \times 7$
- $10^5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$
- $5^4 = 20$

Pour s'entraîner sur les puissances

A 10

- Écrire sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n un entie relatif, les expressions suivantes :

$$A = 5 \times 5^{-3} \quad B = 7 \times 7^2 \quad C = (2^3)^5 \quad D = \frac{2^7}{2^3} \quad E = (-5)^3 \times (-5)^3 \quad F = \frac{16^3 \times 2^{-5}}{32}$$

- Un nombre est écrit sous forme scientifique s'il est écrit sous la forme $a \times 10^n$ où a est un réel sous forme décimale compris entre 1 et 10 ($1 \leqslant a < 10$) et n un entier relatif.
  Écrire 234,56 et 0,000456 en écriture scientifique.

- On considère un nombre en notation scientifique $a \times 10^n$.
  - si $1 \leqslant a < 5$ alors **l'ordre de grandeur** de $a \times 10^n$ est 10^n.
  - si $5 \leqslant a < 10$ alors **l'ordre de grandeur** de $a \times 10^n$ est 10^{n+1}.

  Donner les ordres de grandeur des nombres du point précédent.
- Écrire en notation scientifique : Dix-sept centaine de milliers ; vingt-deux milliards et un millième.

• ○ •

III.3 Effectuer des conversions d'unité

Ce paragraphe a largement été traité à l'école élementaire et au collège. Seuls quelques exemples seront traités.

Pour s'entraîner sur les conversions

A 11

- Au tennis, certains service atteignent la vitesse de 200 km.h^{-1}. Convertir cette vitesse en m.s^{-1}.
  réponse : ≈ 55,6
- Convertir 354 minutes en heures et minutes.
- Dans une piscine contenant 600 m^3, le taux de chlore est de 3mg.L^{-1}. Déterminer la quantité de chlore contenue dans la piscine.
- Convertir 3 h 50 min en heures.
- La vitesse moyenne d'un coureur est de 16 km.h^{-1}. Combien de temps lui faut-il pour parcourir 800 mètres ? Donner le résultat en minutes secondes.

• ○ •

III.4 Équation, inéquation du premier degré ; équation du type $x^2 = a$

5 règles

▷ Une égalité ne change pas en ajoutant ou retranchant un même nombre dans chaque membre.
▷ Une égalité ne change pas en multipliant ou en divisant par un même nombre non nul chaque membre.

• ○ •

▷ Une inégalité ne change pas de sens en ajoutant ou retranchant un même nombre dans chaque membre.
▷ Une inégalité ne change pas de sens en multipliant ou en divisant par un même nombre positif non nul chaque membre.
▷ Une inégalité **change de sens** en multipliant ou en divisant par un même nombre négatif non nul chaque membre.

• ○ • ○ •

Exemple 8 Appliquer les règles précédentes pour résoudre l'inéquation

$$5x - 18 < 7x + 4$$

....
....
....
....
....

Théorème L'équation $x^2 = a$ admet $\begin{cases} 0 & \text{solution si } a < 0 \\ 1 & \text{seule solution si } a = 0 \text{ qui est } x = 0 \\ 2 & \text{solutions si } a > 0 \text{ qui sont } x_1 = \sqrt{a} \text{ et } x_2 = -\sqrt{a} \end{cases}$

• ◯ • ◯ •

Pour s'entraîner sur les équations et inéquations

A 12

- Résoudre $7x - 21 = 2x + 19$
- Résoudre $2(x - 5) = 5 - 2x$
- Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 1$. Déterminer l'antécédent de 7 par la fonction f.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 7$. Déterminer le ou les antécédents éventuels de -2, puis de 18 par la fonction f.
- Résoudre $3x - 5 < 4$
- Résoudre $-6x + 3 > 2x - 5$
- Résoudre $3x^2 - 1 = 47$
- Résoudre $3x^2 = -12$

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 5 Nous utilisons pour mesurer la température le degré Celsius (°C). Dans certains pays, les degrés Farenheit sont utilisés (°F). Les deux unités sont liées par $F = 1,8C + 32$.

- Il fait 28°C. Quelle température fait-il en °F ?
- Il fait 100°F. Quelle température fait-il en °C ?

III.5 Signe d'une expression du premier degré, factorisée du second degré

Chercher le signe de $ax + b$, c'est trouver pour un x donné, le signe de l'image $ax + b$ sans la calculer.

Méthode : On résout **d'abord** (si $a \neq 0$) $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ et on observe le signe de a.

Signe de $ax + b$

$\boxed{a > 0}$

La fonction affine est croissante sur $\mathbb{R}$. Les images croissent en passant de valeurs négatives à des valeurs positives.

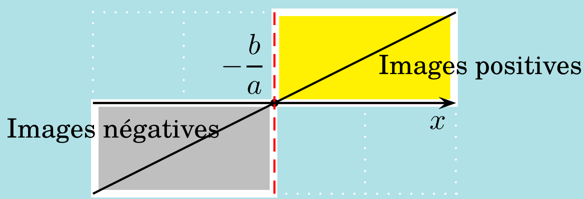


Tableau de signes :

$(a > 0)$ x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$		$-$	0	$+$	

$\boxed{a < 0}$

La fonction affine est décroissante sur $\mathbb{R}$. Les images décroissent en passant de valeurs positives à des valeurs négatives.

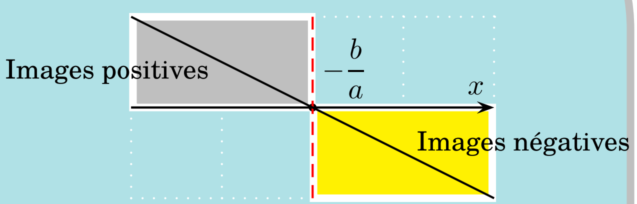


Tableau de signes :

$(a < 0)$ x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax + b$		$+$	0	$-$	

Exemple 9 :
Réaliser le tableau de signes de $2x+5$, de $-\frac{2}{3}x+4$, de $(3x-12)(5-4x)$ et de $\frac{-x-5}{x}$.

• ○ •

Pour s'entraîner sur les signes d'expressions

A 13

- Déterminer le signe de $-5x+20$.
- Déterminer le signe de $-0,01(x+6)(x+12)$.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-20x$
  1. Donner la forme factorisée de $f(x)$.
  2. Résoudre $f(x)=0$.
  3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

III.6 Développer, factoriser, réduire

Calcul littéral

Distributivité simple :

- $k(a+b)=ka+kb$
- $\frac{a+b}{k}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k}$

Double distributivité :

- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Egalités remarquables :

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Transformer une expression en allant de gauche à droite, c'est **développer**.
Transformer une expression en allant de droite à gauche, c'est **factoriser**.

• ○ •

Exemple 10 Factoriser $3(x-1)+(2x+3)(x-1)$.

Factoriser $(x+1)^2-6^2$

• ○ •

Pour s'entraîner sur le calcul littéral

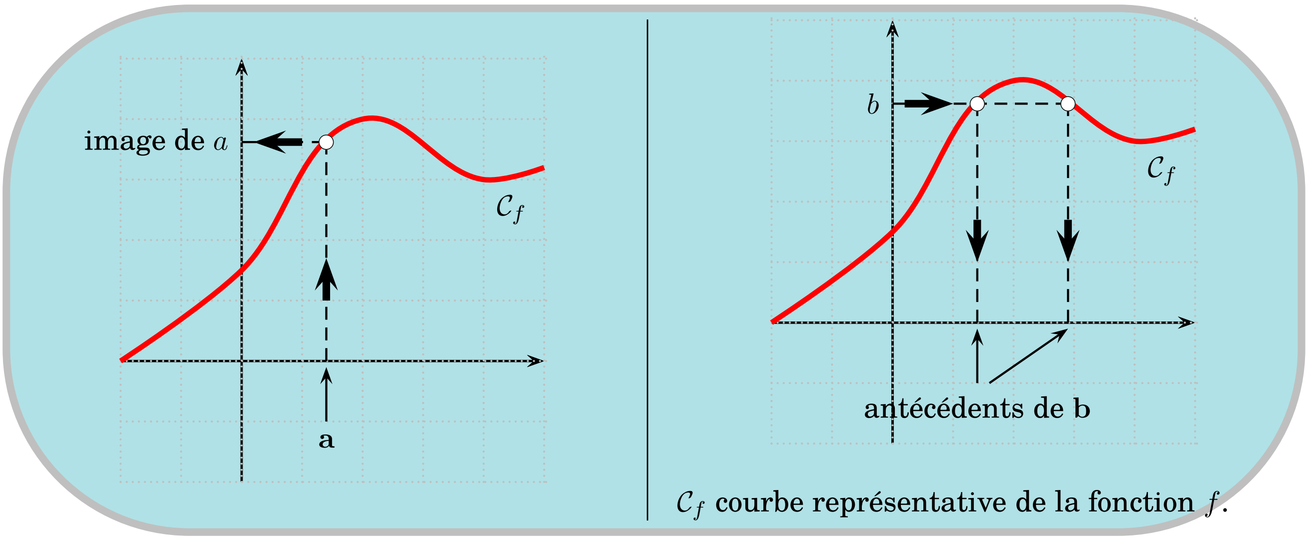
A 14

- Développer et réduire $A=5(2x-1)^2$
- Factoriser l'expression $C=64x^2-9$
- Développer et réduire $B=(4t-1)(4t+1)-2(t+4)$
- Factoriser $5(x+1)+(x+1)^2$
- Développer et réduire $2(x-5)-(x-5)(2x+5)$
- Factoriser $2(x-5)-(x-5)(2x+5)$
- Factoriser $9x^2-18x+9$

IV Fonctions et représentations

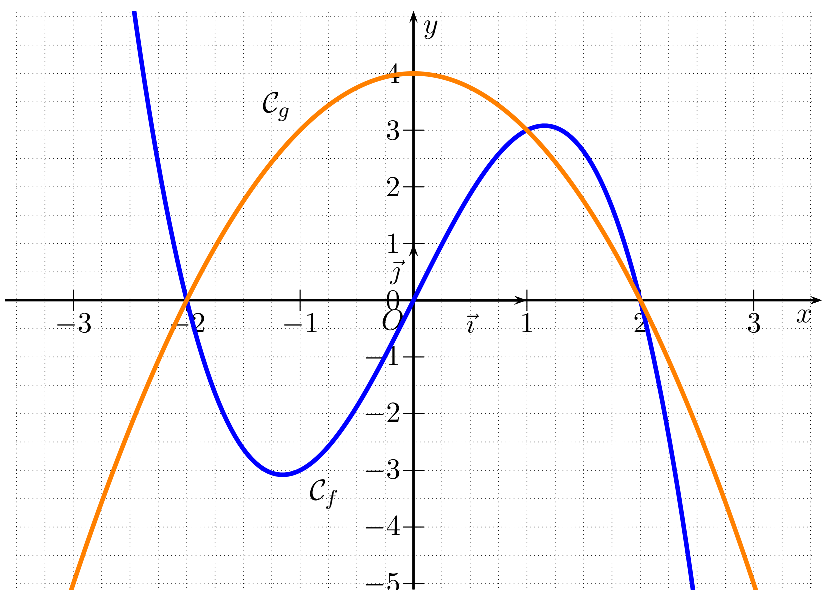
IV.1 Déterminer graphiquement des images et des antécédents

Image et antécédents par une fonction



$\mathcal{C}_f$ courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE 6 On a tracé sur la figure ci-dessous les courbes représentatives de f et de g définies sur $[-3;3]$, nommées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Des phrases sont proposées ci-dessous.
Indiquer si elles sont vraies ou fausses et, si elles sont fausses, les corriger pour qu'elles deviennent vraies.

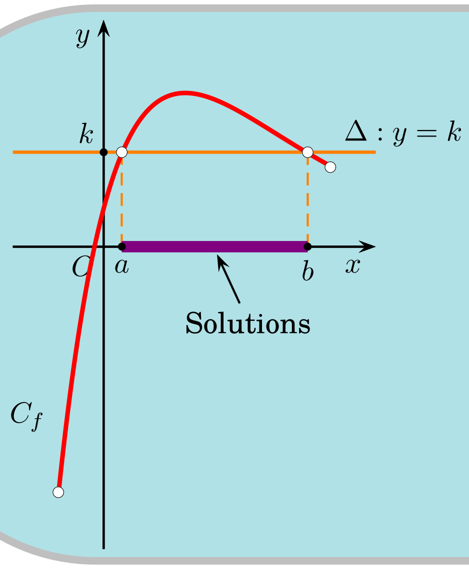
1. L'image de -1 par f est 3
   ....
   ....
2. 1 est un antécédent de 3 par f
   ....
   ....
3. L'équation $g(x) = 2$ admet 3 solutions
   ....
   ....
4. 0 a pour antécédent 4 par g
   ....
   ....

IV.2 Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type f(x)=k, f(x)>k, ...

IV.2.1 f(x)=k

Il s'agit de chercher x pour que son image par f soit k. Les nombres cherchés sont donc (s'ils existent) les antécédents de k par f.

IV.2.2 f(x)>k

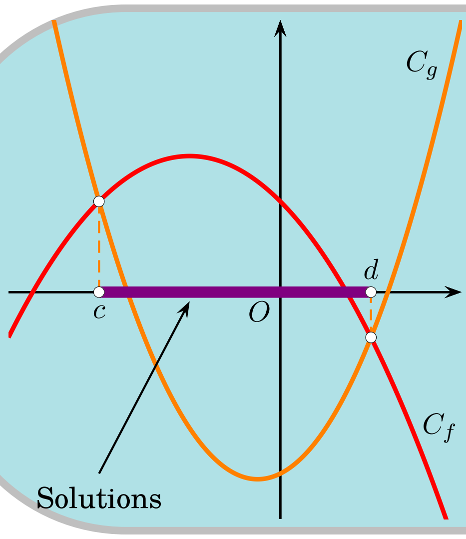


Les solutions de $f(x) > k$ (k réel) dans l'intervalle I sont les abscisses des points de C_f situés au-dessus de la droite Δ d'équation $y = k$.

$$\begin{cases} f(x) > k \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]a; b\right[$$

On écrit $\boxed{S = \left]a; b\right[}$

IV.2.3 f(x) ⩾ g(x)



Les solutions de $f(x) \geqslant g(x)$ dans l'intervalle I sont les abscisses des points de C_f situés au dessus de ceux de C_g.

$$\begin{cases} f(x) \geqslant g(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x \in [c; d].$$

On écrit $\boxed{S = [c; d]}$

• ○ •

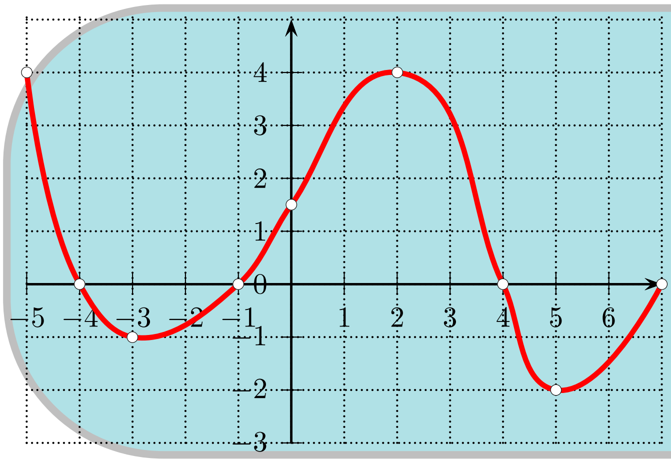
EXERCICE 7 Avec les courbes de l'exercice précédent et la précision permise par le graphique, résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $f(x) = 0$
   ....
   ....
2. $g(x) > 0$
   ....
   ....
3. $f(x) \geqslant 2$
   ....
   ....
4. $g(x) \leqslant 3$
   ....
   ....
5. $f(x) = g(x)$
   ....
   ....
6. $f(x) > g(x)$
   ....
   ....

IV.3 Déterminer le signe d'une fonction ou son tableau de variations

IV.3.1 Tableau de variations

Tableau de variations d'une fonction



La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5; 7]$. Lorsque l'on regarde dans le sens de lecture (de gauche à droite), la courbe d'une fonction croissante « monte » et celle d'une fonction décroissante « descend ».

- La fonction est décroissante sur $[-5; -3]$ et sur ……
- ……

On schématise dans un tableau appelé **tableau de variations**

$\Downarrow$

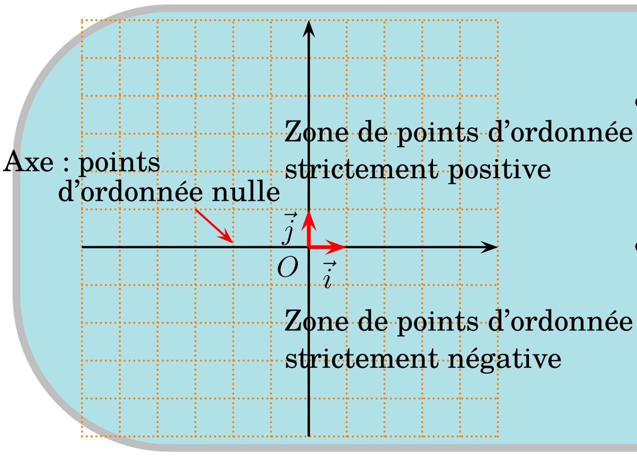
À compléter,

x	…	…	…	…	…
Variations de f					

• ○ •

IV.4 Signe d'une fonction

Signes d'une fonction



- La fonction est strictement **positive** pour les x qui situent la courbe dans la zone de points d'ordonnée strictement positive.
- La fonction est strictement **négative** pour les x qui situent la courbe dans la zone de points d'ordonnée strictement négative.

On schématise dans un tableau appelé **tableau de signes**

$\Downarrow$

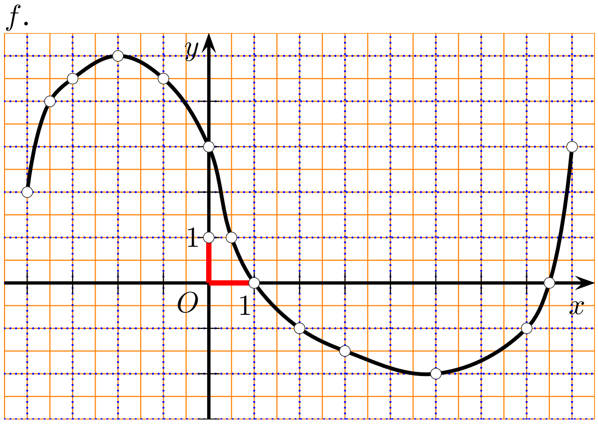
À compléter avec la courbe du paragraphe précédent,

x	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Signe de $f(x)$					

• ○ •

EXERCICE 8

Voici la courbe représentative d'une fonction f.



1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Lire sur le graphique les valeurs approchées ou exactes des nombres suivants :
   (a) $f(-1)$;
   (b) l'image de 2 par f ;
   (c) le ou les antécédents de 4,5 par f ;
   (d) le ou les réels x qui vérifient $f(x) = 0$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Dresser son tableau de signes.

• ○ •

Pour s'entraîner sur les équations de courbe

A 15

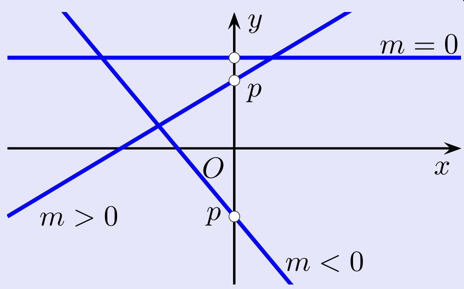
- Le point $A\left(1; \frac{61}{20}\right)$ appartient-il à la droite (d) d'équation réduite $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{4}{5}$?
- On considère la courbe d'équation $y = \dfrac{4-x}{x^2+1}$.
  Déterminer le point de la courbe d'abscisse -2.
- On considère les droites d'équations $y = 2x - 4$ et $y = -\dfrac{x}{2} + 1$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
- Le point $B(-1; 3)$ appartient-il à la courbe d'équation $y = 3x^2 - 5x + 1$?

IV.5 Tracer une droite

Rappel

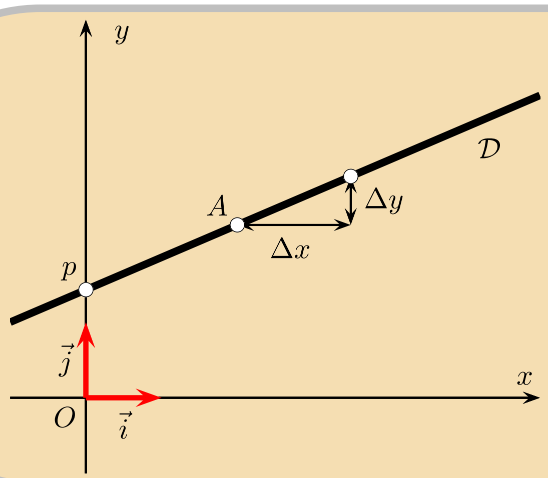
Une droite a une équation réduite de la forme $y = mx + p$.

- m est le « **coefficient directeur** » ou la « **pente** » de la droite d.
  Sur un graphique : *pente* $m = \pm\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- p est **l'ordonnée à l'origine de la droite** : la droite coupe l'axe des ordonnées « en p », ou « au point de coordonnées $(0; p)$ »



• ○ •

où



$$m = \pm\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

IV.5.1 donnée par son équation réduite

À partir d'un exemple,
Soit (d) la droite d'équation réduite $y = -2x + 5$.

On cherche deux points de la droite.

On choisit arbitrairement deux valeurs de x différentes.
On calcule le y correspondant avec l'équation de la droite.

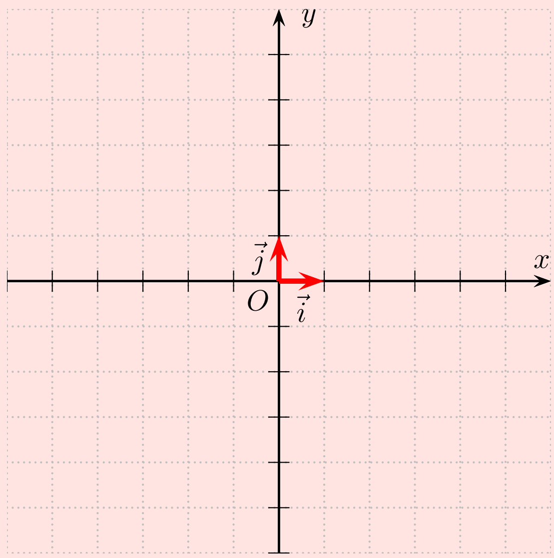
x	choix 1 :	choix 2 :
$y = -2x + 5$		

← Abscisses

← Ordonnées

On place les points dans le repère et on trace la droite passant par ces deux points.

Méthode



• ◯ •

IV.5.2 donnée par un point et son coefficient directeur

À partir d'un exemple,
Soit (d') la droite passant par le point de coordonnées $(2;3)$ et de coefficient directeur $m = 0,5$.

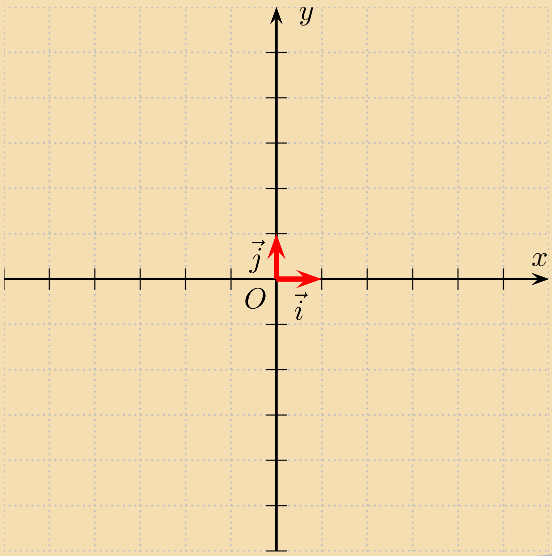
On commence par placer le points.

On regarde le signe de m : $m > 0$ donc la droite « monte ».
On cherche un autre point de la droite en utilisant les « décalages » Δx et Δy.
On doit avoir $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \ldots\ldots\ldots$

Δx	choix :
$\Delta y = \Delta x \times \ldots$ ou directement Δy	

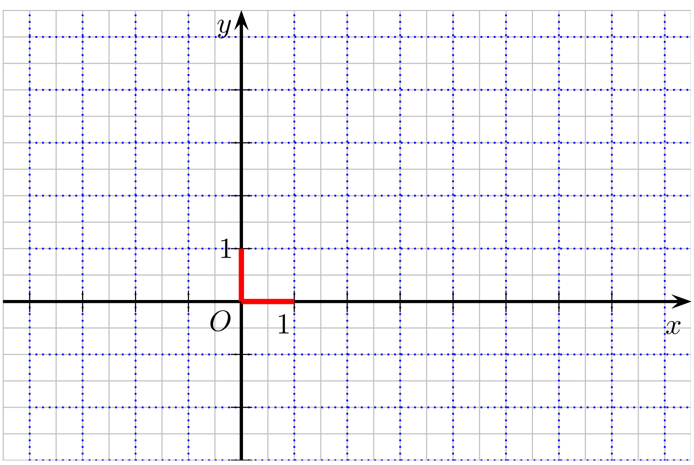
On place le deuxième point à partir du premier dans le repère et on trace la droite passant par ces deux points.

Méthode



• ○ •

EXERCICE 9



1. Tracer la droite (d_1) d'équation $y = 3x - 2$.
2. Tracer la droite (d_2) passant par le point $C(2;-1)$ et de coefficient directeur $-\dfrac{1}{3}$

• ○ •

IV.6 Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

On traitera un exemple en s'inspirant de tout ce qui précède :

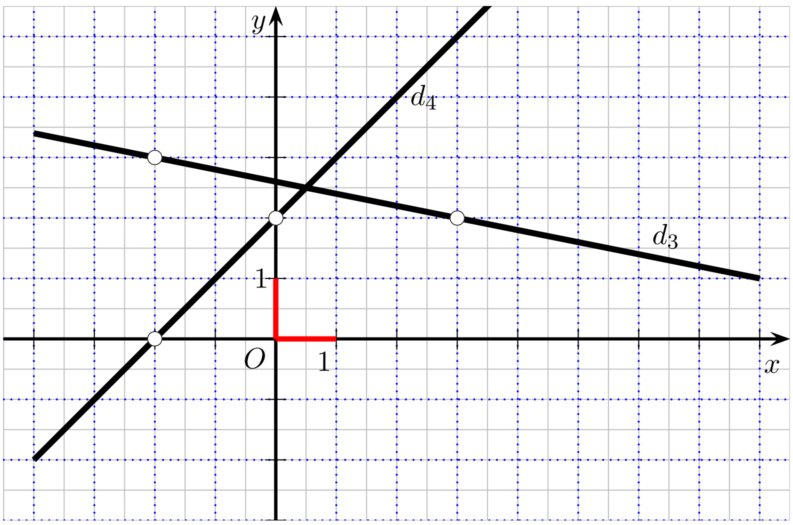
- La détermination de p est la plus simple : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées ;

- Pour celle de m, on cherche deux points dont les coordonnées sont « évidentes » (*nœud d'un quadrillage par exemple*) et on utilise la formule $m = \pm\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, puis la règle pour le signe de m (droite qui « monte », ou qui « descend »)

  On dispose également de la formule, connaissant les coordonnées de deux points A et B de la droite , $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

• ○ •

EXERCICE 10



1. Lire graphiquement l'équation réduite de la droite (d_4).
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (d_3).

• ○ •

3. Déterminer par le calcul, l'équation réduite de la droite (d_5) passanr par les points $E(4; -1)$ et $F(8; -4)$.

• ○ •

A 16

Problème de synthèse,

Dans un parc national américain, on dénombre depuis plusieurs années le nombre d'ours présents. On a obtenu les résultats du tableau ci-dessous

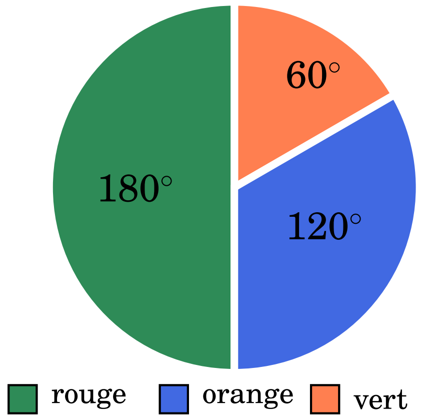
Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang année	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'ours	220	210	205	203	192	189	172	171

On décide de modéliser le nombre d'ours par une équation de droite $y = mx + p$ où x représente l'année 2011+x et y le nombre d'ours. Cette droite passe par les points $A(0; 220)$ et $B(5; 189)$.

1. Prouver que l'équation de cette droite est $y = -6,5x + 220$.
2. Quel est le nombre d'ours en 2013 d'après ce modèle ? Quel écart en pourcentage y a-t-il avec la réalité ?
3. Prévoir le nombre d'ours dans ce parc en 2025 avec ce modèle.
4. En quelle année, d'après ce modèle, les ours auront-ils disparu du parc ?

V Représentations graphiques et données chiffrées

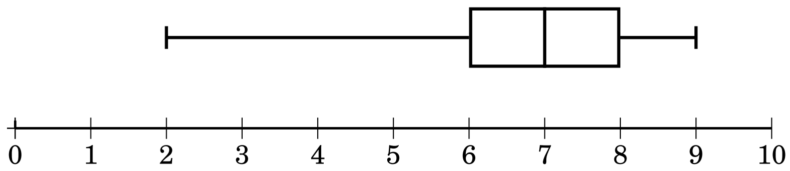
V.1 Diagramme circulaire : un exemple



Un automobiliste compte à chaque fois la couleur du feu tricolore qu'il rencontre (rouge, orange ou vert). Sur 500 feux, ci-contre les résultats.
Déterminer l'effectif de chaque couleur de feu tricolore qu'a rencontré l'automobiliste.

• ◯ •

V.2 Diagramme en boîte : un exemple

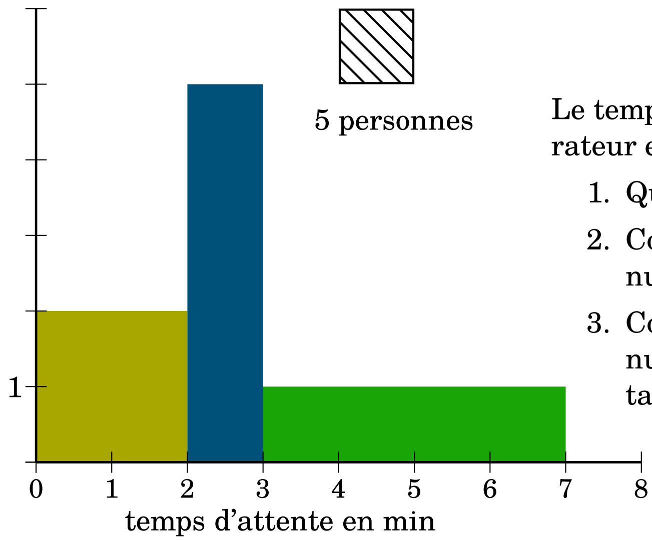


On considère une série statistique donne le diagramme en boite est rreprésenté ci-contre.

1. Donner un intervalle dans lequel se situe 50% de la population.
2. Peut-on dire que 80% de la population est inférieure à 8 ?
3. Quelle est la médiane de cette série ?

• ◯ •

V.3 Histogramme : un exemple

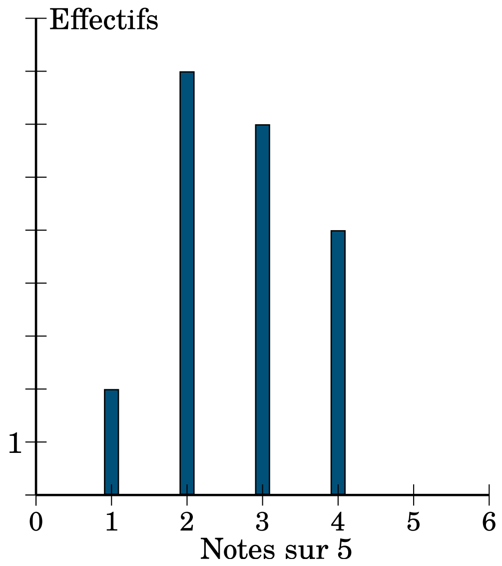


Le temps d'attente au téléphone d'une hotline d'un opérateur est représenté par cet histogramme.

1. Quel est l'effectif total de cette série statistiques ?
2. Combien de personnes ont attendu entre 2 et 3 minutes ? Quelle est la fréquence associée ?
3. Combien de personnes ont attendu moins de 3 minutes ? Quelle est la fréquence associée en pourcentage ?

• ◯ •

V.4 Diagramme en barres : un exemple

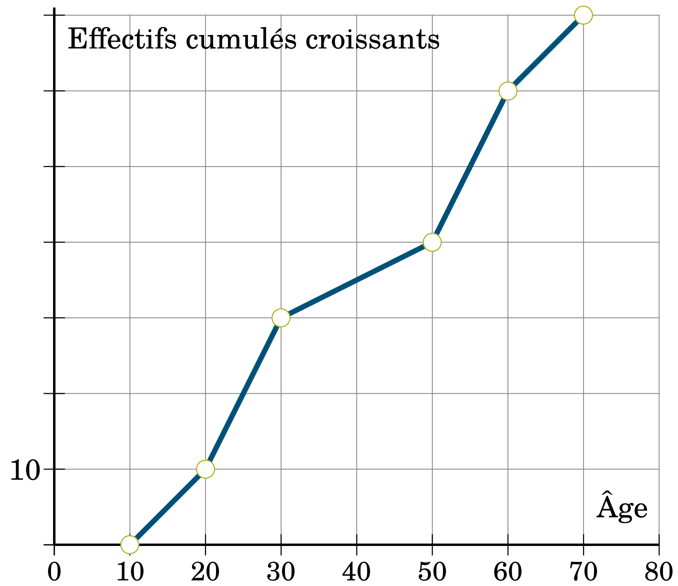


Voici la répartition des notes sur 5 d'une classe de Terminale.

1. Quel est l'effectif total de la classe ?
2. Combien d'élèves ont eu 4 sur 5 ? Quel pourcentage de la classe cela représente-t-il ?
3. Combien d'élèves ont eu la moyenne ? Quel pourcentage de la classe cela représente-t-il ?
4. Réaliser un diagramme circulaire de cette série statistique.

• ◯ •

V.5 Courbe des effectifs cumulés croissants : un exemple



On considère une série statistique donnant l'âge des habitants d'un immeuble. La courbe ci-contre est la courbe des effectifs cumulés croissants de cette série

1. Combien y a-t-il d'habitants au total dans l'immeuble ?
2. Combien y a-t-il d'habitants ayant entre 30 et 50 ans ? entre 0 et 10 ans ?
3. Quel est l'âge de l'habitant le plus âgé ?
4. À partir de cette courbe, retrouver les différentes tranches d'âges ainsi que leurs effectifs.

• ◯ • ◯ •

Chapitre 2

Suites

Sommaire

I Mode de génération d'une suite numérique

I.1 Première approche

▶ Traiter l'activité 1 page 12.

▶ Voici une liste de nombres :

- 1 - 2 - 5 - 10 - 17 - 26 - 37 - ......

Déterminer une « logique » dans l'enchaînement des nombres de la liste.

Une fois « trouvé » le procédé permettant de compléter la liste, tenter de **définir mathématiquement**, le calcul des différents nombres de la liste.

▶ Voici une autre liste de nombres :

- 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - ......

Renouveler les questions que l'on s'est posé dans le paragraphe précédent.

I.2 Définition

Définition

Une **suite numérique** est une liste ordonnée de nombres réels.
On lui associe une fonction :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

L'image de l'entier naturel n par la suite u, notée $\mathbf{u(n)}$ ou plus simplement $\mathbf{u_n}$, est appelée **terme de rang** n de la suite.

• ○ • ○ •

Remarque 2 Le premier terme de la suite (u_n) se note donc u_0.
Il arrive qu'une suite soit définie sur $\mathbb{N}^*$, le premier terme est alors u_1. Il faut être vigilant !

Si u_n est le terme de rang n d'une suite, alors u_{n-1} est son **terme précédent** et u_{n+1} est son **terme suivant**.

EXERCICE 11 Dans le langage `Python`, une **liste** permet de garger une suite en mémoire. Par exemple, le début de la suite u séra défini par

```
u=[3,7,11,15,19]
```

et l'on peut accéder à n'importe lequel des éléments de la liste, par exemple celui d'indice 2 s'écrivant `u[2]` et correspondant au terme u_2 de la suite.

Quel sera l'affichage après exécution du programme suivant ?

```
u=[3,7,11,15,19]
print(u[2])
```

I.3 Suite définie par une formule explicite

Définition Si **l'on dispose** de la fonction qui à n associe u_n alors la suite est définie explicitement et le calcul de ses termes est un simple calcul d'image par une fonction.

• ◯ •

Exemple 11 ⋆ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 2n$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_{10}

⋆ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3^n}{n+1}$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_4

I.4 Suite définie par une relation de récurrence

Définition Si la suite est définie par **son premier terme** (ou ses premiers termes) et une relation permettant de calculer **chaque terme à partir du terme précédent** (ou des précédents), elle est alors définie **par récurrence.**

• ◯ •

Exemple 12 ⋆ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$ Calculer u_1, u_2, u_3.

⋆ Les termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie sur $\mathbb{N}$, s'obtiennent de la façon suivante : « A partir de 2, chaque terme est obtenu en calculant la différence entre 9 et le triple du terme précédent ».

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la formule de récurrence définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour s'entraîner sur les calculs de termes d'une suite,

A 17

- Le nombre d'adhérents d'une association sportive s'accroît tous les ans de 20 personnes. Ce phénomène a débuté en 2010 alors qu'il y avait 250 adhérents. Définir une suite pouvant modéliser la situation.
- On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_n = -3n+5$. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
- On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier naturel non nul par $\begin{cases} u_1 = 1,3 \\ u_{n+1} = -3u_n - 4 \end{cases}$ Calculer u_2 puis u_5.

II Représentation graphique des termes d'une suite (u_n)

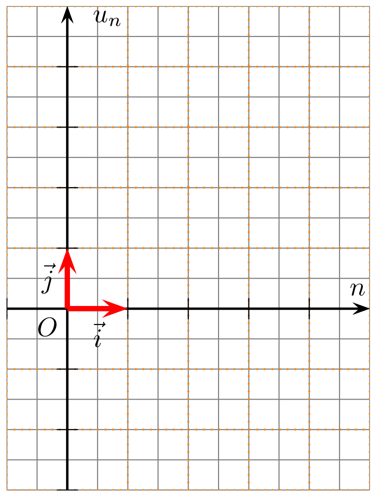
Méthode Pour représenter graphiquement une suite u dans un repère, on place :

- les indices n sur l'axe des abscisses ;
- les termes u_n sur l'axe des ordonnées ;
- les points de coordonnées $(n; u_n)$ dans le repère, **sans les relier** (nuage de points).

Exemple 13

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 0,5n^2 - 2$

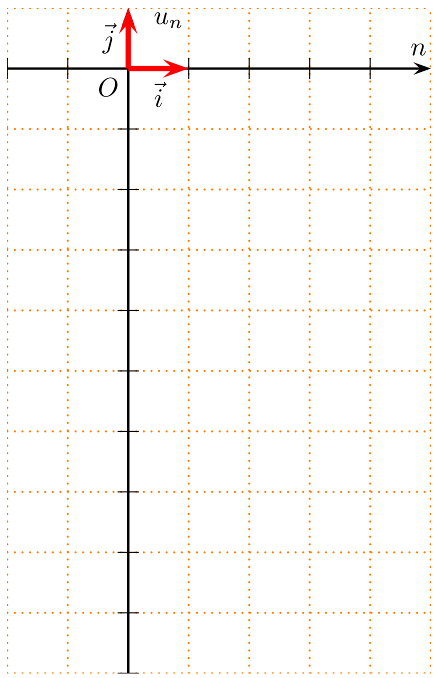
n	u_n



Exemple 14

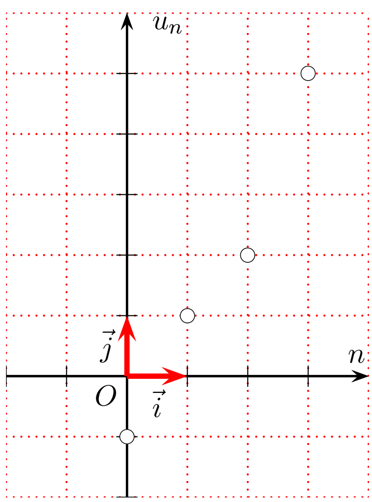
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

n	u_n



EXERCICE 12

On a représenté graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) dans un repère.
Lire u_0, u_2 et u_3.



III Sens de variation d'une suite (u_n)

III.1 Définitions

Définition

- La suite (u_n) est dite **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant u_{n+1}$
- La suite (u_n) est dite **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geqslant u_{n+1}$
- La suite (u_n) est dite **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_{n+1}$

Une suite qui est soit croissante soit décroissante soit constante est dite **monotone.**

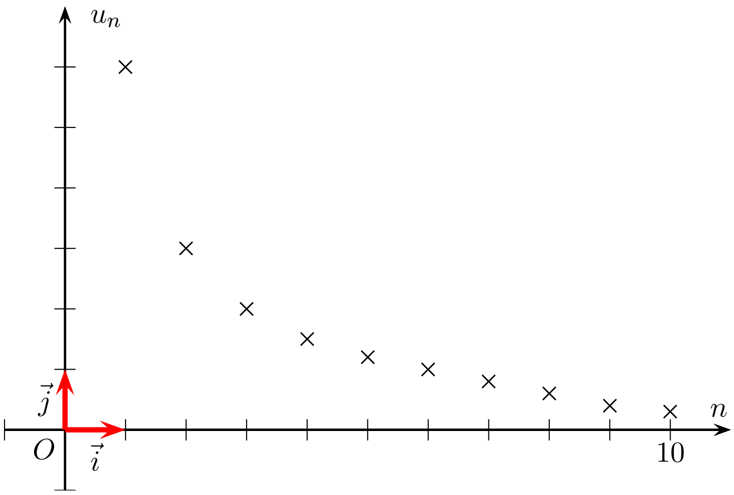
• ○ • ○ •

Remarque 3 Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites **monotones**.

À l'aide de la représentation graphique d'une suite, on peut conjecturer le sens de variation de cette suite

Lorsque n augmente, les points dessinés ont des ordonnées qui diminuent.
Pour un n donné entre 0 et 10, l'ordonnée étant u_n ; on a bien $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite semble décroissante.
On ne peut pas l'affirmer car on ne connaît pas les valeurs de $u_{11}, u_{12}, \ldots$ etc.



III.2 Étudier le sens de variation d'une suite

Méthode

On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on étudie le signe de la différence sachant que n est un entier naturel donc $n \geqslant 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors (u_n) croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors (u_n) décroissante.

• ○ •

Exemple 15 On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -1 - 2n$.

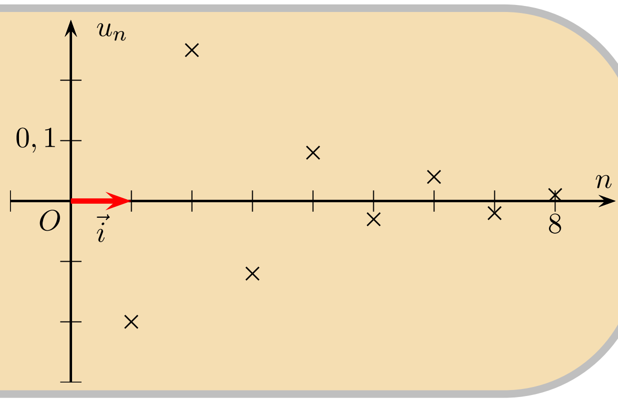
• ○ •

Exemple 16 On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 15 \end{cases}$

• ○ •

A 18 *Pour s'entraîner sur le sens de variation d'une suite,*

- Soit (v_n) une suite dont la représentation graphique des premiers termes figure ci-contre. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la suite ?
-



• ○ •

A 19 *Activité de synthèse du chapitre sur les suites,*

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Représenter les premiers termes de la suite.
3. La suite semble-t-elle croissante, décroissante ?
4. On admet que $u_n < 6$ pour tout entier naturel n. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. Quelle est la valeur affichée par le programme ci-dessous ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
U=1
N=0
while U<5.9999:
    U=0.5*U+3
    N=N+1
print(N)
```

6. Est-ce que les résultats trouvés précédemment restent vrais si le premier terme de la suite est $u_0 = 7$?

• ○ • ○ •

Chapitre 3

Fonctions

Sommaire

I Modélisation et fonction

Les fonctions permettent de modéliser des situations où deux grandeurs sont liées (dépendantes l'une de l'autre).

Dans certains cas, une relation se dégage de façon évidente entre les deux grandeurs. Dans d'autres cas, des relevés de données et leur représentation graphique peuvent amener à choisir un modèle décrivant le lien entre les grandeurs par une fonction.
Voir, par exemple, activité A16 « *Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite* » page 24.

I.1 Définition

Définition (rappel)

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
Lorsqu'à chaque nombre réel x de I, on associe un seul nombre réel y, on définit une **fonction** f sur I.
I est appelé **ensemble de définition de la fonction f.**

`Notation` : $f : x \mapsto y$ et alors $y = f(x)$.
`Vocabulaire` : y est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f.
`Représentation graphique` : L'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ avec x appartenant à I est la courbe représentative de f notée $\mathcal{C}_f$.

• ◯ • ◯ •

A 20

Revoir image et antécédent,

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 12x + 11$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Prouver que, pour tout x réel, $f(x) = (x - 11)(x - 1)$.
2. Déterminer l'image de -2 par la fonction f.
   Déterminer le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse 3.
3. Déterminer les antécédents éventuels de 0 et de 11 par la fonction f.

• ◯ •

Remarque 4 Vers « *Déterminer graphiquement des images et des antécédents* » page 18

I.2 Résolution graphique d'équations

C'est ici : « *Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type f(x)=k, f(x)>k, ..* » page 19

II Taux de variation

II.1 Traiter Activité 2 page 56

II.2 Définition

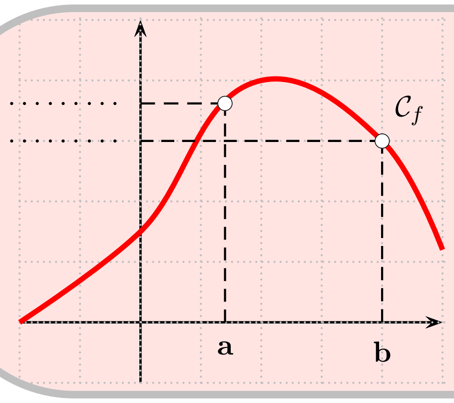
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
a et b sont deux nombres réels distincts de I.
Le taux de variation de f entre a et b est le nombre

$$\tau(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple 17 Déterminer $\tau(a,b)$ si f est la fonction carré, si f est une fonction affine.

II.3 Interprétation graphique

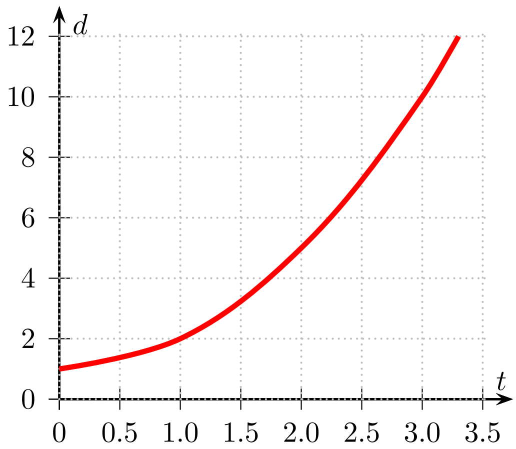


1. Compléter les pointillés.
2. Où « mesure-t-on » la différence $f(b)-f(a)$ sur le graphique ? même question pour la quantité $b-a$?
3. En déduire une interprétation de

$$\tau(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

.

EXERCICE 13



La courbe ci-contre représente la distance d (en km) parcourue par un randonneur en fonction du temps t (en h).

1. Calculer le taux de variation de d entre 1 et 3.
2. Interpréter graphiquement ce nombre.
3. Interpréter concrètement le taux de variation de d entre 1 et 3.

II.4 Sens de variation d'une fonction

Définition (rappel)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est **strictement croissante sur** I si,
pour n'importe quel choix de a et b dans I, les images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans le même ordre que celui de a et b.

f est **strictement décroissante sur** I si,
pour n'importe quel choix de a et b dans I, les images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans l'ordre inverse de celui de a et b.

Bien sûr, f est **constante** sur I si et seulement si tous les nombres réels de I ont la même image par f.

Tableau de variations : « *Déterminer le signe d'une fonction ou son tableau de variations* » page 20

EXERCICE 14 f est une fonction définie sur l'intervalle $]-3;5]$. f est strictement décroissante sur $]-3;1]$ et strictement croissante sur $[1;5]$.

Dessiner le tableau de variations de f.

Attention -3 n'a pas d'image.

• ○ •

II.5 Taux de variation et sens de variation

Propriétés

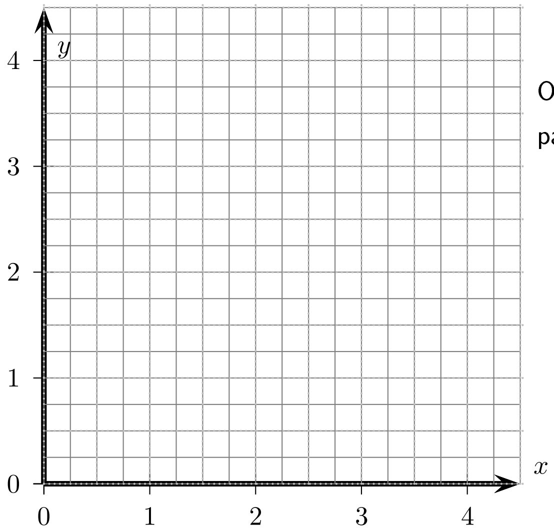
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si pour tous réels distincts a et b,

- $\tau(a,b) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
- $\tau(a,b) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
- $\tau(a,b) = 0$ alors f est constante sur I.

• ○ •

Exemple 18



On va justifier que la fonction f défine sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est . . . .

• ○ •

A 21

Pour s'entraîner sur les justifications de sens de variation,

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 2x$.
Déterminer le sens de variations de g sur $[-1;+\infty[$.

On commencera par évaluer $\tau(a,b)$ pour a et b choisis supérieurs ou égaux à -1.

• ○ • ○ •

Chapitre 4

Fonctions polynômes de degré 2, de degré 3

Sommaire

Fonctions polynômes (degré 2 et 3)

I Les fonctions affines

Les fonctions affines sont des fonctions polynômes de degré 1.

Voir signe de $ax+b$: « *Signe d'une expression du premier degré, factorisée du second degré* » page 16

II Fonctions polynômes de degré 2

II.1 Activité

II.1.1 Retour sur la classe de seconde et prolongement

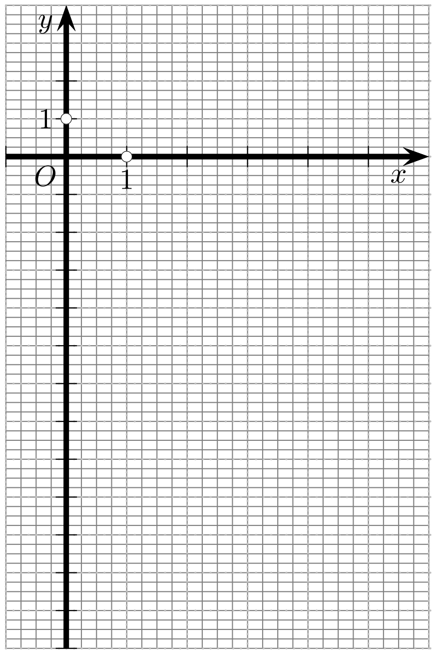
On considère la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2x^2 + 9x - 8$$

1. Lire la définition du paragraphe I.2 et préciser les valeurs de a, b et c. Quel est le signe de a ?
2. À l'aide de la calculatrice, réaliser un tableau de valeurs de la fonction f pour x appartenant à l'intervalle $[0; 5]$.
3. Repérer dans le tableau deux valeurs de x, notées v_1 et v_2, qui donnent la même image y. Calculer la moyenne x_S de ces deux valeurs. Que représente cette moyenne ?

Table de valeurs

x	$f(x) = ax^2 + bx + c$
$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$
$\boxed{v_1}$	$\to \boxed{y}$
$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$
$\boxed{v_2}$	$\to \boxed{y}$
$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$



4. On appelle S le point de la courbe de f d'abscisse x_S. Quelle est l'ordonnée y_S du point S ?
5. Sur le graphique, placer le point S et construire la courbe de f sur $[0; 5]$.
6. Réaliser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.

a x	0	x_S	5
Variations de f			

7. En utilisant le tableau précédent, préciser le nombre de fois où f s'annule. En utilisant la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,1 de la ou les valeur(s) pour lesquelles la fonction donne 0 comme image.

8. Soit les trois quantités suivantes : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$; $\boxed{x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$

   Calculer ces trois valeurs avec les coefficients de la fonction f. Donner une interprétation possible des valeurs x_1 et x_2.

   Pour aller plus loin : est-il toujours possible de calculer x_1 et x_2 ?

II.1.2 Un autre exemple

Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole représentant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^2 + \frac{10}{3}x - 8$$

Réaliser le tableau de variations de la fonction g et donner les valeurs exactes des solutions de $g(x) = 0$.

II.2 Fonction polynôme du second degré

Définition

Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, et c sont des nombres réels donnés avec $a \neq 0$.
L'expression $ax^2 + bx + c$ est encore appelée **trinôme du second degré**.

Exemple 19 :

- La fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto -4.9t^2 + 9.8t + 1.5$ est une fonction polynôme de degré deux.
- La fonction $g : x \longmapsto 0.5x^2 - 3$ est également une fonction polynôme de degré deux.
- Qu'en est-il de $s : x \longmapsto -3(6x - 2x^3) + x^2 - 6x^3 + 1$? et de $v : x \longmapsto 2x^2\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right) + 2$?

II.3 Représentation graphique

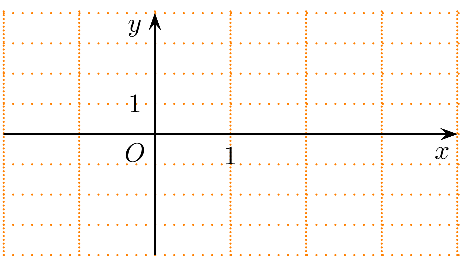
Définition, propriétés

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 f est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}; f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

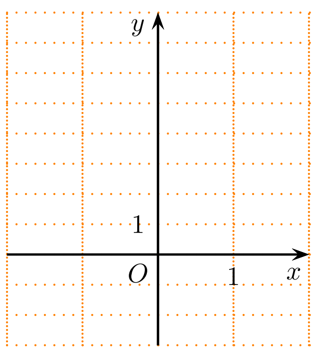
De plus :
- Si $a > 0$, la parabole C_f est « tournée vers le haut ». (le sommet S de la courbe correspond au point le plus « bas », l'ordonnée de S correspond au minimum de f atteint en $-\dfrac{b}{2a}$)
- Si $a < 0$, la parabole C_f est « tournée vers le bas ». (le sommet S de la courbe correspond au point le plus « haut », l'ordonnée de S correspond au maximum de f atteint en $-\dfrac{b}{2a}$)

Exemple 20 :

$\boxed{f : x \longmapsto -x^2 + 3x + 1}$



$\boxed{g : x \longmapsto 2x^2 - x - 2}$

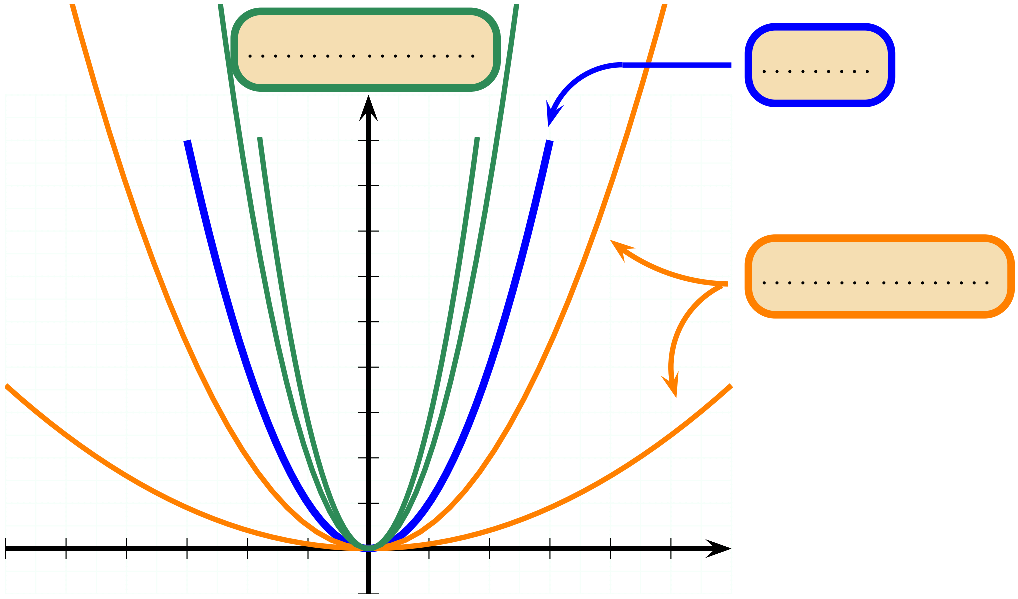


II.4 Des cas particuliers

II.4.1 $x \mapsto ax^2$ où a est un réel non nul

Traiter l'activité 1 page 78.

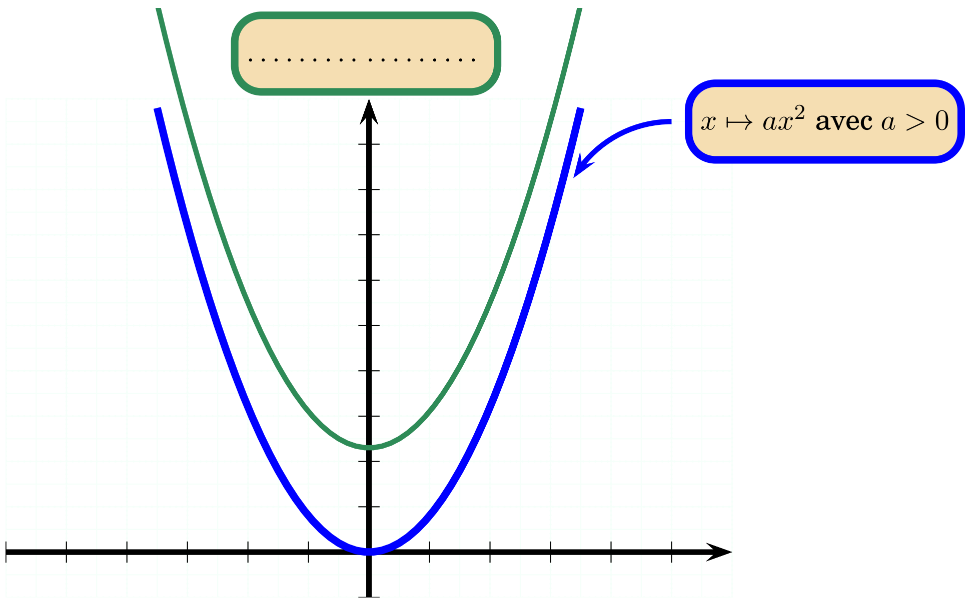
Résultats



Remarque 5 Soit $a > 0$. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -ax^2$ est la symétrique de la courbe de la fonction $x \mapsto ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses.

dessin

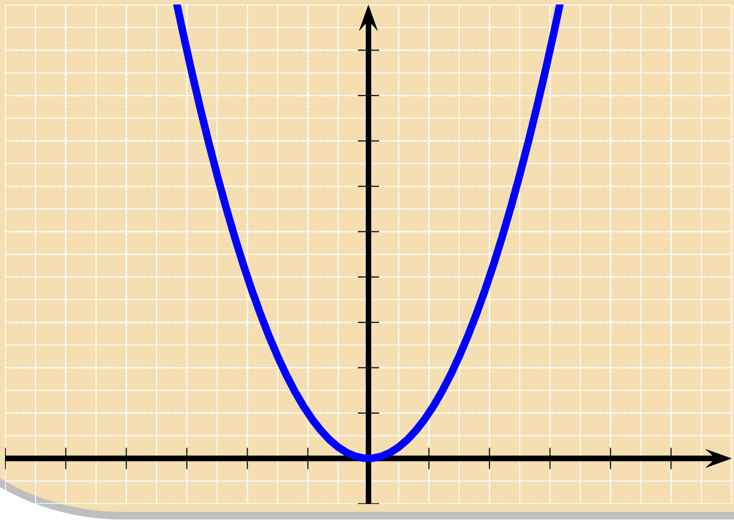
II.4.2 $x \mapsto ax^2 + b$, b nombre réel quelconque



Pour s'entraîner sur les fonctions $x \mapsto ax^2 + b$,

A 22

À partir de la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$, donner à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 0,4x^2 + 2$.



• ○ •

II.5 Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 2

Définition

Les fonctions polynômes de degré 2, de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ peuvent s'écrire **sous une certaine condition** sous la forme

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

*Cette forme s'appelle la **forme factorisée** de f et x_1 et x_2 sont appelées les **racines** de f.*

• ○ •

Théorème

Une fonction polynôme de degré 2 peut s'écrire sous la forme factorisée si,

$$\underbrace{b^2 - 4ac}_{\dots} > 0$$

Cette quantité est notée Δ.
et dans ce cas,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Remarque 6 Il existe des fonctions polynômes de degré 2 qui n'ont pas de forme factorisée.
Il en existe pour lesquelles $x_1 = x_2$ et dans ce cas, $f(x) = a(x - x_1)^2$.

Point de vue graphique

Les fonctions polynômes de degré 2 « factorisables » admettent une courbe représentative (parabole) qui coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$.
Dans le cas où $x_1 = x_2$, il n'y a qu'un seul point d'intersection.

• ○ •

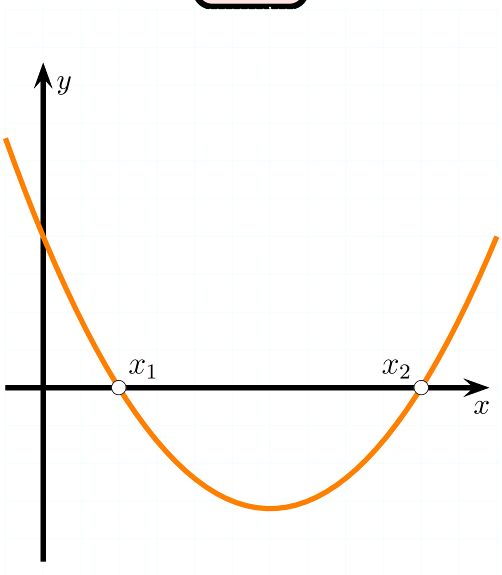
EXERCICE 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

1. Prouver que f admet une forme factorisée et la dooner.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. Réaliser le tableau de variations de la fonction f et son tableau de signes.

II.6 Signe d'une fonction polynôme du second degré

	$a > 0$	$a < 0$

Courbe



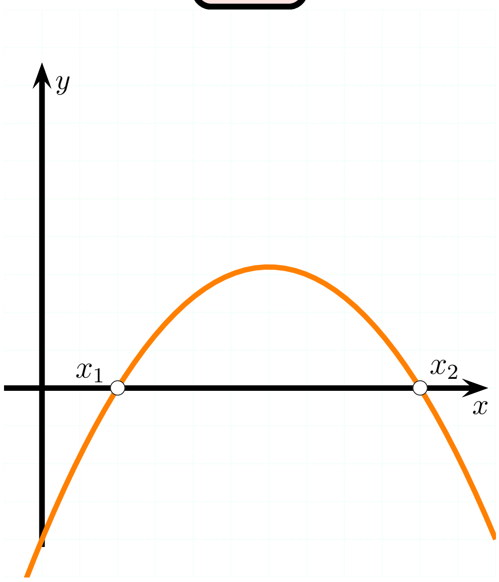


Tableau de signes

$a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• ◯ •

Exemple 21 Soit f le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$. Réaliser le tableau de signes de la fonction f et dessiner l'allure générale de la courbe.

• ◯ •

II.7 Factorisation d'une fonction polynôme connaissant une racine

Propriété

Soit f une fonction polynôme de degré 2 de forme développée $ax^2 + bx + c$ et x_0 une racine de f (c'est à dire que $f(x_0) = 0$).

La fonction f se factorise par $x - x_0$, c'est à dire que $f(x) = (x - x_0)(ax + d)$.

a est le coefficient de x^2 dans la forme développée de f et d est un coefficient à déterminer.

• ◯ •

Exemple 22 $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$. Après avoir vérifié que -1 est bien une racine de f, donner la forme factorisée de f.

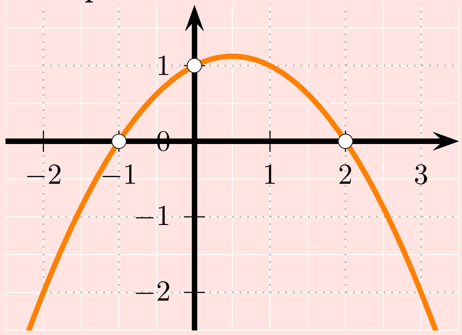
Pour s'entraîner sur les fonctions polynômes de degré 2,

A 23

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 - 3x - 18$.
  1. Calculer $g(3)$ et $g(-2)$. Qu'en déduit-on ?
  2. Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

- On considère la parabole $\mathcal{C}_h$ dans un repère.

  Déterminer la forme factorisée de h



- Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'allure de la parabole en faisant apparaître les coordonnées du sommet, puis en déduire le tableau de variations de la fonction sur $\mathbb{R}$.

  a. $f(x) = -5x^2 + 30x - 7$ b. $g(x) = 6x^2 - 18x + 1$ c. $h(x) = 0,3x^2 + 9x - 1,2$

• ○ • ○ •

III Fonction polynôme de degré 3

III.1 Définition

Définition

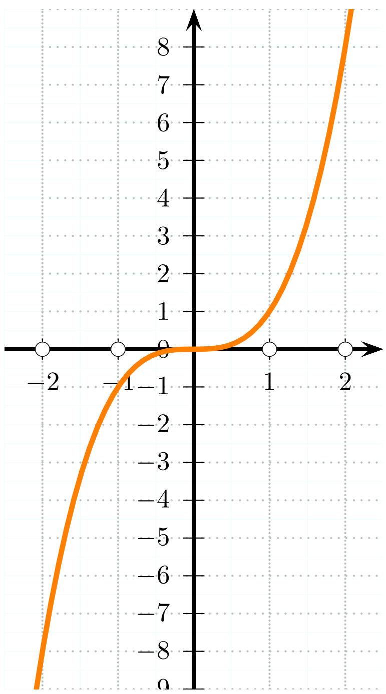
On appelle **fonction polynôme de degré 3** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a, b, c et d sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

• ○ •

Exemple 23 • La fonction $x \mapsto x^3$ est une fonction polynôme de degré 3. Quelle sont les valeurs de a, b, c et d ?



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^3$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Soit $r \in \mathbb{R}$.
L'équation $f(x) = r$ admet une solution unique.

Un théorème :

• Quelle sont les valeurs de a, b, c et d pour $g(x) = -9x^3 + \dfrac{2}{3}x^2 - 17x - 3$?

• ○ •

III.2 Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3

Définition

Les fonctions polynômes de degré 3, de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ peuvent s'écrire **sous une certaine condition** sous la forme

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

*Cette forme s'appelle la **forme factorisée** de f et x_1, x_2 et x_3 sont appelées les **racines** de f.*

• ○ •

Remarque 7 Les fonctions polynômes de degré 3 ont 1,2 ou 3 racines. Un élève de première ne doit pas savoir distinguer les différents cas.

Il en existe pour lesquelles $x_1 = x_2 = x_3$ et dans ce cas, $f(x) = a(x - x_1)^3$.

Il en existe pour lesquelles $x_2 = x_3$ et $x_1 \neq x_2$ et dans ce cas $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)^2$.

Une fonction polynôme de degré 3 admet au moins une racine. (Hors programme)

• ○ •

Point de vue graphique

Les fonctions polynômes de degré 3 qui peuvent s'écrire $a(x - x - 1)(x - x_2)(x - x_3)$ admettent une courbe représentative qui coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ et $(x_3, 0)$.

Dans le cas où $x_1 = x_2 = x_3$, il n'y a qu'un seul point d'intersection.

Dans le cas où $x_2 = x_3$ et $x_1 \neq x_2$, il y a deux points d'intersection.

• ○ •

EXERCICE 16

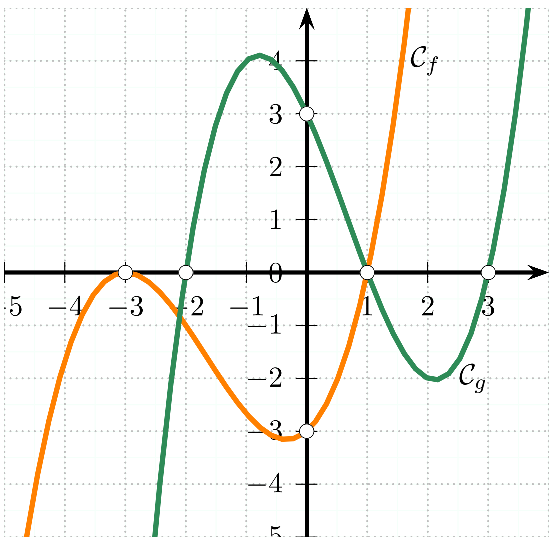
f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{5}{3}x^2 + x - 3$.

$\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Donner les racines de f.

On a également représenté $\mathcal{C}_g$ la courbe de g fonction polynôme de degré 3.

Donner la forme factorisée de g.



• ○ •

Pour s'entraîner sur les fonctions polynômes de degré 3,

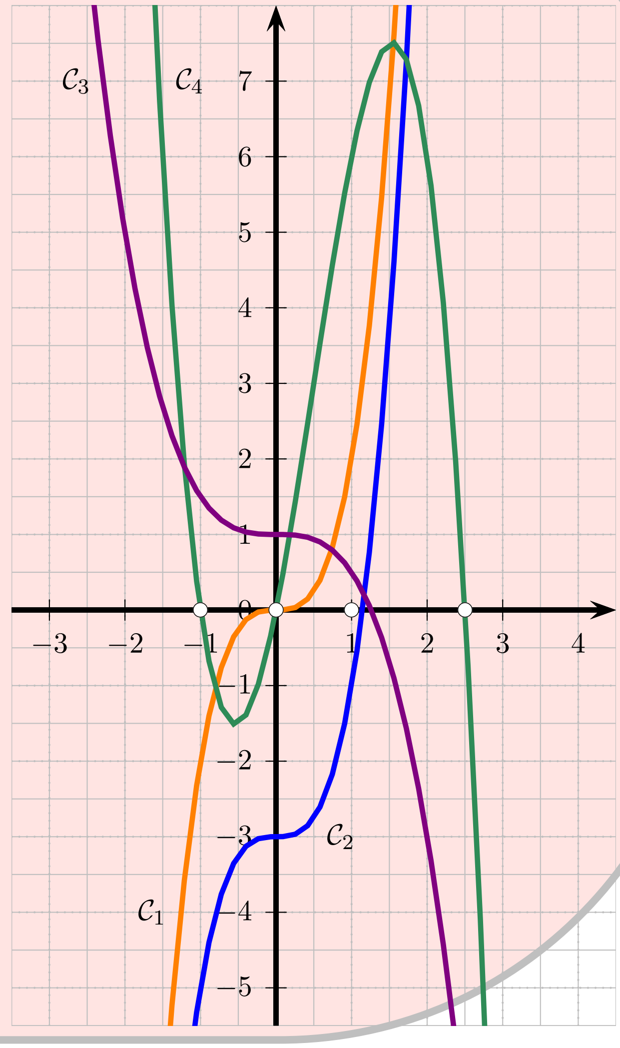
Soit les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_1(x) = 2x^3$, $f_2(x) = 2x^3 - 3$, $f_3(x) = -0,5x^3 + 1$ et $f_4(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x$

A 24

1. Déterminer graphiquement les racines de f_4. En déduire la forme factorisée de f_4.
2. Résoudre par le calcul $2x(x+1)(x-2,5) = 0$.
3. Conjecturer la solution de $2x^3 = 2$. La trouver par le calcul.
4. Résoudre graphiquement puis par le calcul, $-0,5x^3 + 1 = -3$.

• ◯ •

5. Déterminer graphiquement la ou les racines de f_1.
6. Résoudre par le calcul $f_1(x) = 2$.
7. Graphiquement, conjecturer la solution de l'équation $2x^3 - 3 = -1$. La résoudre par le calcul.
8. Résoudre par le calcul, $2x^3 - 3 = 2$. Interpréter graphiquement.



• ◯ • ◯ •

Chapitre 5

Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

Sommaire

I Acquis de seconde

I.1 Proportions

Revoir « Définition » page 8.

Traiter l'activité 1 page 124 : « Tri sélectif ».

I.2 Calcul de probabilité en situation d'équiprobabilité

Dans un situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A notée $P(A)$ est

$$P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Les cas possibles étant rassemblé dans un ensemble appelé univers et noté Ω.

On a également : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
où $A \cup B$ désigne la réunion de A et de B et $A \cap B$ l'intersection de A et de B.

EXERCICE 17 Traiter le QCM page 123.

• ○ •

Un petit retour sur les calculs de probabilités,

A 25

On arrondira les calculs, si nécessaire, à 0,01 près.
Une usine fabrique des pièces aéronautiques. Elles peuvent être en plastique ou en aluminium.
Des études statistiques menées sur un lot de 1000 de ces pièces ont donné les renseignements suivants :

- 45% de ces pièces proviennent de l'usine A ;
- 245 pièces qui proviennent de l'usine A sont en aluminium ;
- l'usine B fabrique autant de pièces en plastiques que de pièces en aluminium.

1. Compléter le tableau suivant :

	Usine A	Usine B	TOTAL
Pièces en plastique			
Pièces en aluminium			
TOTAL			

2. On prélève au hasard une pièce de ce lot. On note :
   ▷ A l'événement : « la pièce provient de l'usine A » ;
   ▷ B l'événement : « la pièce provient de l'usine B » ;
   ▷ M l'événement : « la pièce est en plastique ».

   (a) Déterminer la probabilité de l'événement A.

   (b) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$. Calculer sa probabilité.

   (c) On choisit au hasard une pièce provenant de l'usine A.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit en aluminium ?

II Fréquences conditionnelles

II.1 Revoir la notion de fréquence

Toutes les questions sont indépendantes,

1. À quel pourcentage correspond une fréquence de $\frac{5}{8}$?
2. Dans une classe de 30 élèves, la fréquence des filles est de 0,8. Quel est le nombre de filles ?
3. À l'issue de l'élection législative de 2017, un nouveau record a été battu : 227 femmes ont été élues sur 577 députés.
   Quelle est la fréquence de femmes élues ?
4. $\frac{7}{25}$ des 250 dossiers de Parcoursup ont reçu une proposition. Combien de candidats se sont vus recevoir une proposition de formation ?
5. Une piscine avec un toboggan est muni d'un feu tricolore dont voici le cycle d'allumage : 6 s pour le feu vert, 2 s pour le feu orange et 10 s pour le feu rouge.
   Calculer la fréquence de la durée du feu vert.

• ○ •

II.2 Fréquence conditionnelle

Traiter l'activité 2 page 124. *fréquences marginales, fréquences conditionnelles, tableaux croisés*

	H	F	TOTAL
Or	161	137	298
Argent	163	135	298
Bronze	194	157	351
TOTAL	518	429	947

	H..	F..	TOTAL
Or			
Argent			
Bronze			
TOTAL			

	H ..	F..	TOTAL
Or			
Argent			
Bronze			
TOTAL			

III Probabilité conditionnelle

III.1 Traiter l'activité 4 page 125

III.2 Définition

Définition

A et B désignent deux événements tels que $\mathrm{Card}(A) \neq 0$.
La probabilité de B sachant que A est réalisé, noté $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(A)} = \frac{frequence\ de\ A \cap B}{frequence\ de\ A}$$

• ○ •

Exemple 24 Dans une cave d'un particulier, on trouve des bouteilles de vin réparties comme suit :

	Bordeaux	Bourgogne	TOTAL
Blanc	5	4	
Rouge	3	7	
TOTAL			

Il choisit une bouteille au hasard parmi les « Rouge ». Quelle est la probabilité que ce soit un Bordeaux ?

• ○ •

Propriété

A et B désignent deux événements tels que $P(A) \neq 0$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

• ○ •

On s'entraîne,

A 26

- Lucie décide de faire du tri dans son garage. Elle retrouve une boîte avec 140 clous et vis. Parmi ces clous et vis, 51 sont à tête ronde, les autres sont à tête plate. Par ailleurs, il y a 85 clous dont 40% sont à tête ronde.

	A	$\overline{A}$	Total
B	51	38	89
$\overline{B}$		17	
Total		55	

  1. Compléter le tableau.
  2. Lucie choisit un objet au hasard dans la boîte. A est l'événement « elle a pris un clou » et B l'événement « elle a pris un objet à tête plate ».
     Exprimer les événements suivants à l'aide d'une phrase, puis déterminer leur probabilité : $A \cap B$, A sachant B, B sachant A.

- Deux machines A et B d'une usine fabriquent des puces électroniques. A en produit 40% ; 5% des puces fabriquées par A sont défecteuses, 2% des puces produites par B sont défectueuses.
  On prélève une puce au hasard.
  Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par A sachant qu'elle est défectueuse ?

• ○ • ○ •

Chapitre 6

Dérivation

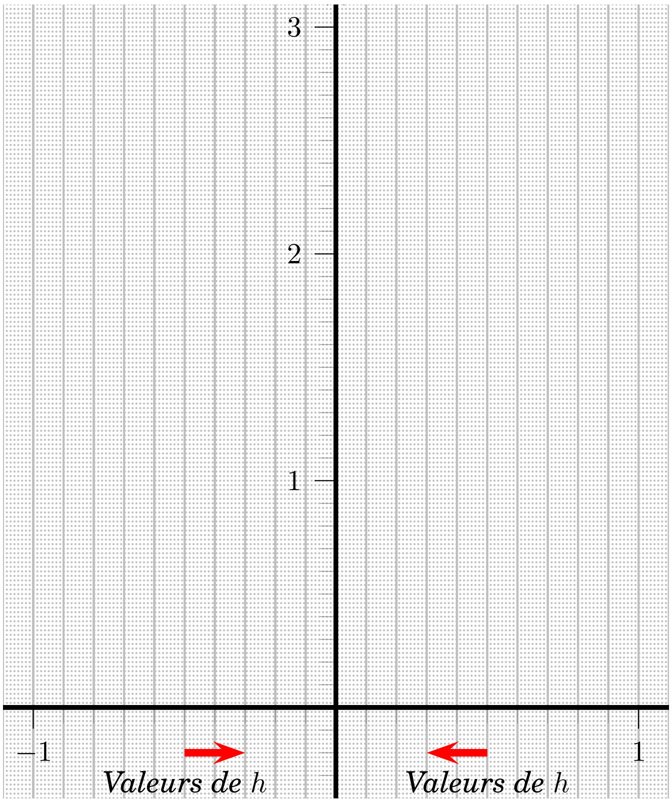
Sommaire

• ○ • ○ •

I Nombre dérivé d'une fonction en un point

I.1 Activité « tendre vers »

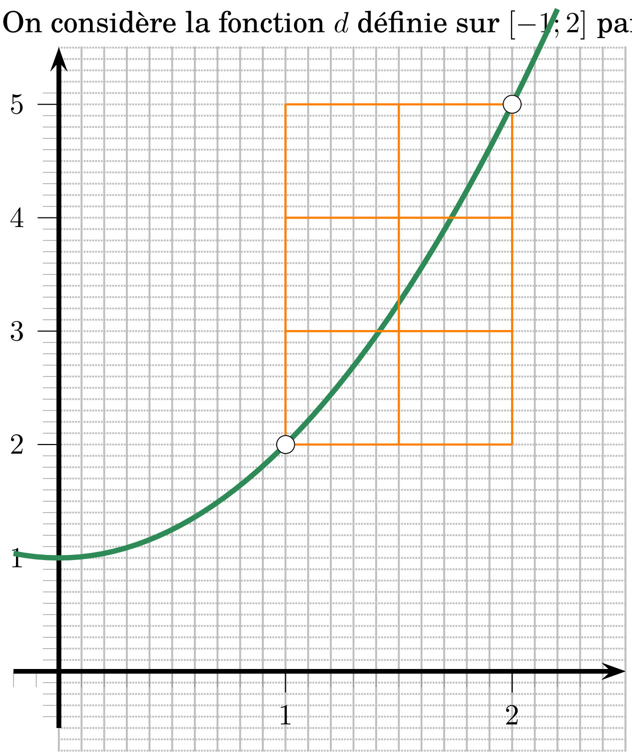
On considère la fonction t définie « autour de 0 » par $t : h \mapsto \dfrac{2h + 4h^3}{h}$.



1. Donner une explication de l'expression « autour de 0 ».
2. En utilisant votre calculatrice, réaliser un tableau de valeurs entre 1 et 0 avec un pas de $-0,1$. Placer les points de la courbe de t sur le graphique ci-contre.
3. Réaliser un autre tableau de valeurs entre 0,1 et 0 avec un pas de -0.01. Que semble indiquer ce protocole ?
4. Recopier et compléter la phrase suivante :
   « Lorsque h se rapproche de .... en étant plus .... que .... , il semble que les images obtenues par t se rapprochent de .... »
5. Mettre en place une méthode qui permet d'écrire une phrase comparable avec des valeurs de h négatives.
6. Conclusion.

I.2 Activité avec retour sur le taux de variation

On considère la fonction d définie sur $[-1; 2]$ par $d : x \mapsto x^2 + 1$.



1. Calculer le taux de variation de d entre 1 et 2. Que représente la valeur que vous trouvez ?
2. Même question entre 1 et 1,5 puis entre 1 et 1,1.
3. Réaliser un autre tableau de valeurs entre 1.1 et 1 avec un pas de -0.01. Que semble indiquer ce protocole ?
4. Recopier et compléter la phrase suivante :
   « Lorsque h se rapproche de .... en étant plus .... que .... , il semble que les images obtenues par t se rapprochent de .... »
5. Mettre en place une méthode qui permet d'écrire une phrase comparable avec des valeurs de h négatives.
6. Conclusion.

I.3 Une définition

Définition

Soit I un intervalle contenant un nombre réel a, et f une fonction $\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Soit h un nombre réel non nul tel que $a+h \in I$.
On dit que f est **dérivable** en a si, et seulement si, le taux de variation

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

tend vers un unique nombre réel ℓ lorsque h tend vers 0.

Ce nombre ℓ est appelé **nombre dérivé de la fonction** f **en** a et se note $f'(a)$.

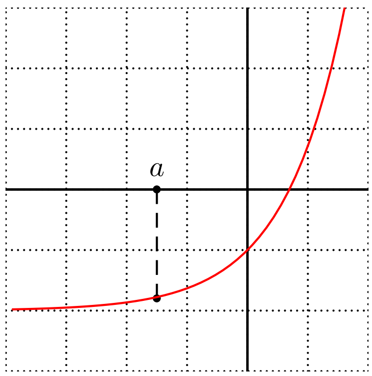
• ○ • ○ •

Exemple 25 Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 - 4x + 1 \end{array}$. Déterminer $f'(3)$.

I.4 Tangente à une courbe

I.4.1 Traiter la situation 2 de la page 102

I.4.2 Aspect graphique



Le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est la pente de la droite Δ passant par les points $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$.

Lorsque h tend vers 0, le point M se « rapproche » de A et la droite Δ devient la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse a.

• ○ • ○ •

Définition

Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $(a, f(a))$.
La **tangente à la courbe** représentative de f au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par A.

• ○ • ○ •

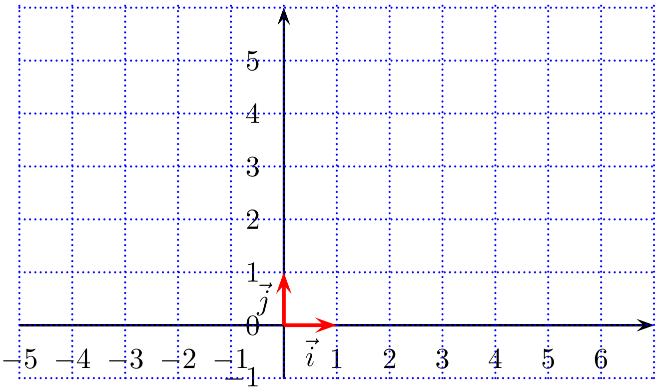
Propriété

Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $(a, f(a))$.
La **tangente à la courbe** représentative de f au point A a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

• ○ • ○ •

EXERCICE 18 :



$f : \begin{array}{ccc} [-5;1[\cup]1;7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ Construire une courbe possible pour f avec :

- ▷ $f(-3) = 3$ et $f'(-3) = -1$
- ▷ $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = 0$
- ▷ $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$
- ▷ $f(2) = 2$ et $f'(2) = -2$
- ▷ $f(5) = 1$ et $f'(5) = 0,5$

II Fonction dérivable sur un intervalle

II.1 Idée

À ce stade de la leçon, il n'est possible de calculer un nombre dérivé qu'un par un calcul de limite ou par une lecture graphique. Il serait plus aisé de disposer d'un mécanisme de calcul des nombres dérivés.
Or, qui dit **mécanisme**, dit **fonction**. On va donc accompagner, lorsque c'est possible, toute fonction d'une autre fonction qui permettra le calcul des nombres dérivés.

II.2 Définition

Définition

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I, si elle est dérivable en tout réel a de cet intervalle (c.a.d si le nombre dérivé $f'(a)$ existe).
La fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est alors appelée **la fonction dérivée** (ou **dérivée**) de f sur I.
On la note $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$.

II.3 Dérivées des fonctions usuelles

EXERCICE 19 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ Déterminer la fonction dérivée de la fonction carré.

`Aide : Essayer d'exprimer` $f'(a)$ `pour tout` a `de` $\mathbb{R}$ `avec la méthode du taux de variation.`

• ◯ •

Théorème

- La fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel
$$f'(x) = 2x$$
- La fonction cube $g : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel
$$g'(x) = 3x^2$$

• ◯ •

II.4 Dérivées et opérations

Propriétés

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel.

- La fonction $k \times f$ est dérivable sur I et, pour tout x réel de I,

$$(k \times f)'(x) = k \times f'(x)$$

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et, pour tout x réel de I,

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

• ◯ •

Exemple 26 Donner l'expression de la fonction dérivée de u définie sur $\mathbb{R}$ par $u : x \mapsto 3x^2$.

Dérivée de $v : x \mapsto -4x^3$ définie sur $\mathbb{R}$

Dérivée de $w : x \mapsto -2x^2 + x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

• ◯ •

A 27

Pour s'entraîner sur les calculs de dérivées,

- On considère les fonctions f, g, h et i définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :
  $f(x) = x^3+x, \quad g(x) = 7x^2, \quad h(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 4x$ et $i(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 5$

  1. Calculer les fonctions dérivées de chacune des 4 fonctions.
  2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse -2.

- On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = -3x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + 5x + 7$.

  1. Calculer la fonction dérivée de m.
  2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction m au point d'abscisse -1.

• ◯ • ◯ •

III Variations d'une fonction

La détermination des variations d'une fonction f définie sur un intervalle I est un point très important en mathématiques. Jusque là, elle passait par « l'inévitable » recherche du signe du taux de variation $\tau(a, b)$ avec $a, b \in I$. Ce nouveau chapitre donne un nouvel outil :

• ◯ • ◯ •

III.1 Signe dérivée et sens de variation d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intevalle I :

- Si la dérivée f' est nulle sur I ($f'(x) = 0, \forall x \in I$), alors f est constante sur **I** ;
- Si f' est **positive** sur I, alors f est **croissante** sur I ;
- Si f' est **négative** sur I, alors f est **décroissante** sur I ;

• ○ • ○ •

III.2 Tableau de variations, extremum

Propriété

Lorsque la fonction dérivée f' s'annule et change de signe, la fonction f atteint un extremum local (*un minimum ou un maximum*).
en d'autres termes,
Si $f'(c) = 0$ et f' change de signe « autour de » c alors $f(c)$ est un extremum de f.

• ○ •

On rassemble les eux résultats essentiels précédents dans un tableau de variations « amélioré » : on ajoute au tableau que l'on connaît une ligne pour le signe de la dérivée.

Deux situations sont possibles autour de c,

x		c	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

x		c	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

Revoir « Tableau de variations » page 20

Exemple 27 Dresser le tableau de variations de $f : x \mapsto 2x^3 - 6x$.

Aide : « Signe d'une fonction polynôme du second degré » page 20

• ○ •

S'entraîner sur l'étude de fonctions et recherche d'extremums,

A 28

- On considère la fonction f définie et dérivable sur $I = [-4; 5]$ par :

$$f(x) = x^3 + 4,5x^2 - 12x + 0,5$$

1. Étudier les variations de f sur I.
2. En déduire les extremums de f sur I.

- On considère la fonction f définie et dérivable sur $I = [-6; 6]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 16x + 7$$

1. Étudier les variations de f sur I.
2. En déduire les extremums de f sur I.

• ◯ • ◯ •

Chapitre 7

Suites arithmétiques et géométriques

Sommaire

I Retour sur les suites

Revoir « Définition » page 28.

II Suite arithmétique

II.1 Définition

Définition

Une suite est **arithmétique** si chacun de ses termes s'obtient en **ajoutant** un même nombre réel au précédent.
Ce nombre s'appelle la **raison** de la suite artihmétique.
Si (u_n) désigne cette suite et r la raison alors, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

• ○ •

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{+r} \boxed{u_1} \xrightarrow{+r} \boxed{u_2} \xrightarrow{+r} \boxed{\cdots} \xrightarrow{+r} \boxed{u_{n-1}} \xrightarrow{+r} \boxed{u_n} \xrightarrow{+r} \boxed{u_{n+1}} \longrightarrow \cdots$$

Exemple 28 La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = -350 \\ u_{n+1} = u_n + 12 \end{cases}$

Propriété

Une suite (u_n) est **arithmétique** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ **ne dépend pas** de n.

• ○ •

EXERCICE 20 La suite (w_n) définie explicitement par $w_n = 2n + 3$ est-elle arithmétique ?

Méthode,

1. On calcule trois termes consécutifs, par exemple u_0, u_1 et u_2 ;
2. Si $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$, on peut penser que la suite est arithmétique et il faut prouver que $u_{n+1} - u_n$ est constant pour tout n ;
3. Si $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite n'est pas arithmétique.

EXERCICE 21 Soit (v_n) définie par $v_n = n^2 - 3$. (v_n) est-elle arithmétique ?

II.2 Sens de variation

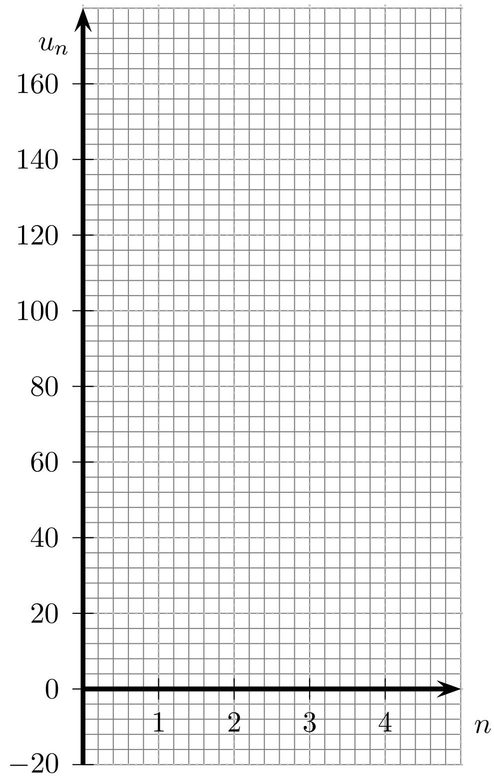
Propriété

Soit une suite (u_n) arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante ;
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante et $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

• ○ •

EXERCICE 22

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = -12 \\ u_{n+1} = u_n + 40 \end{cases}$



• ○ •

III Suite géométrique

III.1 Définition

Définition

Une suite est **géométrique** si chacun de ses termes s'obtient en **multipliant** par un même nombre réel le précédent.
Ce nombre s'appelle la **raison** de la suite géométrique.
Si (u_n) désigne cette suite et q la raison alors, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

• ○ •

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_2} \xrightarrow{\times q} \boxed{\cdots} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_{n-1}} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_n} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_{n+1}} \longrightarrow \cdots$$

Exemple 29 La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

Propriété

Une suite (u_n) est **géométrique** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (**ne dépend pas** de n).

EXERCICE 23 La suite (w_n) définie explicitement par $w_n = 3^n$ est-elle géométrique ?

Méthode,

1. On calcule trois termes consécutifs, par exemple u_0, u_1 et u_2 non nuls ;
2. Si $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1}$, on peut penser que la suite est géométrique et il faut prouver que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout n ;
3. Si $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$, la suite n'est pas géométrique.

EXERCICE 24 Soit (v_n) définie par $v_n = 20 \times 0,5^n - 4$. (v_n) est-elle géométrique ?

III.2 Sens de variation

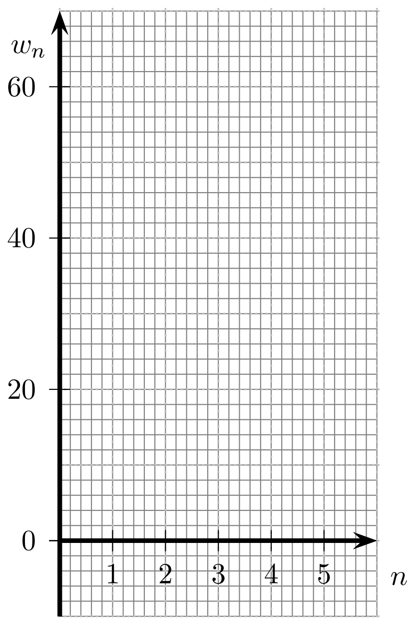
Propriété

Soit une suite (u_n) arithmétique de raison q strictement positive et de premier terme strictement positif.

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante ;
- Si $q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.

EXERCICE 25

La suite (w_n) est définie par $\begin{cases} w_0 = 1,5 \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$



- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+2)^2 + n$.

1. Calculer puis représenter u_0, u_1 et u_2. La suite semble-t-elle arithmétique ?
2. Calculer les différences $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$. En déduire que (u_n) n'est pas arithmétique.

- Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (n+3)^2$.

1. Calculer puis représenter u_0, u_1 et u_2. La suite semble-t-elle géométrique ?
2. Calculer les différences $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v_2}{v_1}$. En déduire que (u_n) n'est pas géométrique.

- Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 4n + 5$.

1. Calculer les trois premiers termres de la suite (w_n).
2. Représenter graphiquement les premiers termes de (w_n).
3. Au regard de la question précédente, la suite (w_n) semble-t-elle arithmétique ? Justifier.
4. Démontrer que (w_n) est arthmétique. Préciser sa raison et so premier terme.
5. Quel est le sens de variation de (w_n) ?

- Soit (p_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $p_1 = 7$ et $p_3 = 175$.
  Calculer q et p_0.

- Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 17$ et de raison $r = -1,5$.

A 29 1. Que vaut u à la fin de l'algorithme ci-dessous ? Que représente cette valeur ?

$u \leftarrow$ 17
Pour i allant de 1 à 10
    $u \leftarrow u - 1,5$

2. Écrire un programme en `Python` pour calculer u_{15}.

- Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = 3n - 5$.

1. On considère l'algorithme suivant :
Pour n allant de 1 à 5
    $u \leftarrow 3 * n - 5$
    Afficher u
Fin pour
Que fait cet algorithme ? Combien affiche-t-il de termes ?

2. Écrire un programme en `Python` pour afficher les seize premiers termes de la suite (t_n).
3. La suite (t_n) est-elle un suite particulière ?

◁ ○ ▷

- Soit (s_n) la suite définie par récurrence sur $\mathbb{N}$ par $r_{n+1} = 3r_n - 5$ et $r_0 = 2$.

1. On considère l'algorithme suivant :
$r \leftarrow\leftarrow$ 2
Afficher r
Pour n allant de 1 à 5
    $r \leftarrow 3 * r - 5$
    Afficher r
Fin pour
Que fait cet algorithme ?

2. Écrire un programme en `Python` pour afficher les seize premiers termes de la suite (s_n).

• ○ • ○ •

Chapitre 8

Variables aléatoires

Sommaire

I Notion de variable aléatoire

I.1 Activité

Un couple projette d'avoir 3 enfants. Le nombre de naissances par sexe en France en 2017 est donné dans le tableau suivant. On note F l'événement « l'enfant est une fille » et G « l'enfant est un garçon ».

Année	Total	Garçons	Filles
2017	730242	373716	356526

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Lorsqu'un enfant naît en France, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
2. Représenter la situation du couple par un arbre pondéré. (*définition seconde ?*)
3. On note X le nombre de filles qu'aura le couple.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
   (b) Que signifie l'événement « $X = 1$ » ? Combien de branches conduisent à ce résultat ? Calculer $P(X = 1)$ et interpréter ce résultat par une phrase.
   (c) Que signifie l'événement « $X \geqslant 2$ » ? Calculer sa probabilité.

• ○ •

éventuellement, activité 1 page 146. « Jeux : tirage dans une urne ».

I.2 Définition

Définition

On considère une expérience aléatoire avec des issues possibles (univers).
Définir une **variable aléatoire**, c'est associer à chaque issue de l'expérience un nombre réel.
On la note à l'aide d'une lettre majuscule X ou Y par exmple ou autre ...

• ○ •

`Notation :`

- $\{X = a\}$ est la notation pour l'événement « X prend la valeur a » et $P(X = a)$ est la probabilité de cet événement.
- $\{X < a\}$ est la notation pour l'événement « X prend les valeurs strictement inférieures à a » et $P(X < a)$ est la probabilité de cet événement.

Exemple 30 On lance deux fois deux suite une pièce de monnaie équilibrée. Si on obtient `Pile`, on gagne 1€, sinon on perd 1€.

On définit la variable aléatoire X qui à chaque issue du jeu (deux pièces), associe la somme gagnée ou perdue par le joueur.

On note P l'événement « on obtient Pile » et F l'événement « on obtient Face ».

$\{X \leqslant 3\} = \{P \cap P, P \cap F, F \cap P\}$.

I.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $v_1, v_2, ..., v_n$.

Définition Lorsqu'à chaque valeur v_i avec $1 \leq i \leq n$ prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'événement $(X = v_i)$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité** de la variable aléaoire X.

Remarque 8 En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées :

Valeurs de X : v_i	v_1	v_2	v_3	...	v_n
Probabilité : $p(X = v_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Exemple 31 Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.
On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

➔ Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{$...$\}$,

➔ on a défini avec X une variable aléatoire réelle telle que :
....
.

➔ La loi de X est donnée par :

v_i	-10	-6	-2	4	8	12
$p(X = v_i)$						

Remarque 9 On note que pour chacun de ces tableaux, la somme des probabilités élémentaires fait 1

• ○ •

S'entraîner sur les variables aléatoires,

Dans la station de ski où Amel est en vacances, il y a trois télésièges. Elle prend le télésiège EVEREST une fois sur deux. Elle monte dans le télésiège ACONCAGUA dans 30% des cas et elle choisit le télésiège KILIMANDJARO le reste du temps. Chaque jour Amel monte dans deux télésièges. On note T la variable aléatoire associée au temps passé par Amel dans les télésièges un jour donné.

A 30

Nom télésiège	EVEREST	ACONCAGUA	KILIMANDJARO
Durée montée en minutes	5	8	11

1. Décrire par une phrase l'événement $\{T = 10\}$. Donner les issues favorables à cet événement. *(noter E, A et K les événements prendre les télésièges ...... et dire à quelle prises de télésièges l'événement correspond)*
2. Décrire par une phrase l'événement $\{T \leqslant 16\}$. Donner les issues favorables à cet événement.
3. Déterminer la loi de T et l'espérance de T (*définition suivante*).

I.4 Espérance

Soit X une variable aléatoire de loi :

Valeurs de X : v_i	v_1	v_2	v_3	...	v_n
Probabilité : $p(X = v_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Définition

On appelle **espérance** de la variable aléatoire X **le réel** noté $E(X)$ qui vaut :

$$\boxed{E(X) = p_1v_1 + p_2v_2 + ... + p_nv_n}$$

Remarque 10 Ce nombre représente la valeur moyenne de la variable aléatoire X que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.

EXERCICE 26 Alex possède dans sa ferme 15 vaches normandes, 9 jersiaises et 6 montbéliardes. Les normandes produisent 20L de lait par jour, les jersiaises 15L et 23L pour les montbéliardes. Chaque jour, il choisit de traire au hasard deux vaches pour sa vente directe de lait. On note M la variable aléatoire égale au nombre de litres de lait que peut vendre Alex un jour donné.

1. Décrire par une phrase l'événement $\{M = 46\}$. Donner les issues favorables à cet événement.
2. Décrire par une phrase l'événement $\{M \leqslant 35\}$. Donner les issues favorables à cet événement.
3. Déterminer la loi de M et l'espérance de M .

• ○ •

II Loi de Bernoulli et simulation d'échantillons

II.1 Épreuve de Brenoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une **expérience aléatoire** n'ayant que deux issues. Une issue que l'on qualifie de « **succès** » se produisant avec la probabilité p et l'autre « d'échec » ayant une probabilité égale à $1 - p$.

• ○ •

Exemple 32 Lancer une pièce équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,5. (on a le choix du succès et de l'échec).

Tirer une boule dans une urne comportant 10 boules, 3 vertes et 7 blanches, est une épreuve de Bernoulli de succès, par exemple tirer une verte. Son paramètre est 0,3.

II.2 Loi d'une variable aléatoire associée à une loi de Bernoulli

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p et on définit une variable aléatoire X en attribuant la valeur 1 lors d'un succès et 0 lors de l'échec. La loi de probabilité associée est :

Valeurs de X : v_i	1	0
Probabilité : $p(X = v_i)$	p	$1 - p$

L'espérance est

$$E(X) = p$$

• ○ •

III Simulation, échantillons

Définition Lorsqu'on répète n fois de façon **indépendante** la **même** épreuve de Bernoulli à laquelle est associée une variable X, on obtient une série de n résultats que l'on appelle **échantillon** de taille n.

• ○ •

Exemple 33 On répète 20 fois le lancer d'une pièce et on observe le nombre de PILE obtenu. On décide que dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli, $\{X = 1\}$ correspond à PILE (succès).

On obtient, par exemple, l'échantillon

$$[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]$$

Calcul de la fréquence des PILE

Remarque 11 « L'objet » précédent entre crochets comportant 20 valeurs 0 ou 1 séparées par des virgules est constructible en algorithmique : cela s'appelle une **liste**.

```
from random import*

def piece():
    x=randint(0,1)
    return x

def echantillon(n):
    L=[]   # L est une variable de type liste initialisée vide
    for i in range(n):
        L.append(piece())     # 0 ou 1 est ajouté à la liste L
    return L
```

En saisissant `echantillon(20)` dans une console `Python`, on obtient donc une liste de 20 valeurs 0 ou 1 séparées par des virgules.

• ○ •

S'entraîner sur les échantillons,

A 31

On observe le fait d'obtenir un 6 lorsque l'on lance un dé équilibré.

1. Expliciter l'épreuve de Bernouilli étudiée dans ce contexte et donner la loi de Bernoulli associée.
2. Écrire une fonction `echantillon(n)` en langage naturel afin de déterminer la fréquence d'obtention d'un 6 sur un échantillon de n lancers.
3. On écrit le programme ci-contre en langage `Python`. À quoi sert cette fonction ?

```
from random import*

def simul(n,N):
    L=[]
    for i in range(N):
        L.append(echantillon(n))
    return L
```

Remarque 12 Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, la fréquence du succès observée sur chaque échantillon varie ; c'est ce que l'on appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.

On quantifie ces variations de la façon suivante : Si pour chaque échantillon, on calcule la fréquence et que l'on répète N fois la fabrication d'un échantillon, on obtient une série de N fréquences d'écart-type Σ (statistiques à 1 variable) et,

- environ 68% des fréquences sont dans l'intervalle $[p-\sigma ; p+\sigma]$;
- environ 95% des fréquences sont dans l'intervalle $[p-2\sigma ; p+2\sigma]$.

• ○ •

S'entraîner sur les échantillons,

A 32

On observe le fait d'obtenir un 6 lorsque l'on lance un dé équilibré.

1. Expliciter l'épreuve de Bernouilli étudiée dans ce contexte et donner la loi de Bernoulli associée.
2. Écrire une fonction `echantillon(n)` en langage naturel afin de déterminer la fréquence d'obtention d'un 6 sur un échantillon de n lancers.
3. On écrit le programme ci-contre en langage `Python`. À quoi sert cette fonction ?

```
from random import*

def simul(n,N):
    L=[]
    for i in range(N):
        L.append(echantillon(n))
    return L
```

• ○ •

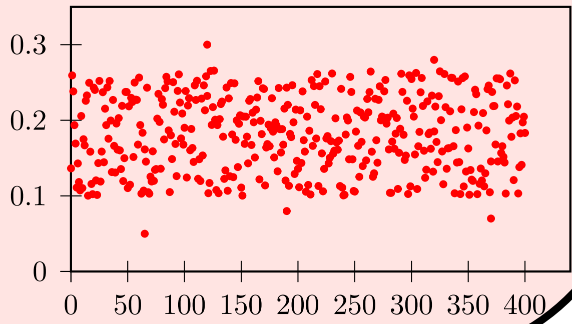
S'entraîner sur les échantillons,

A 33

On observe le fait d'obtenir un 6 lorsque l'on lance un dé équilibré.
On simule 400 échantillons de taille 100. On obtient le nuage de points ci-contre.

De plus, le calcul de l'écart-type donne le résultat suivant : $\sigma \approx 0,037$. On note p la probabilité d'obtenir 6.

1. Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à σ de p.
2. Déterminer le pourcentage des fréquences à une distance inférieure à 2σ de p.
3. Peut-on dire qu'il est fréquent d'obtenir moins de 10% de 6 ?



Chapitre 9

Algorithmique

Sommaire

• ○ • ○ •

Chapitre identique à celui de la spécialité mathématiques en première

I Types de variables

Définition Dans un algorithme ou un programme, les variables considérées ont des **types** qui définissent la nature des valeurs qu'elles peuvent prendre. Les trois types principaux considérés en classe de Seconde sont :
- les **entiers** *quand les valeurs possibles de la variable sont des entiers.*
- les **flottants** *quand les valeurs possibles de la variable sont des réels.*
- les **chaînes de caractères** *quand les valeurs possibles de la variable sont des « mots ».*

• ◯ • ◯ •

Exemple 34 On doit écrire un programme effectuant des statistiques sur des équipes sportives. Dans ce programme, il y aura en particulier trois variables : `nom` qui correspond au nom de l'équipe, `effectif` qui correspond à son effectif et `moyenne_age` qui correspond à sa moyenne d'âge. Les valeurs possibles prises par :
- `nom` sont des « mots » : elle est donc de type chaîne de caractères ;
- `effectif` sont des nombres entiers : elle est donc de type entier ;
- `moyenne_age` sont des nombres réels : elle est donc de type flottant.

Remarque 13 Lorsque le langage choisi est `Python`,

▷ le type chaîne de caractères se nomme `str` (*pour string)* ;
▷ le type entier se nomme `int` (*pour integer)* ;
▷ le type flottant se nomme `float` (*pour floating-point)* ;
D'autres types existent et seront vus cette année, le type **booléen** et le type **liste**.

• ◯ • ◯ •

A 34 Ce qui suit est à saisir dans un « interpréteur » `Python`. Compléter les pointillés

```
>>> type(3)
.........
>>> type(3.02)
.........
```

```
>>> type('bonjour')
.........
>>> type(6.0)
.........
```

II Affectation

Définition **Affecter** une valeur, c'est « réserver » une place dans la mémoire d'une machine pour cette valeur et donner cette valeur à un objet appelé **variable**.

• ◯ • ◯ •

Remarque 14 En langage naturel, on écrit par exemple « a reçoit la valeur 2 », de la façon suivante « a ← 2 ».

Si l'on écrit en langage naturel « a ← a+1 », vers quelle valeur la variable a pointera-t-elle ?

EXERCICE 27 Comment s'écrivent les deux instructions « a ← 2 » et « a ← a+1 » en `Python` ?

• ◯ • ◯ •

A 35 Ce qui suit est à saisir dans un « interpréteur » Python. Compléter les pointillés

```
>>> a=3
>>> a=2*a+1
>>> a
>>> .........
```

```
>>> a=5
>>> b=a+2.3
>>> type(b)
.........
```

III Fonctions

Définition Pour des raisons de lisibilité ou pour éviter des répétitions dans un programme, il peut être utile de définir une **fonction** c'est à dire un bloc d'instructions qui ne sera exécuté que s'il est appelé (éventuellement plusieurs fois).
Une fonction possède généralement des **paramètres** et retourne une **valeur de** (mais ce n'est pas systématique, par exemple si elle réalise un affichage).

• ○ • ○ •

Exemple 35 L'indice de masse corporelle (IMC) d'une personne est donnée par la formule $IMC = \frac{masse}{taille^2}$ où la masse est en kilogrammes et la taille en mètres.

A 36 La définition de la fonction en langage naturel se fait de la façon suivante :

```
fonction IMC(masse,taille)
    IMC ← masse/(taille*taille)
    return IMC
```

Écrire la définition de la fonction en Python, puis dans l'interpréteur saisir
`>>> IMC(70,1.65)`
`>>> ..................` (*compléter*)

• ○ • ○ •

A 37 Expérimenter plusieurs fois la fonction `mystere` écrite ci-dessous en Python

```
def mystere():
    return random.randint(1,6)
```

À quoi sert-elle ?

IV Instructions conditionnelles

Définition Dans un algorithme, on est parfois amené à exécuter une ou plusieurs instructions uniquement si une certaine condition est vérifiée, c'est ce que l'on appelle des **instruction conditionnelles**.
Si la condition n'est pas vérifiée, on peut soit exécuter un autre bloc d'instructions, soit ne rien faire.
Dans ces deux cas, on exécute ensuite la suite de l'algorithme.

• ○ • ○ •

A 38 On veut simuler un jeu dans lequel on lance un dé et où l'on gagne uniquement si le résultat est 6. En langage naturel,

```
x ← entier aléatoire entre 1 et 6
Si x=6
       Afficher "Gagné"
Sinon
       Afficher "Perdu"
Fin Si
Afficher "À bientôt"
```

Écrire le code ci-contre et en particulier l'instruction conditionnelle en `Python`

• ○ • ○ •

A 39 Voici une variante en `Python` de l'algorithme précédent

```
import random

x=random.randint(1,6)
if x==6:
    print("Gagné")
print("À bientôt")
```

En quoi cette version diffère-t-elle de la précédente ?

• ○ • ○ •

Remarque 15 Un nouveau type : *le type booléen*.

A 40 Ce qui suit est à saisir dans un « interpréteur » `Python`. Compléter les pointillés.

```
>>> x=6
>>> x==5
.........
>>> x==6
.........
```

La condition d'une instruction conditionnelle peut être de la forme « Si condition1 ou condition2 » ou encore « Si condition1 et condition2 »

V Boucles bornées

Définition Lorsqu'on veut exécuter un nombre déterminé de fois un même bloc d'instructions, on utilise une **boucle bornée**, aussi appelé **boucle Pour**.
Ces boucles sont munies d'une variable **compteur** que l'on peut utiliser dans les instructions.

• ○ • ○ •

Exemple 36 Il s'agit d'écrire un algorithme qui calcule et affiche les 25 premiers carrés puis, quand cela est fait, affiche `terminé`.

A 41 Voici la structure en langage naturel.

```
Pouri allant de 1 à .........
    a ← ..................
    Afficher a
Afficher "terminé"
```

Écrire le code ci-contre et en particulier la boucle Pour en `Python`

Remarque 16 La variable `i` est appelée le **compteur**.
À chaque passage dans la boucle, il est augmenté de 1, on dit qu'il est **incrémenté** de 1.

A 42

Voici en langage naturel un algorithme utilisant une boucle Pour.

```
S=0
Pour i allant de 1 à 10
     S ← S+i
Afficher S
```

Compléter le tableau suivant en faisant tourner l'algorithme « à la main ».

S											
i											

Vers quelle valeur la variable S pointe-t-elle ?
Écrire le code ci-contre et en particulier la boucle Pour en `Python`

VI Boucles non bornées

Définition Lorsqu'on veut répéter un même bloc d'instructions tant qu'une condition est vérifiée, on utilise une **boucle non bornée**, aussi appelé **boucle Tant que**.

• ○ • ○ •

Exemple 37 Il s'agit d'écrire un algorithme qui affiche la plus petite puissance de 2 supérieure strictement à 1000000.

A 43

Voici la structure en langage naturel.

```
p ← 1
Tant que p ⩽ 1000000
     p=p*2
Afficher p
```

À quoi sert la première affectation « p ← 1 » ?

p							
$p \leqslant 1000000$							

Lorsque `p =` .... on sort de la boucle Tant que et on exécute la suite de l'algorithme c'est à dire ....

Écrire le code ci-contre et en particulier la boucle Tant que en `Python`

• ○ • ○ •

A 44

Voici en langage naturel un algorithme utilisant une boucle Tant que.

```
i ← 5
Tant que i ⩽ 10
     S ← 3i+5
     i ← i+1
Fin Tant que
```

1. Quelles sont les valeurs prises par x pendant l'exécution de cet algorithme ?
2. Écrire le code ci-contre en `Python`

VII Un nouvel objet : la liste

VII.1 Définition

Définition — Une **liste** est une collection écrite entre crochets, d'éléments* séparés par des virgules.
(*) *éventuellement de types différents*

• ○ • ○ •

Exemple 38

A 45 Ce qui suit est à saisir dans un « interpréteur » `Python`. Compléter les pointillés

```
>>> L=[1,5,'vacances',True,3.14]
>>> type(L)
..................
```

VII.2 Les opérations de base sur les listes

Opérations

- **L=[]** L variable de type liste qui pointe sur une liste vide ;
- **L[0]** est le premier élément de la liste, l'élément de rang 0 ;
- **len(L)** est un entier qui donne le nombre d'éléments de la liste L ou encore la longueur de la liste ;
- **L[k]** est le k+1eme élément de la liste, l'élément de rang k ;
- **L.index(élément)** donne le premier rang auquel apparaît l'élément ;
- **L.append(élément)** ajoute l'élément en fin de liste (la longueur de la liste est modifiée) ;
- **L.insert(k,élément)** insère l'élément au rang k ;
- **max(L)** donne le plus « grand » élément de la liste (lorsque cela a un sens).
- il en existe d'autres ...

• ○ • ○ •

A 46 Ce qui suit est à saisir dans un « interpréteur » `Python`. Compléter les pointillés

```
>>> L=[4,8,-7,100]
>>> L[1]
.........
>>> L.append(12)
>>> L
.........
>>> L.index(-7)
.........
>>> len(L)
.........
Écrire l'instruction qui permet
d'insérer l'élément 45 au rang 3
.........
```

VII.3 Générer une liste

VII.3.1 Par ajouts successifs avec une boucle Pour

Méthode

- On **initialise** la liste à vide ;
- On ajoute un élément à la fois avec la méthode `append` à chaque passage dans la boucle Pour.

• ○ • ○ •

Exemple 39 On souhaite construire une liste `Lp` qui contient les 20 premiers nombres pairs.

A 47 Compléter le code `Python` suivant pour y parvenir.

```
Lp=.................
for x in range(.................):
      Lp.append(.................)
print(........)
```

VII.3.2 Construction d'une liste par compréhension

→ *Ensembles d'objets mathématiques définis par compréhension.*

Voici un ensemble noté A que l'on décrit de la manière suivante

$$A = \{2i + 1 \mid i \in \mathbb{N}\}$$

qui se lit « ensemble des nombres de la forme $2i + 1$ tels que i appartiennent à $\mathbb{N}$. »

1. Écrire quelques éléments de l'ensemble A.
2. On considère l'ensemble $B = \{0; 7; 14; 21; 28; 35; \ldots\}$.
   (a) Que sous-entendent les points de suspension ?
   (b) Exprimer l'ensemble B en compréhension.
3. On note $C = \{k - 1 \mid k \in A\}$ où A est l'ensemble défini au-dessus. Décrire C.

• ○ • ○ •

Remarque 17 $B = \{0; 7; 14; 21; 28; 35; \ldots\}$ est dit défini par **extension**. Les éléments de l'ensemble sont explicitement donnés (*ou on peut les deviner s'il y en a un nombre infini*).

→ *Listes définies en compréhension.*

1. Effectuer la saisie suivante dans un interpréteur `Python`.

A 48

```
>>> [3*i for i in range(101)]
.................
```

2. En observant la liste affichée, décrire ses éléments dans le langage mathématique.
3. Donner l'ensemble des éléments de la liste en *extension* et en *compréhension*.
4. **A 49** On définit l'ensemble T de la façon suivante : $T = \left\{\frac{n(n+1)}{2} [n \in \mathbb{N}\right\}$. Écrire ue instruction permettant de construire la liste des 20 premiers éléments de T.

```
>>> .................
.................
```

5. **A 50** On définit deux listes en compréhension. Expliquer la différence entre les deux listes obtenues.

```
>>> L1=[i**2 for i in range(1,51)]
>>> L1
.................
>>> L2=[i**2 for i in range(1,51) if i**2<10**3]
>>> L2
.................
```

VII.4 Itérer sur des éléments d'une liste

A 51

Écrire et exécuter le programme suivant.

```
A=[1,11,21,31,41]
for element in A:
     print(element-1)
```

Expliquer les différentes étapes de son exécution. On pourra commencer par traduire en français `for element in A`.

• ○ • ○ •

A 52

Faire tourner « à la main » le programme suivant

```
L1=[0,1,2,3,4,5]
L2=[ ]
for i in L1:
    L2.append(i*i)
print(L2)
```

Le saisir dans une console `Python`.

• ○ • ○ •

EXERCICE 28 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$. On note `Lx` la liste `[-2.5,-2,-1,-0.5,0,1,3]`.

A 53

Construire de deux manières la liste `Ly` des images par la fonction f des éléments de liste `Lx`.

```
 en compréhension
.................
.................
.................
.................
.................
```

```
 par ajouts successifs
.................
.................
.................
.................
.................
```

Faire afficher la plus grande valeur de `Ly`.

• ○ • ○ •