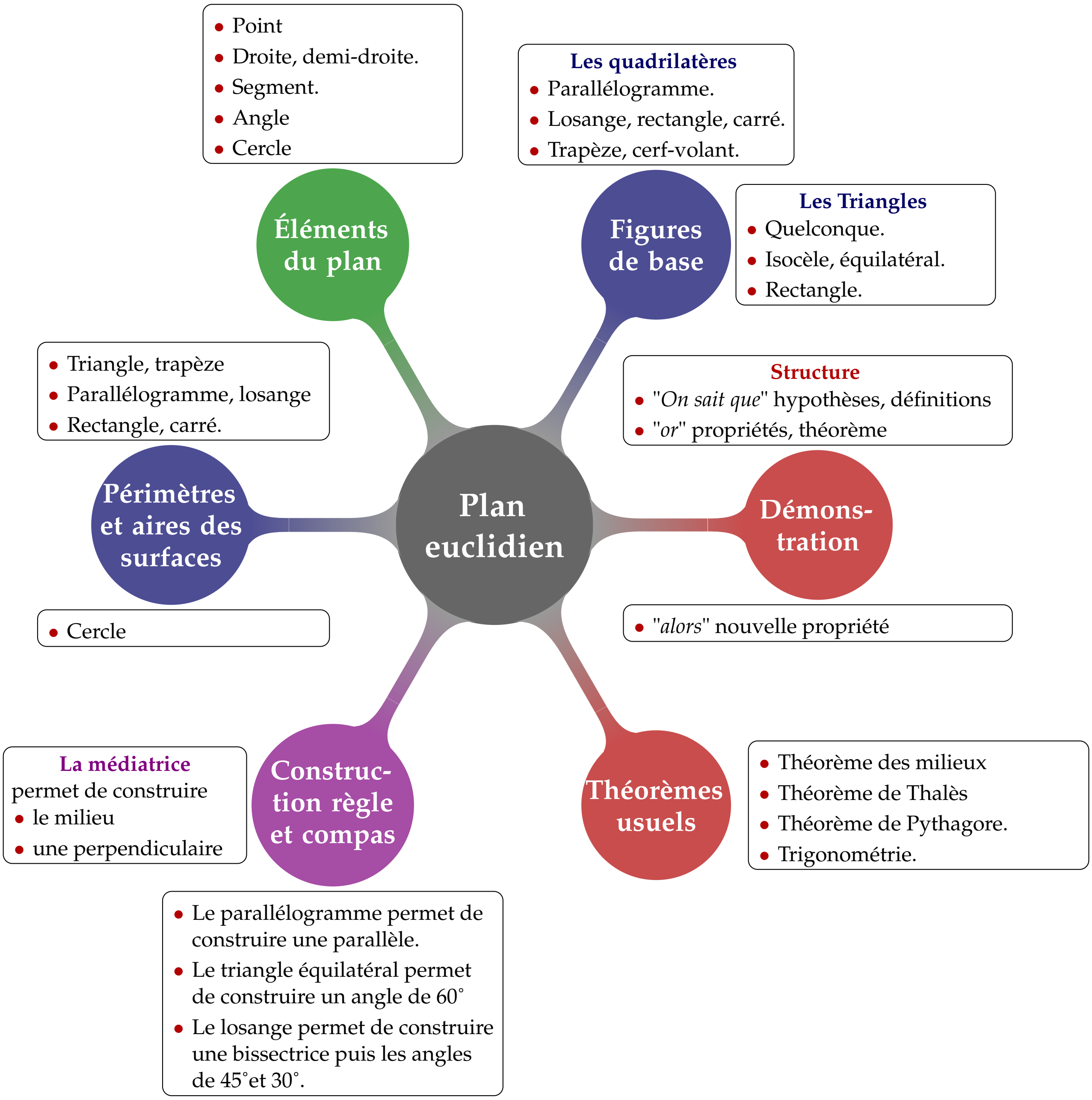
Géométrie euclidienne dans le plan



1 Éléments du plan

Point : Élément du plan qui n'a pas de partie : "on ne peut couper un point en deux". Le point n'a donc pas d'épaisseur. C'est le constituant de base du plan.
On note un point par une majuscule A,B, C, ... et l'on note souvent un point inconnue ou quelconque par M.

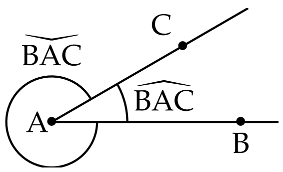
Droite : Une droite est déterminée par deux points et est illimitée à chaque extrémité.
On note une droite par :
- les deux points qui la définissent entre parenthèse : (AB).
- une majuscule entre parenthèse : (D), (Δ).
- une minuscule : d, δ.

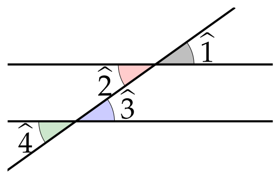
Deux droites sont **parallèles** si elles sont confondues ou n'ont aucun point commun.
Deux droites sont **sécantes** si elles ont un seul point commun.
Deux droites **perpendiculaires** ou **orthogonales** se coupent en angle droit.
Trois droites sont **concourantes** si elles sont sécantes en un point.

Demi-droite : Droite limitée à une extrémité.
Si la demi-droite est limitée par le point A, on la note [AB).
Le crochet indique que le point A est l'extrémité de la demi-droite.

Segment : Droite limitée à par deux extrémités.
On note un segment entre crochets : [AB].
Le milieu d'un segment [AB] se note : m[AB].
Si l'on se dote d'une unité de mesure, on note AB la longueur du segment [AB].

Angle : Un angle correspond à un secteur du plan délimité par deux demi-droites.
Si l'angle est délimitée par les demi-droite [AB) et [AC), on note l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.
$\widehat{\text{BAC}}$ est un angle entre 0° et 180°. On dit aussi que c'est un angle **géométrique**.
L'angle est aigu si < 90°, droit si = 90°, obtus si > 90°et plat si = 180°.





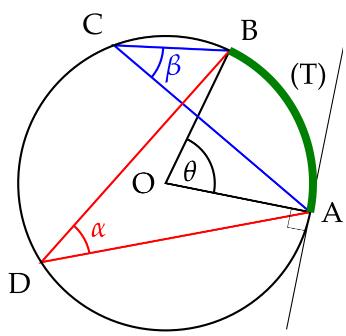
$\widehat{1} = \widehat{2}$: opposés par le sommet.
$\widehat{1} = \widehat{3}$: correspondants.
$\widehat{2} = \widehat{3}$: alternes-internes.
$\widehat{1} = \widehat{4}$: alternes externes.

Deux angles sont **complémentaires** si leur somme vaut 90°.
Deux angles sont **supplémentaires** si leur somme vaut 180°.

$\overparen{\text{BAC}}$: correspond à l'angle **rentrant** (compris entre 180° et 360°).

Cercle : Un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un centre. Un cercle $\mathscr{C}$ est alors défini par son centre et son rayon.

Dans un cercle :
- La droite qui coupe un cercle en un seul point est une tangente (T).
  Cette tangente est orthogonale au rayon.
- l'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit :
  $$\theta = 2\alpha$$
- deux angles qui intercepte le même arc sont égaux :
  $$\alpha = \beta$$



2 Figures de base

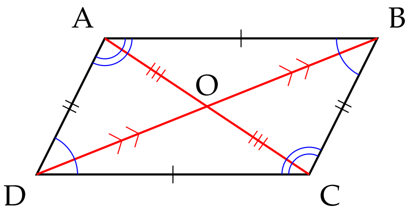
Les figures de base en géométrie euclidienne sont les quadrilatères et les triangles qui sont très riches en propriétés (parallélisme, orthogonalité, longueur, symétrie) et permettent ainsi la construction à la règle et au compas et de montrer de nouvelles propriétés.

2.1 Parallélogramme

Quadrilatère donc les côtes opposés sont deux à deux parallèles.

On peut alors en déduire les équivalences suivantes :

- les côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
- deux côtés sont parallèles et de même longueur.
- les diagonales se coupent en leur milieu.
- deux angles consécutifs sont supplémentaires.
- les angles opposés sont égaux deux à deux.



Un parallélogramme possède un centre de symétrie : son centre.

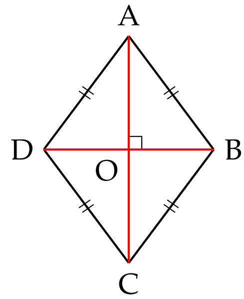
2.2 Losange, rectangle, carré

Losange : Quadrilatère dont les côtés sont de même longueur.

On peut alors en déduire les équivalences suivantes :

- parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont de même longueur.
- parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

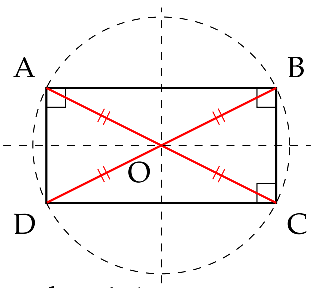
Un losange possède deux axes de symétrie : les diagonales



Rectangle : Quadrilatère possédant trois angles droits.

On peut alors en déduire les équivalences suivantes :

- parallélogramme possédant un angle droit.
- parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur.
- Parallélogramme inscriptible dans un cercle

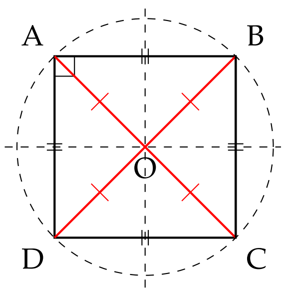


Un rectangle possède deux axes de symétrie : les médiatrices des côtés

Carré : Losange et rectangle.

On peut alors en déduire les équivalences suivantes :

- parallélogramme possédant un angle droit dont deux côtes consécutifs sont de même longueur.
- parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur se coupant perpendiculairement.

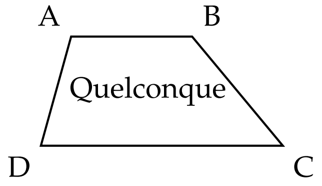


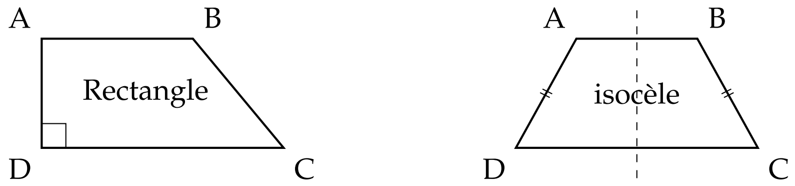
2.3 Trapèze, cerf-volant

Trapèze : Quadrilatère qui a deux côtés parallèles.

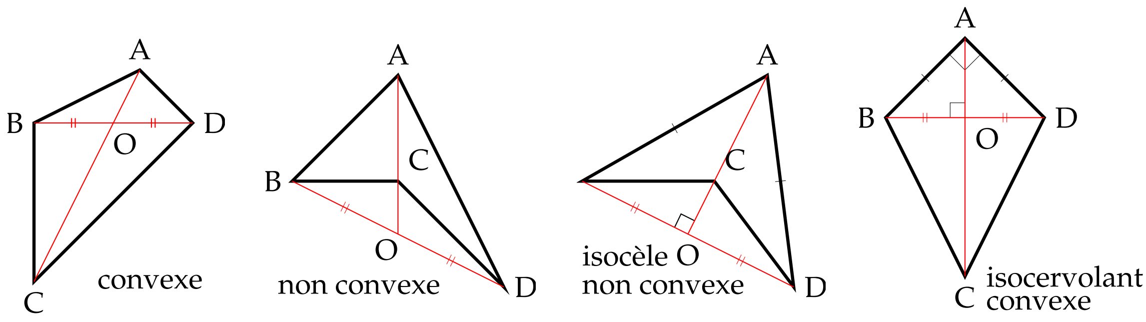
On distingue deux trapèzes particuliers :

- Le **trapèze rectangle** qui possède un angle droit.
- Le **trapèze isocèle** qui possède un axe de symétrie

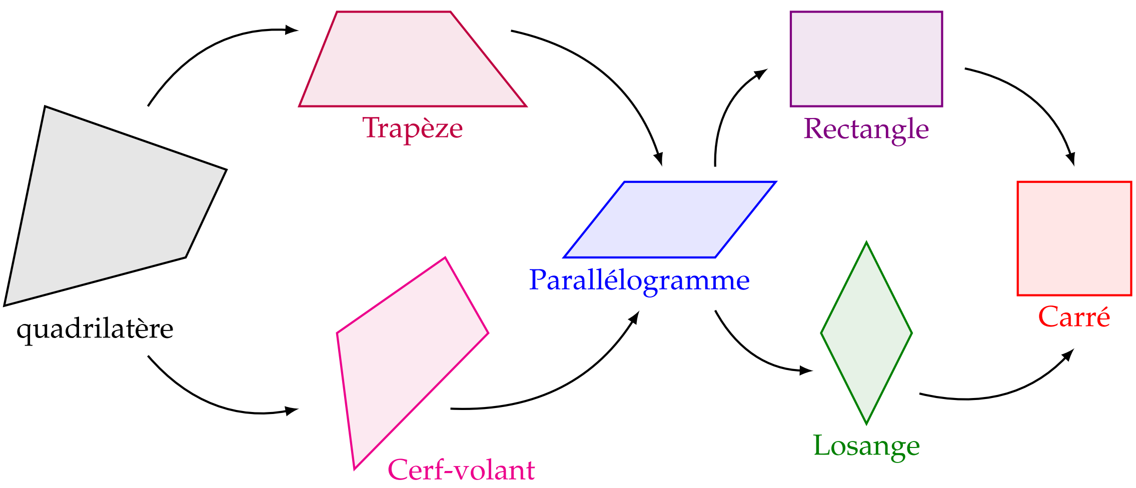




Cerf-volant : Quadrilatère dont une diagonale est coupée en son milieu par la seconde.
On distingue les cerf-volants convexes dont les diagonales sont à l'intérieur et non convexes dans le cas contraire.
On distingue aussi les cerf-volants isocèle, avec un axe de symétrie, et les isocervolant qui sont isocèles avec un angle droit sur l'axe de symétrie.



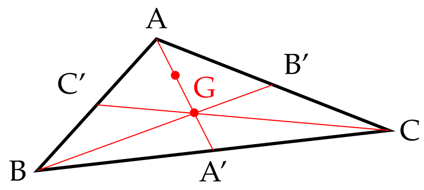
2.4 Famille des quadrilatères



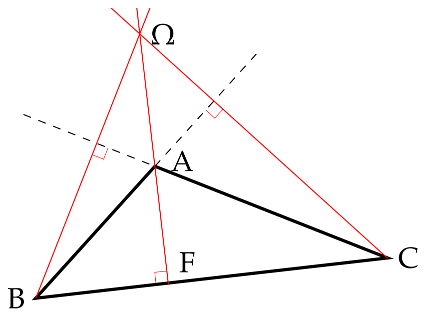
2.5 Le triangle quelconque

On distingue quatre familles de droites remarquable dans un triangle : les médianes, les hauteurs, les médiatrices et les bissectrices.

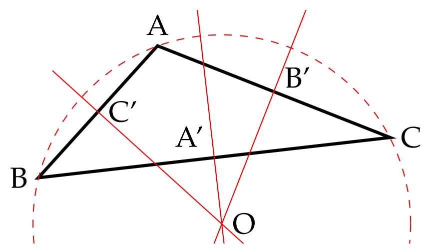
- Une **médiane** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.
- Propriété : Les trois médianes sont concourantes en G **centre de gravité**. Il est situé au deux tiers du sommet ou à un tiers de la base.



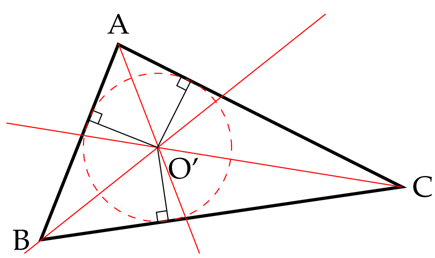
- Une **hauteur** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.
- Propriété : les trois hauteurs sont concourantes en Ω l'**orthocentre**.



- La **médiatrice** d'un segment [AB] est la droite dont les points sont équidistants des points A et B. Elle coupe alors ce segment en son milieu perpendiculairement.
- Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourante en O centre du **cercle circonscrit**.



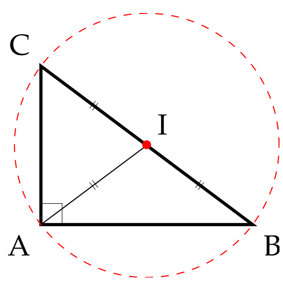
- La **bissectrice** d'un angle divise celui-ci en deux parties égales.
- Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point O′ centre du **cercle inscrit**



2.6 Les triangles rectangle, isocèle et équilatéral

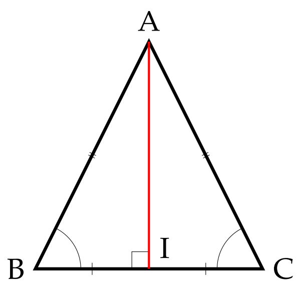
Triangle rectangle : triangle possédant un angle droit.

- Les deux autres angles sont alors complémentaires.
- Le centre du cercle circonscrit dans un triangle rectangle se trouve au milieu de l'hypoténuse.
- Réciproquement, le triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre [BC] est rectangle en A.



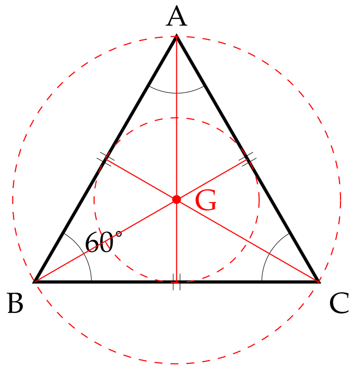
Triangle isocèle :
triangle possédant deux côtés de même longueur.

- la médiane et la hauteur issues de A, la médiatrice de [BC] et la bissectrice de $\hat{A}$ sont confondues. La hauteur issue de A coupe donc [BC] en son milieu.
- $\widehat{B} = \widehat{C}$
- (AI) est un axe de symétrie du triangle ABC.



Triangle équilatéral :
triangle possédant trois côtés de même longueur.
On dit que le triangle est régulier.

- Les angles du triangle valent à 60°.
- Les médianes, les hauteurs, les médiatrices et les bissectrices sont confondues.
- Les quatre centres sont confondus, on parle alors du centre du triangle (G).
- Trois axes et un centre de symétrie.



2.7 Polygones

Polygone : Ligne brisée fermée possédant n segments appelés côtés.

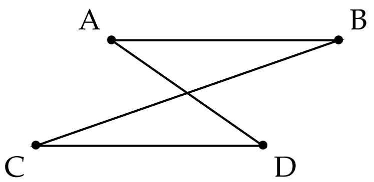
Polygone croisé : Au moins deux côtés sont sécants.

Polygone convexe : Non croisé dont tous les angles sont géométriques (< 180°)

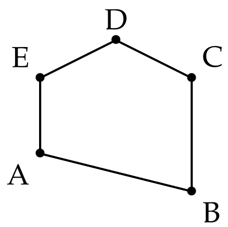
Polygone non convexe : Non croisé dont au moins un angle est supérieur à 180° (angle rentrant)

Polygone régulier Côtés de même longueur et inscriptible dans un cercle (angles égaux).

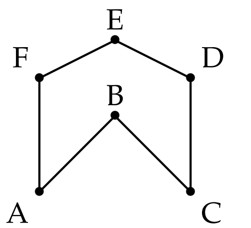
n	Nom	constructible
3	triangle	oui
4	quadrilatère	oui
5	pentagone	oui
6	hexagone	oui
7	heptagone	non
8	octogone	oui
9	enéagone	non
10	décagone	oui
11	hendécagone	non
12	dodécagone	oui



quadrilatère croisé



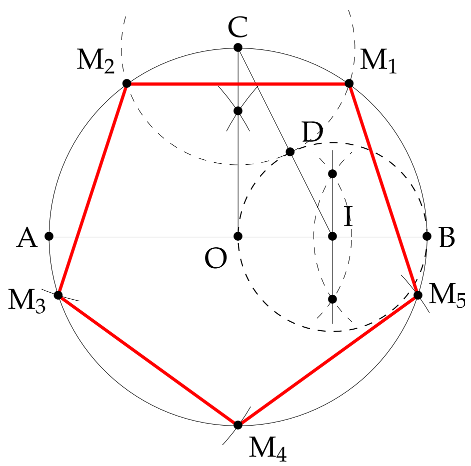
pentagone convexe



hexagone non convexe

Construction d'un pentagone régulier

- tracer un cercle $\mathscr{C}_1$ de rayon r et de centre O
- tracer deux rayons perpendiculaires [OB] et [OC].
- tracer le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre I et de diamètre [OB].
- tracer le segment [CI] ; il coupe en D le cercle $\mathscr{C}_2$
- tracer le cercle $\mathscr{C}_3$ de centre C et de rayon CD.
- le cercle $\mathscr{C}_3$ coupe le cercle $\mathscr{C}_1$ en M_1 et en M_2.
- on reporte 3 fois sur le cercle $\mathscr{C}_1$ la distance M_1M_2 alors $M_1M_2M_3M_4M_5$ est un pentagone régulier.



⚠ Cette construction peut être démontrée, en Term S, avec l'utilisation des complexes.

3 Démonstration

3.1 Structure

Euclide, pensionnaire du Muséum d'Alexandrie du troisième siècle avant notre ère, codifie la démonstration mathématique qui est toujours en usage aujourd'hui.

On sait que : hypothèses de l'énoncé, définitions, postulats.
Or : propriétés, théorème
Donc : ce que l'on veut montrer.

Hypothèses : Ce sont des données de l'énoncé, par exemple "soit un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 2AC".

Définitions : C'est l'ensemble des mots qui sont définis dans un cours de géométrie et qu'ils sont supposés connus.

Postulats : Appelé "axiome" aujourd'hui, sont des vérités premières qui ne peuvent être démontrées et qui fondent la géométrie euclidienne. Euclide en donna cinq dont le dernier est particulièrement célèbre car de nombreux mathématiciens ont essayés, sans succès, de le démontrer à partir des quatre premiers.

- Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
- Tout segment est prolongeable en une droite.
- Par deux points distincts, il passe un cercle et un seul de centre le premier point et passant par le second.
- Tous les angles droits sont égaux.
- Par un points extérieur à une droite, il passe une droite et une seule parallèle à cette droite.

Théorème, propriété : On réserve le mot théorème pour des propositions particulièrement importantes. Pour les autres propositions démontrées, on les appelle propriétés ou conséquences. Par exemple :

- Si ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (th de Pythagore).
- Si ABCD est un parallélogramme, alors les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu (propriété).

Symboles : Les symboles "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$" se traduisent par :
$A \Rightarrow B$: "Si A alors B" et $A \Leftrightarrow B$: "A si, et seulement si, B".

3.2 Exemples

Soit A, B, C, D, E et F six points tels que ABCD et AECF soient des parallélogrammes. Démontrer que le quadrilatère EBFD est un parallélogramme.

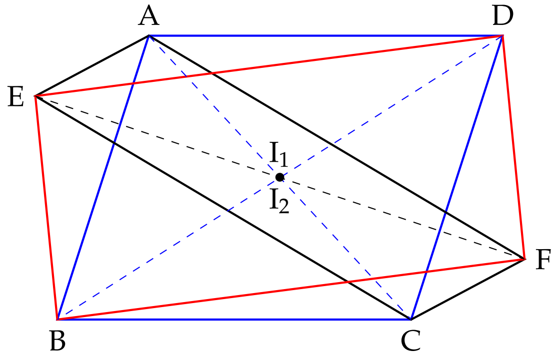
- On traduit d'abord l'énoncé à l'aide d'une figure la plus générale possible. On veillera donc qu'elle ne soit pas un cas particulier, par exemple pour ABCD parallélogramme ne pas tracer un rectangle. Ce n'est pas toujours immédiat et il faut parfois se reprendre à plusieurs fois.

  On trace un parallélogramme ABCD, on place le point E, puis on détermine F tel que AECF soit un parallélogramme.

- Soit I_1 le centre de ABCD. Comme ABCD est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu donc I_1 est le milieu de [AC] et [BD].

  Soit I_2 le centre de AECF. Comme AECF est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu donc I_2 est le milieu de [AC] et [EF].

  Comme I_1 et I_2 sont le milieu de [AC], on en déduit que $I_1 = I_2$.



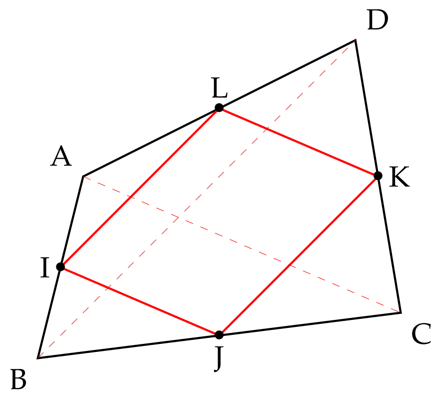
- Comme $I_1 = I_2$ alors [BD] et [EF] ont le même milieu. Les diagonales de EBFD se coupent en leur milieu donc EBFD est un parallélogramme.

Quadrilatère de Varignon (1654-1722)

Soit ABCD un quadrilatère.
On appelle I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?
Quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) faut-il ajouter aux points A, B, C et D pour que le quadrilatère IJKL soit un losange ? un rectangle ? un carré ?

On fait une figure en prenant bien soin de faire un quadrilatère quelconque.

- Dans le triangle ABD, on sait que I est le milieu de [AB] et L le milieu de [AD], donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :
$$(IL) \mathbin{/\!/} (BD) \quad \text{et} \quad IL = \frac{1}{2}BD \quad (1)$$
- Dans le triangle BDC, on sait que J est le milieu de [BC] et K le milieu de [CD], donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :
$$(JK) \mathbin{/\!/} (BD) \quad \text{et} \quad JK = \frac{1}{2}BD \quad (2)$$



Des propriétés (1) et (2), on en déduit : $(IL) \mathbin{/\!/} (JK) \quad \text{et} \quad IL = JK$

IJKL possède deux côtés parallèles de même longueur, donc IJKL est un parallélogramme.

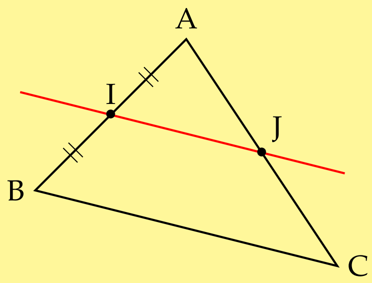
- Pour que IJKL soit un losange, il suffit que $IL = IJ$ (3).
  Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de [AB] et [BC] donc d'après la réciproque du théorème des milieux : $(IJ) \mathbin{/\!/} (AC)$ et $IJ = \frac{1}{2}AC$ (4)
  Comme $IL = \frac{1}{2}BD$ d'après (4), on doit avoir $AC = BD$
  IJKL est un losange ssi, les diagonales de ABCD sont de même longueur.
- Pour que IJKL soit un rectangle, il suffit que $(IL) \perp (IJ)$.
  D'après (1) et (4), on doit avoir $(AC) \perp (BD)$
  IJKL est un rectangle ssi, les diagonales de ABCD sont perpendiculaires.
- Pour que IJKL soit un carré, IJKL doit être un losange et un rectangle, donc ABCD doit avoir des diagonales perpendiculaires de même longueur.

4 Théorèmes usuels

4.1 Théorème des milieux

Le théorème direct
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.

$$\begin{cases} \mathrm{I} = m[\mathrm{AB}] \\ (\mathrm{IJ}) \,/\!/\, (\mathrm{BC}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{J} = m[\mathrm{AC}] \\ \mathrm{IJ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC} \end{cases}$$



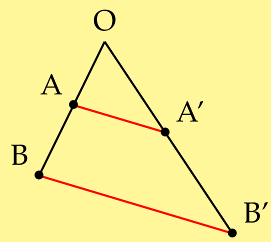
La réciproque
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième.

$$\begin{cases} \mathrm{I} = m[\mathrm{AB}] \\ \mathrm{J} = m[\mathrm{AC}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\mathrm{IJ}) \,/\!/\, (\mathrm{BC}) \\ \mathrm{IJ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC} \end{cases}$$

4.2 Théorème de Thalès

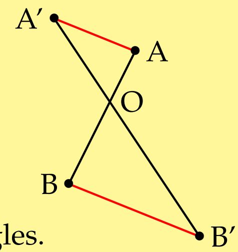
Le théorème direct
Soit deux droites (AB) et (A'B') sécante en O.

$$(\mathrm{AA'}) \,/\!/\, (\mathrm{BB'}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB'}} = \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}}$$



La réciproque
Soit O, A, B d'une part et O, A', B' d'autre part alignés dans cet ordre.

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB'}} \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{AA'}) \,/\!/\, (\mathrm{BB'})$$

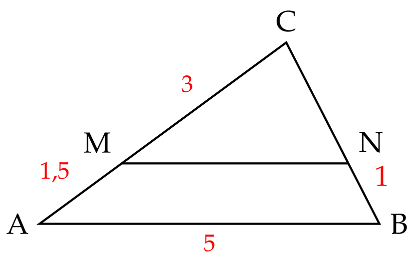


Remarques

- Le th. des milieux est un cas particulier du th. de Thalès.
- Le th. de Thalès caractérise la proportionnalité de deux triangles.
- La réciproque du th. de Thalès permet de montrer le parallélisme.

Exemples

1) Sur la figure ci-contre, (MN) // (AB).
À l'aide des indications, calculer CN et MN.



(MN) // (AB), d'après le th. de Thalès,

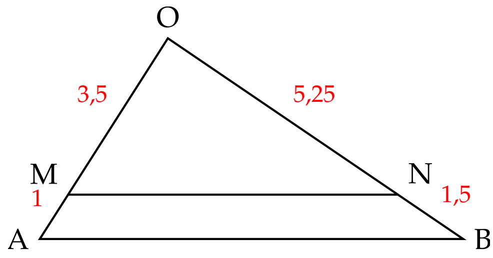
$$\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AB}}$$

On pose $x = \mathrm{CN}$,

la 1re égalité donne : $\dfrac{3}{4,5} = \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow 4.5x = 3x + 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{1,5} = 2.$

La 2e égalité donne : $\dfrac{3}{4,5} = \dfrac{\mathrm{MN}}{5} \Leftrightarrow \mathrm{MN} = \dfrac{3 \times 5}{4,5} = \dfrac{10}{3}.$

2) Montrer que (AB) et (MN) sont parallèles.



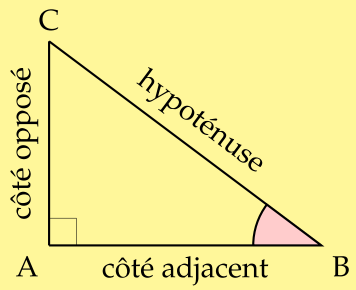
$$\text{On a :}\quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{3,5}{4,5} = \dfrac{7}{9} \\[2ex] \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{5,25}{6,75} = \dfrac{21}{27} = \dfrac{7}{9} \end{array}\right\} \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$$

d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

4.3 Théorème de Pythagore et trigonométrie

Le théorème direct
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

$$\text{ABC rectangle en A} \quad \Rightarrow \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$$



La réciproque
Dans un triangle si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \Rightarrow \quad \text{ABC rectangle en A}$$

Trigonométrie
Dans un triangle rectangle, on définit les rapports suivants :

$$\sin \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} \quad , \quad \cos \widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}} = \frac{AC}{AB}$$

Remarques :
- Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires : $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.
- D'après le th. de Pythagore, on a : $\sin^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = 1$

Tableau des lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

5 Construction à la règle et au compas

5.1 Le principe

Le principe de la construction d'une figure est de pouvoir la réaliser **uniquement à la règle non graduée et au compas** et ceci en un minimum d'étapes. Cette réalisation s'apparente donc à un algorithme.

La règle non graduée permet de tracer des droites et le compas de reporter des distances.

Les exercices de construction permettent de mettre en évidence les propriétés des figures élémentaires : médiatrice, bissectrice, triangle, parallélogramme ...

Pour écrire un programme de construction, on fera la liste des étapes nécessaires et suffisantes pour tracer une figure sans ambiguïté.

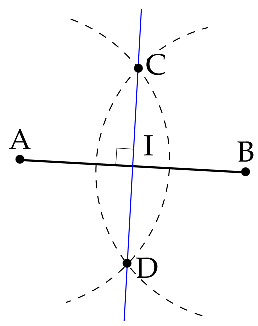
Le fait d'avoir en plus une équerre ou une règle graduée permet seulement d'aller plus vite dans la réalisation de la figure.

5.2 La médiatrice d'un segment

Définition : La médiatrice d'un segment [AB] est la droite dont les points sont équidistants des points A et B.

Propriété : Elle passe par le milieu de [AB] perpendiculairement.

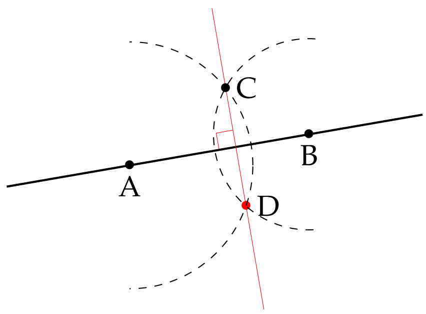
Intérêt : Permet de déterminer le milieu d'un segment sans utiliser une règle graduée ou de tracer une perpendiculaire à une droite donnée sans utiliser une équerre.



Pour tracer la médiatrice d'un segment [AB], on détermine les points C et D en reportant une même distance à partir de A et B à l'aide d'un compas pointant en A puis en B.

La droite (CD) coupe alors [AB] orthogonalement en I milieu de [AB].

Utilisation : On donne trois points A, B et C non alignés, tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par un point C.



On reporte la distance AC et la distance BC à partir respectivement de A et B. On obtient ainsi un point D. Comme A et B sont équidistants de C et D, la droite (AB) est la médiatrice de [CD] et donc (AB)$\perp$(CD)

Remarque : ACBD forme un cerf-volant isocèle car [CD] est coupé en son milieu par (AB) qui est axe de symétrie de ACBD.

5.3 Le parallélogramme

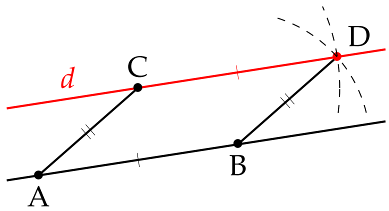
Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

Propriété : Quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux de même longueur.

Intérêt : Permet donc de tracer une droite parallèle à une droite donnée.

Utilisation : On donne trois points A, B et C non alignés. Tracer la droite d parallèle à la droite (AB) passant par C.

On trace le point D tel que ABDC soit un parallélogramme. On reporte donc la distance AC à partir de B et la distance AB à partir de C. On obtient ainsi le point D. La droite d est la droite (CD).



5.4 Le losange ou le cerf-volant isocèle

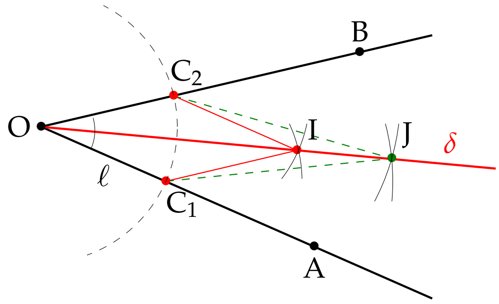
Définitions : Un losange est un quadrilatère dont les côtés ont même longueur.
Un cerf-volant isocèle est un quadrilatère qui possède un axe de symétrie.

Propriété : Quadrilatères dont les diagonales sont orthogonales dont au moins une est la bissectrice des angles formés par ses côtés adjacent.

Intérêt : Permet donc de tracer la bissectrice d'un angle donné ou une perpendiculaire à une droite donnée.

Utilisation : On donne les demi-droites [OA) et [OB), tracer la bissectrice δ de l'angle $\widehat{AOB}$.

On reporte, à l'aide d'un compas, à partir de O une longueur quelconque ℓ sur les demi-droites [OA) et [OB). On obtient les points C_1 et C_2, puis, on reporte à partir de C_1 et C_2 cette même longueur ℓ formant le losange OC_1IC_2. La bissectrice δ est alors la droite (OI).
On pourrait à partir des points des points C_1 et C_2 reporter une même longueur différente de ℓ formant alors le cerf volant isocèle OC_1JC_2. La bissectrice δ est alors la droite (OJ).



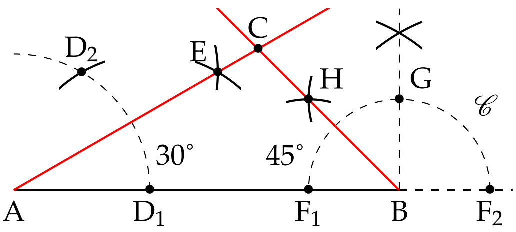
5.5 Triangle équilatéral, carré

Propriétés : Un triangle équilatéral possède des angles de 60°et les hauteurs forme les bissectrices des angles. Les diagonales d'un carré définissent un angle de 45°.

Intérêt : Permet donc de tracer des angles de 60°, 30° et 45°.

Utilisation : On donne le segment [AB], tracer le triangle ABC tel que $\widehat{A} = 30°$ et $\widehat{B} = 45°$.

On détermine le point D_2 tel que AD_1D_2 soit un triangle équilatéral puis le point E tel que $AD_1E\,D_2$ soit un losange. La demi-droite [AE) forme un angle de 30° avec [AB].
On trace cercle $\mathscr{C}$ de centre B qui coupe [AB] en F_1 et F_2. On trace la médiatrice de $[F_1F_2]$ qui coupe le cercle $\mathscr{C}$ en G. On détermine le point H tel que $BGHF_1$ soit un carré. La demi-droite [BH) forme un angle de 45° avec [AB]. Elle coupe alors la demi-droite[AE) en C.



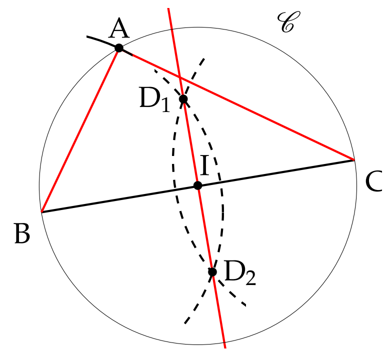
5.6 Triangle rectangle et trisection d'un segment

Propriété : Le triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre [BC] est rectangle en A. .

Intérêt : Permet donc de tracer un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse.

Utilisation : Soit deux points B et C tels que BC = 7. Déterminer le point A tel que le triangle ABC est rectangle en A et BA = 4

On trace un segment [BC] de longueur 7, on détermine son milieu I en traçant le médiatrice de [BC]. On trace ensuite le cercle $\mathscr{C}$ de centre I passant par B. On reporte la distance 4 à partir de B sur le cercle $\mathscr{C}$.

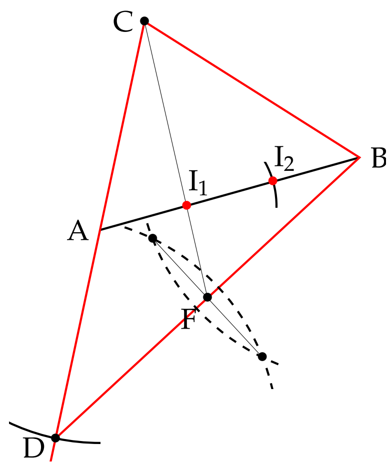


Propriété : Le centre de gravité d'un triangle se trouve sur une médiane au deux tiers du sommet et à un tiers de la base.

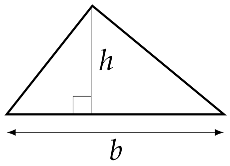
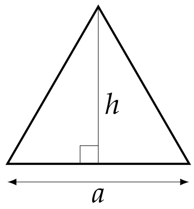
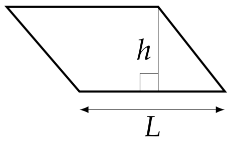
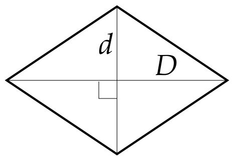
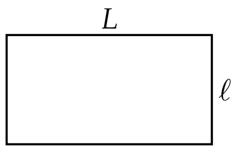
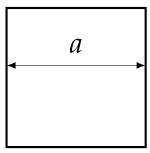
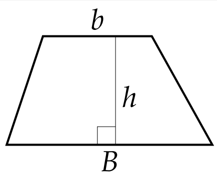
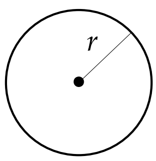
Intérêt : Permet donc de diviser un segment en trois parties égales.

Utilisation : Soit un segment [AB]. Diviser le segment [AB] en trois parties égales.

[AB] doit être une médiane d'un triangle. Soit C un point quelconque, on trace la droite (CA) et l'on reporte à partir de A la distance AC. On obtient le point D. On détermine le milieu F du segment [DB] à l'aide de la médiatrice. On trace le segment [FC] médiane issue de C du triangle BCD. L'intersection I_1 des segment [AB] et [CF] donne le centre de gravité du triangle BCD, il situe donc au tiers du segment [AB]. On reporte la longueur AI_1 sur [AB] qui donne I_2.



6 Périmètres et aires des surface plane

Nom	Figure	Périmètre	Aire
Triangle		somme des côtés	$\dfrac{b \times h}{2}$
Triangle équilatéral		$3a$ $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$
Parallélogramme		somme des côtés	$L \times h$
Losange		somme des côtés	$\dfrac{D \times d}{2}$
Rectangle		$2(L + \ell)$	$L \times \ell$
Carré		$4a$ diagonale $= a\sqrt{2}$	a^2
Trapèze		somme des côtés	$\dfrac{(B + b) \times h}{2}$
Cercle		$2\pi \times r$	$\pi \times r^2$

Archimède (–287 ; –212) : $\pi \approx \dfrac{28}{7} \approx 3,142$

Première approximation satisfaisante, donnée par Archimède, de la constante du cercle.

Depuis l'apparition des ordinateurs les décimales de π s'enchaînent à un rythme de plus en plus rapide. Le record fut établi en 2011 par deux japonais avec plus de 10 000 milliards de décimales après 371 jours de travail.