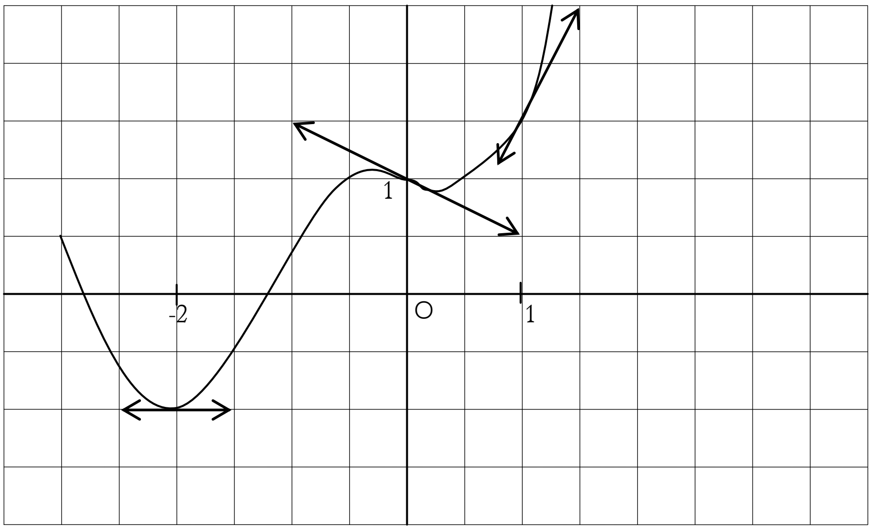
Classes de 1°S

Exercices corrigés Fonctions

1. Généralités

1-1 : Comme une interro…

1. La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-après. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. En vous servant du quadrillage, compléter les égalités suivantes :



$f(0)=$ $f(-2)=$ $f(1)=$

$f'(0)=$ $f'(-2)=$ $f'(1)=$

2. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.

A l'aide des formules de dérivation, vérifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x>0$. Préciser alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

3. f est la fonction $x \to x^3$. Montrer que l'approximation affine locale de $(2+h)^3$ au voisinage de 0 est égale à $8+12h$.

En déduire des approximations des nombres suivants : $(1,997)^3$ et $(2,001)^3$.

4. Soit f la fonction trinôme telle que $f(x)=ax^2+bx+c$. Déterminer les réels a,b,c tels que sa courbe C_f admette au point $A(1\,;3)$ une tangente de coefficient directeur égal à 1 ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

5. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes et déterminer leur sens de variation.

$f(x)=\sqrt{3}x^2+2x+3$, $\quad f(x)=\left(2x^2+x\right)\sqrt{x}$, $\quad f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$, $\quad f(x)=\dfrac{x^3-1}{3x^2+1}$, $\quad f(x)=\cos(3x)$, $f(x)=(4x+5)^6$.

6. Etudier les variations de la fonction $f: x \to 2x^4-3x^3+\dfrac{x^2}{2}+3$ sur $\mathbb{R}$ (calcul de la dérivée, étude de son signe, variations de *f*). On donnera l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1.

Correction

1. Il faut lire les coefficients directeurs sur la figure pour $f'(0)$, $f'(-2)$ et $f'(1)$:

$f(0)=1 \qquad f(-2)=-1 \qquad f(1)=\dfrac{3}{2}$

$f'(0)=-\dfrac{1}{2} \qquad f'(-2)=0 \qquad f'(1)=2$

2. On calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0=f'(0)$.

On peut calculer avec la formule du produit, mais c'est plus élégant de passer par $f(x)=x\sqrt{x}=x^1x^{1/2}=x^{3/2}$ d'où $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. La dérivée n'existe que lorsque $x\geq 0$.

3. L'approximation locale de *f* est $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h^2\varepsilon(h)$, avec ici $f'(x_0)=3x_0^2$.

On applique avec $x_0=2$: $f(2+h)=2^3+h\left(3.2^2\right)+h^2\varepsilon(h)=8+12h+h^2\varepsilon(h)$.

$(1,997)^3=(2-0,003)^3\approx 8-12.0,003=7,964$ et $(2,001)^3=(2+0,001)^3\approx 8+12.0,001=8,012$.

4. On doit avoir $f(1)=3, f'(1)=1, f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ d'où le système

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 2a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3-a-b=3-1+1=3 \\ b=-1 \\ a=-b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-x+3.$$

5. $f(x)=\sqrt{3}x^2+2x+3 \Rightarrow f'(x)=2\sqrt{3}x+2$, $2\sqrt{3}x+2>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

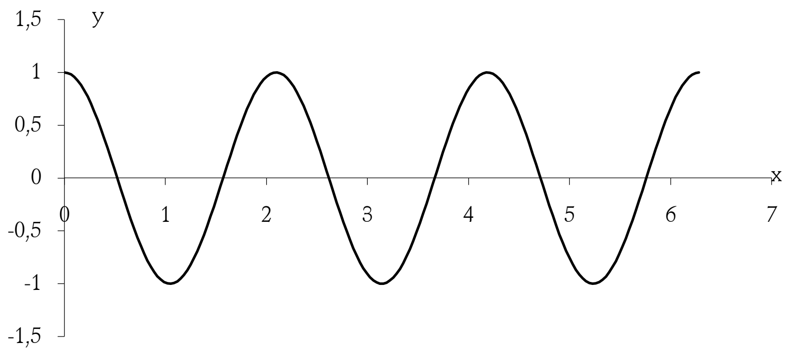
$$f(x)=\left(2x^2+x\right)\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=(4x+1)\sqrt{x}+\left(2x^2+x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{(4x+1)2x+\left(2x^2+x\right)}{2\sqrt{x}}=\frac{x(10x+3)}{2\sqrt{x}},$$

le dénominateur est positif, $x(10x+3)$ est positif à l'extérieur des racines $-\dfrac{3}{10}$ et 0 (pour 0 *f'* n'existe pas).

$f(x)=\dfrac{3}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=3\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, est positif lorsque $x<0$ (attention, f et f' pas définies en -1 et1).

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{3x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2(3x^2+1)-(x^3-1)(6x)}{(3x^2+1)^2}=3x\dfrac{3x^3+x-2x^3+2}{(3x^2+1)^2}=3x\dfrac{3x^3+x+2}{(3x^2+1)^2}$, on ne peut pas donner le sens de variation directement car on ne sait pas résoudre $3x^3+x+2>0$.

$f(x)=\cos(3x) \Rightarrow f'(x)=-3\sin(3x)$; plaçons nous sur $[0;2\pi]$, alors $\sin 3x$ s'annule pour $x=0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$ et change de signe à chaque fois.



$f(x)=(4x+5)^6 \Rightarrow f'(x)=6\times 4\times(4x+5)^5$. f' est du signe de $4x+5$, soit positive lorsque $x>-\dfrac{4}{5}$.

6. $f(x)=2x^4-3x^3+\dfrac{x^2}{2}+3 \Rightarrow f'(x)=8x^3-9x^2+x=x(8x^2-9x+1)=x(x-1)(8x-1)$.

Un tableau de signes donne f' positive sur $\left[0;\dfrac{1}{8}\right]\cup[1;+\infty[$.

Tangente à C_f au point d'abscisse -1 : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=18(x+1)+\dfrac{17}{2}=18x+\dfrac{53}{2}$.

1-2 : Lecture graphique et interprétation

La courbe (C) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $I =]1 ; +\infty[$

1. a. Lire les valeurs de $f(2)$, $f(3)$ et $f(9)$.

b. Par lecture graphique, donner une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

c. Déterminer le signe de f sur I.

2. a. Que vaut $f'(5)$? (Justifier)

b. Donner une équation de la droite (T). Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

c. Dresser le tableau de variations de f sur I.

3. f est de la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

a. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et de c.

b. Exprimer que A et B sont des points de C et qu'en S la tangente est horizontale.

c. En déduire un système d'inconnues a, b et c puis le résoudre pour trouver l'expression de $f(x)$.

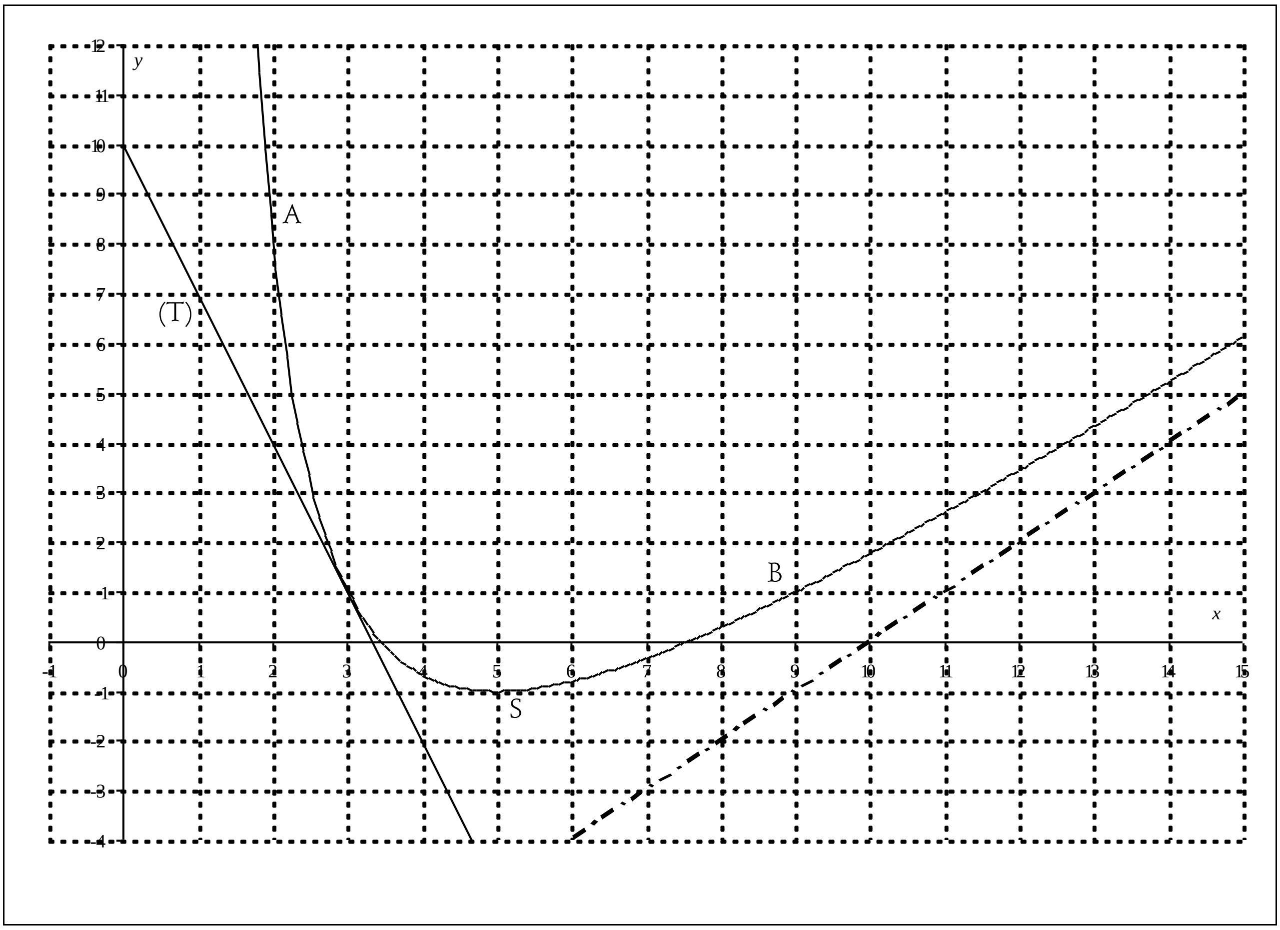
4. On admet que $f(x)=x-10+\dfrac{16}{x-1}$.

a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 10$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

b. Etudier la position de (D) par rapport à (C).

c. Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 2.

d. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$ et retrouver le résultat de la question 1. b.



Correction

1. a. $f(2) = 8$, $f(3) = 1$, $f(9) = 1$.

b. $f(x) = 0$ lorsque $x = 3{,}5$ ou $x = 7{,}5$ environ.

c. f est positive sur $[1\,;3,5]\cup[7,5\,;+\infty[$ f est positive, sur $[3,5\,;7,5]$ f est négative.

2. a. $f'(5)$ vaut 0 car la tangente à la courbe de f en 5 est horizontale.

b. (T) passe par (1 ; 7) et par (3 ; 1) d'où $\begin{vmatrix} x-3 & 1-3 \\ y-1 & 7-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x-18+2y-2=0 \Leftrightarrow y=-3x+10$. Comme (T) est tangente à la courbe au point (3 ; 1), on a $f'(3)=-3$, coefficient directeur de (T).

c.

x	1		5		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$	

3. a. $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

b. et c. $f(2)=8$ donc $2a+b+c=8$, $f(9)$ = 1 donc $9a+b+\frac{c}{8}=1$, $f'(5)=0$ donc $a-\frac{c}{16}=0$.

c. $\begin{cases}2a+b+c=8\\72a+8b+c=8\\16a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}18a+b=8\\88a+8b=8\\16a=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}18a+b=8\\11a+b=1\\16a=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-10\\c=16\end{cases}$.

4. $f(x)=x-10+\frac{16}{x-1}$.

a. $y = x - 10$ est asymptote si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-10)=0$ or $f(x)-(x-10)=\frac{16}{x-10}$ qui tend bien vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Comme x > 1, $\frac{16}{x-1}>0$ donc C est au-dessus de D.

c. $f'(x)=1-\frac{16}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(2)=1-\frac{16}{1}=-15$ et $f(2)=-8+16=8$: la tangente a pour équation $y=-15(x-2)+8=-15x+38$.

d. $f(x)=\frac{(x-10)(x-1)+16}{x-1}=\frac{x^2-11x+26}{x-1}$; $\Delta=121-104=17$, $x_1=\frac{11-\sqrt{17}}{2}\approx 3,5$ et $x_1=\frac{11+\sqrt{17}}{2}\approx 7,5$.

1-3 : Construction géométrique parabole

Avec Chamois

1. Construire une droite horizontale passant par deux points A et B ainsi que la médiatrice (d) de $[AB]$ passant par O, milieu de $[AB]$. On place un point F sur (d).

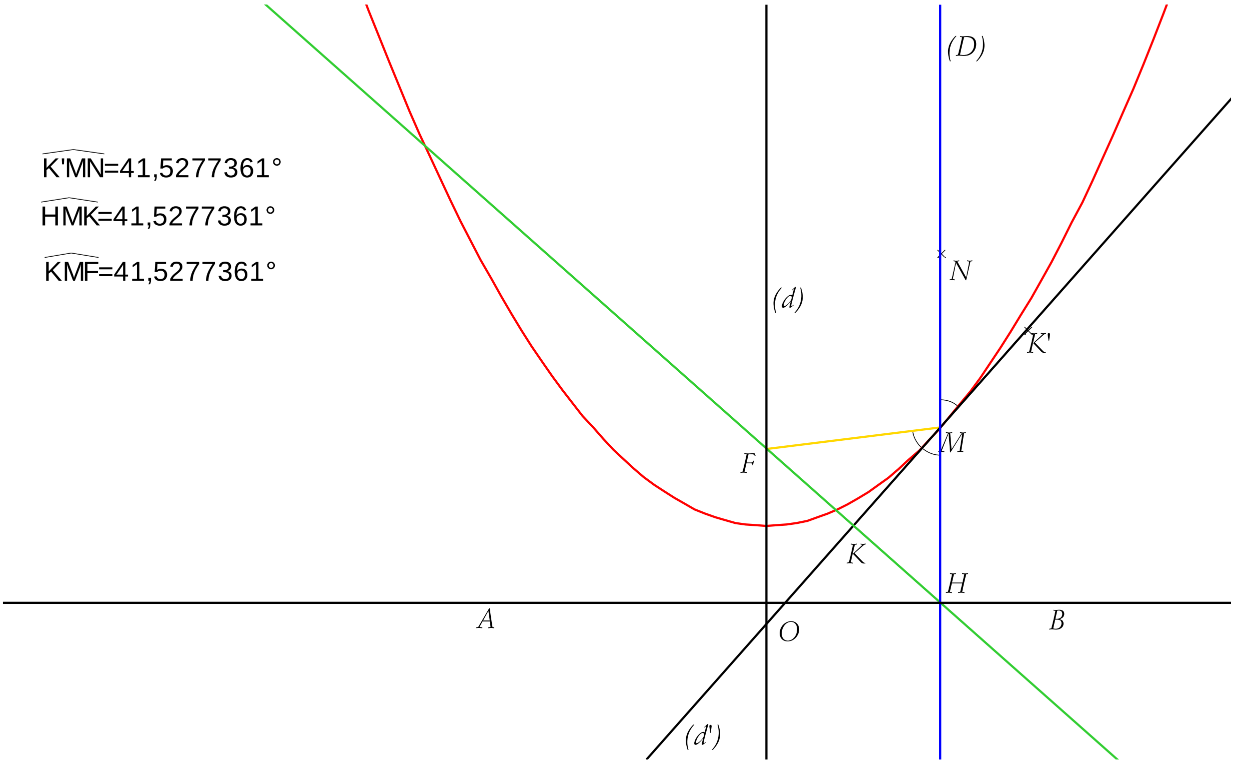
2. On prend H un point de (AB) et la perpendiculaire (D) à (AB) passant par H. Construire la droite (FH) ainsi que la médiatrice (d') de $[FH]$. Construire le point M d'intersection de (d') et (D).

3. Avec l'outil *lieu de points* construire le lieu (P) des points M quand H parcourt (AB). Que pouvez-vous dire de (d') par rapport à (P) ?

4. Soit N le symétrique de H par rapport à M, K le milieu de $[FH]$ et K' le symétrique de K par rapport à M. Mesurer les angles $\widehat{HMK}$, $\widehat{FMK}$ et $\widehat{NMK'}$. Déplacez le point H. Que constatez-vous ?

5. On considère que (P) est constitué d'une infinité de tout petits miroirs qui se confondent en chaque point M de (P) avec (d') et qu'un rayon lumineux provenant de N aboutit en M. Dans quelle direction ce rayon lumineux est-il réfléchi ? Connaissez-vous une application concrète de ce phénomène ?

<u>Correction</u>



1.&2. : voir fichier http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/1S/DM2_ex4_corrige.cha

3. (d') semble être tangente à (P).

4. Lorsqu'on déplace H on voit que les mesures des angles ne changent pas ; comme HMF est isocèle il est normal que $\widehat{HMK} = \widehat{FMK}$; par ailleurs de manière évidente $\widehat{HMK} = \widehat{NMK'}$; on conclut donc que pour toute position de H sur (AB) et donc de M sur (P) on a $\widehat{NMK'} = \widehat{FMK}$.

5. La direction du rayon lumineux réfléchi est donc toujours celle de F que l'on appelle le *foyer* de la parabole (P). Les applications de ce phénomène sont très nombreuses : miroirs « ardents », paraboles de réception d'émissions par satellite, four solaire de Font-Romeu, etc.

1-4 : Vrai/Faux sur les fonctions

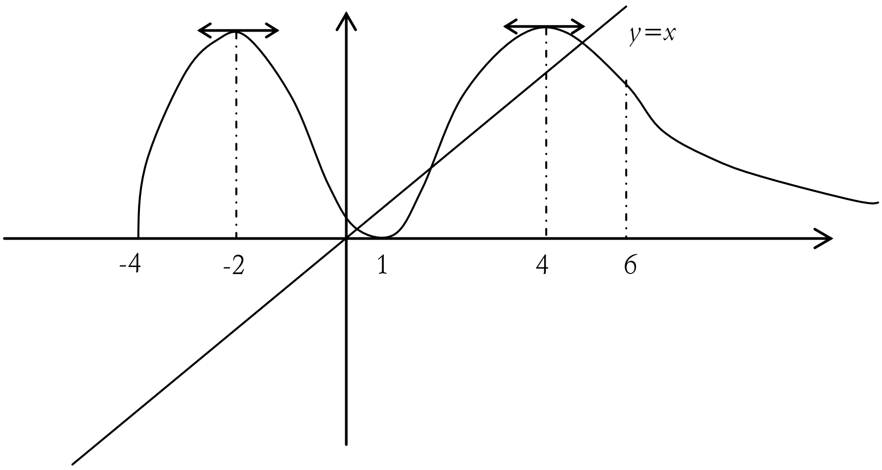
Chaque question comporte 5 réponses, chacune vraie ou fausse.

Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point, pas de réponse : 0 point.

Répondre simplement en mettant V ou F sur votre copie pour chaque question. Aucune justification n'est demandée.

Question 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-4\ ;\ +\infty[$ dont la représentation graphique est donnée ci-après :



On précise que pour tout $x \in [-4\ ;+\infty[$, $f(x) \geq 0$ et que la droite $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

a. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions sur $[-4\ ;+\infty[$.

b. f' change de signe en $x = 1$.

c. La dérivée seconde de f est positive entre -4 et -2.

d. Pour tout $a \in [0\ ;+\infty[$, l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution dans $[-4\ ;6]$.

e. Il existe deux réels a et b tels que a est différent de b et $f(a) = f(b)$.

Question 2

Soit $f(x) = x^3(1-x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Alors :

a. $f'(x) = -4x^3 + 3x$.

b. 0 est un extrémum de f sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout réel x, $f(x) \leq f\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

d. La courbe de f a une unique tangente horizontale.

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Question 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		1			3		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$		$\nearrow$	4	$\searrow$	1

a. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions.

b. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = a$ admet au moins deux solutions.

c. La courbe de f admet deux asymptotes horizontales.

d. L'équation $f'(x) = 0$ admet au moins une solution.

e. $f(-50) = 0$.

Question 4

Soit $h(x) = x - \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et (H) sa courbe représentative.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{x-1}=2$.

b. La courbe (H) est toujours en dessous de la droite ($y = x$).

c. La courbe (H) ne coupe jamais la droite ($x = 0$).

d. La dérivée seconde de f (la dérivée de la dérivée) s'annule au moins une fois.

e. La courbe (H) est en dessous de ($y = 1$) lorsque $x\in\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left]0\,;\dfrac{3}{2}\right]$.

Question 5

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative.

a. Le signe de f' est celui de x^2-x+1.

b. (C) coupe la droite ($y = 1$) en au moins un point.

c. f est toujours décroissante.

d. Il existe deux points de (C) où la tangente à (C) est parallèle à ($y = -x$).

e. (C) a un seul point d'ordonnée $2-2\sqrt{2}$.

Question 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. (C) admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote en $+\infty$.

Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Son équation est $y = x + 2$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$.

c. $f'(1) = 1$.

d. $f(1) = 1$.

e. f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

<u>Correction</u>

Question 1

a. **Faux** : L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[-4\,;+\infty[$: -4 et 1 à vue de nez. Après 3 la fonction est strictement positive, donc elle ne s'annule pas.

b. **Vrai** : f' change de signe en $x = 1$ puisque f est décroissante avant 1 puis croissante après 1.

c. **Faux** : Sur $[-4\,;6]$, $f(x) > x$ lorsque $x \in [-4\,,0]$ puis $x \in [2\,,4]$ ce n'est donc pas un intervalle.

d. **Faux** : Si a est supérieur au plus grand des deux maximums de f, l'équation $f(x) = a$ n'a pas de solution dans $[-4\,;6]$.

e. **Vrai :** Toutes les valeurs de x qui ont même image satisfont à la question. Il y en a plein.

Question 2

Soit $f(x)=x^3(1-x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Alors :

a. **Faux** : $f(x)=x^3(1-x)=-x^4+x^3\Rightarrow f'(x)=-4x^3+3x^2$

b. **Faux** : $f'(x)=-4x^3+3x^2=x^2(-4x+3)$, la dérivée s'annule bien mais elle ne change pas de signe. 0 n'est donc pas un extrémum de f sur $\mathbb{R}$.

c. **Vrai** : Lorsque $x < \frac{3}{4}$, f' est positive et f est croissante, lorsque $x > \frac{3}{4}$ f est décroissante donc on a un maximum en 3/4 et $f(x) \le f\left(\frac{3}{4}\right)$.

d. **Faux** : La courbe de *f* a deux tangentes horizontales, en 0 et en 3/4.

e. **Faux** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^4 = -\infty$.

Question 3

a. **Faux** : L'équation $f(x) = 2$ a une solution entre $-\infty$ et 1 puis en a deux entre 1 et $+\infty$, donc 3 solutions.
b. **Faux** : Lorsque $a > 1$, on a 3 solutions, pour $0<a<1$ on en a deux et pour $a<0$ on en a 1.

c. **Vrai** : La courbe de *f* a deux asymptotes horizontales : $y = 0$ et $y = 1$.

d. **Vrai** : $f'(x) = 0$ admet au moins une solution, mais on ne peuut pas dire si c'est 1 ou plus…

e. **Faux** : $f(-50)$ = n'importe quoi de positif.

Question 4

a. **Faux** : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x+1}{x} = +\infty$.

b. **Faux** : La courbe (H) est en dessous de la droite ($y = x$) lorsque $-\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

c. **Vrai** : La droite ($x = 0$) est asymptote de (H).

d. **Faux** : La dérivée seconde de *f* est $\frac{2}{x^3}$ et ne s'annule jamais.

e. **Faux** : $h(x) - 1 = x - \frac{1}{x} - 1 = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})}{x}$ qui est négatif pour

$$x \in \left]-\infty ; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left]0 ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Question 5 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$ et (C) sa courbe représentative.

a. **Vrai** : $f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1) - (x^2-2x)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^2 + 2 - 2x^3 + 4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x^2-1)^2} = 2\frac{x^2 - x + 1}{(x^2-1)^2}$.

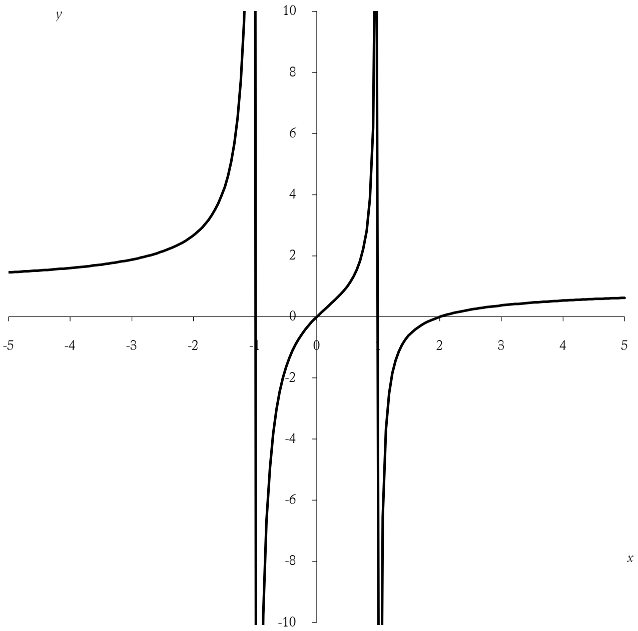
b. **Vrai** :

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-1}=1\Leftrightarrow x^2-2x=x^2-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

c. **Faux** : on a $x^2-x+1>0$ puisque son discriminant est positif.

d. **Faux** : la dérivée est toujours positive, elle ne peut valoir -1.

e. **Faux** : $2-2\sqrt{2}\approx -0,8$; la courbe montre bien qu'il y a deux points possibles.



Question 6

a. **Vrai** : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$.

b. **Faux** : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-1$.

c. **Vrai** : La tangente en 1 est $y = x + 2$ donc $f'(1) = 1$.

d. **Faux** : La tangente en 1 est $y = x + 2$ donc $f(1) = 3$.

e. **Faux** : il ne peut y avoir deux asymptotes au même endroit…

1-5 : Vrai/Faux sur les dérivées

Répondre par Vrai ou Faux et **justifier la réponse.**

1. La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f:x\mapsto(3x-7)^3$ est $3(3x-7)^2$.

2. La dérivée de $f:x\mapsto 2\sqrt{x}(x+1)$ est $f'(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

3. La fonction $f(x)=\sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

4. La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f:x\mapsto\cos 2x$ est $f'(x)=-2\sin 2x$.

5. La courbe représentant la fonction *f*, définie sur $\left[0;\frac{5\pi}{3}\right]$, par $f(x)=2+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ admet au point d'abscisse $\frac{4\pi}{3}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Correction

1. **Faux** : La dérivée de $f:x\mapsto(3x-7)^3$ est $3\times 3\times(3x-7)^2$ (utiliser la dérivée de u^n).

2. **Vrai** :La dérivée de $f:x\mapsto 2\sqrt{x}(x+1)$ est $f'(x)=2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)+\sqrt{x}\times 1\right)=2\left(\frac{x+1+2x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

3. **Faux** : La dérivée de $f(x)=\sqrt{2x+1}$ est $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$ qui n'existe pas en $-\frac{1}{2}$, par contre elle est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

4. **Vrai** : vous savez bien votre cours.

5. **Vrai** : la dérivée de f est $f'(x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ et $f'\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\pi=0$.

1-6 : Dérivées et variations

6 points

Déterminer l'ensemble de définition, calculer les fonctions dérivées, préciser le sens de variation des fonctions suivantes :

a. $f(x)=-2x^3+3x^2-1$ b. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ c. $h(x)=\dfrac{-2x+1}{4x}$

Correction

a. $f'(x)=-6x^2+6x=6x(-x+1)$; $E_f=\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	

b. $E_g=[-1;+1]$; $g'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

x	-1		0		1
$g'(x)$	$\Vert$	$+$		$-$	$\Vert$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c. $E_h=\mathbb{R}-\{0\}$; $h'(x)=\dfrac{-2(4x)-4(-2x+1)}{16x^2}=\dfrac{-4}{16x^2}$.

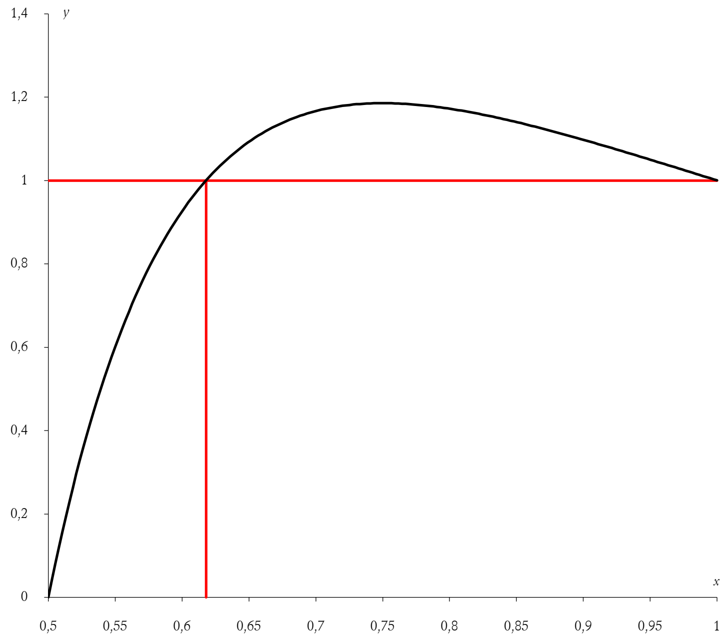
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$h(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

1-7 : Lecture graphique

Montrez à l'aide de votre calculatrice que l'équation $\dfrac{2x-1}{x^3}=1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Toute explication valable sera acceptée même si la rédaction est moche.

Correction

Traçons la courbe de la fonction $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^3}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$.



Comme on le voit la fonction prend la valeur 1 aux environs de 0,618 ; plus précisément on a

$f(0{,}618031) = 0{,}99999068$ et $f(0{,}618034) = 1{,}00000963$.

On a donc $\alpha \approx 0{,}618$.

1-8 : Tangente

1. Déterminer la tangente à la courbe (C) d'équation $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$ au point $A(-1, 0)$.

2. Montrer que cette droite est aussi tangente à (C) en un autre point que l'on précisera.

Toute explication valable sera acceptée même si la rédaction est vilaine.

<u>Correction</u>

1. On a $f'(x)=-4x^3+4x+1$ d'où $f'(-1)=1$ et $f(-1)=-1+2-1=0$; la tangente est donc $y-0=1(x+1)\Leftrightarrow y=x+1$.

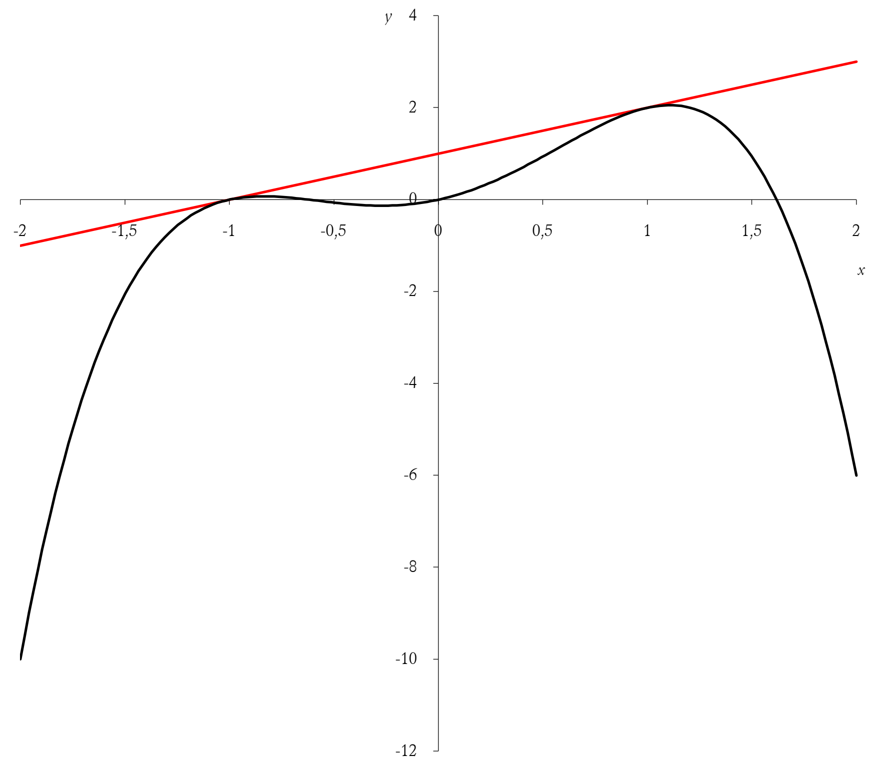
2. Traçons la fonction f ainsi que la tangente en -1 ; nous voyons alors qu'en 1 elle est tangente à f de nouveau.

On vérifie par le calcul : $f'(1)=-4+4+1=1$ et $f(1)=-1+2+1=2$ d'où la tangente en 1 a pour équation : $y-2=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+1$. C'est bien la même.

On pouvait également cherche les points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur 1 :

$f'(x)=-4x^3+4x+1=1\Leftrightarrow -4x^3+4x=0\Leftrightarrow 4x\left(-x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0,1,-1$.

Mais la tangente en 0 a pour équation $y=x$ et ne convient donc pas.



2. Polynômes

2-9 : Second degré 1 (c)

Soit les fonctions f et g définies sur R par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

1. Montrer que la courbe C_f représentative de f est l'image de la parabole P d'équation $y = x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.

2. Montrer que la courbe Γ représentative de g est l'image de la parabole P' d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.

3. Tracer les courbes C_f et Γ dans un même repère (*unité graphique : 2 cm*).

4. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de C_f et Γ, puis vérifier les résultats graphiquement.

5. Déterminer algébriquement le signe de la différence $f(x) - g(x)$. Donner une interprétation graphique de ce signe.

<u>Correction</u>

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$. La courbe C_f représentative de f est donc l'image de la parabole P d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

2. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$. La courbe Γ représentative de g est l'image de la parabole P' d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2$ par la translation de vecteur $\vec{v} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$.

3. Tracé des deux paraboles C_f et Γ.

4. Les coordonnées $\left(x;y\right)$ des points d'intersection de C_f et Γ vérifient : $\begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ x^2-2x-3=-\frac{1}{2}x^2-2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ \frac{3}{2}x^2-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ x=\pm 2 \end{cases}.$$

Les coordonnées des points d'intersection de C_f et Γ sont donc $\left(2;-3\right)$ et $\left(-2;5\right)$.

5. $f(x)-g(x)=\left(x^2-2x-3\right)-\left(-\frac{1}{2}x^2-2x+3\right)=\frac{3}{2}x^2-6$.

$\frac{3}{2}x^2-6$ est un trinôme du 2° positif à l'extérieur de ses racines –2 et 2.

Sur $\left]-\infty;-2\right[$ et sur $\left]2;+\infty\right[$, $f(x)>g(x)$ et la courbe C_f est donc au-dessus de la courbe Γ.

Sur $\left]-2;2\right[$, $f(x)<g(x)$ et la courbe Γ est donc au-dessus de la courbe C_f.

2-10 : Second degré 2 (c)

Pour Noël, les jumeaux Sophie et Robin ont reçu des jouets : Sophie, un bonhomme au bout d'un parachute et Robin un arc avec des flèches. Sophie se hâte de lancer son parachute du haut de leur immeuble. Au même moment, Robin, qui s'est installé au pied de l'immeuble, lance une flèche verticalement.

La hauteur du parachute à l'instant t (t en s) durant la descente est donnée par la fonction p définie par $p(t)=-5t+5,2$.

La hauteur de la flèche à l'instant t est donnée par la fonction f définie par $f(t)=-5t^2+10t$.

1. a. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

b. Construire la courbe P représentative de la fonction f. Vous ferez le tracé sur l'intervalle [–1 ; 3] en prenant les unités suivantes : 4 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.

2. a. A quels instants la flèche est-elle à une hauteur de 3,75 m ?

b. A quel instant la flèche retombe-t-elle sur le sol ?

3. Le drame : on suppose dans cette question que la flèche rencontre le parachute.

a. Représenter dans le même repère la fonction p.

b. Déterminer à quel instant et à quelle hauteur la flèche transperce le parachute.

Correction

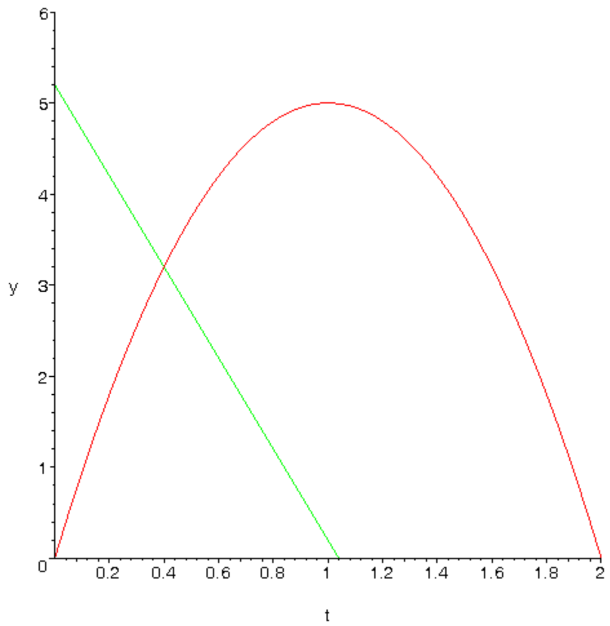
1. a. $f'(t)=-10t+10\geq 0 \Leftrightarrow t\leq 1$. Les limites sont celle de $-5t^2$, soit $-\infty$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

2. a. $f(t)=-5t^2+10t=3,75 \Leftrightarrow t^2-2t+0,75=0$, $t=0,5$ ou $t=1,5$.

b. Lorsque $f(t) = 0$, soit à $t = 2$.

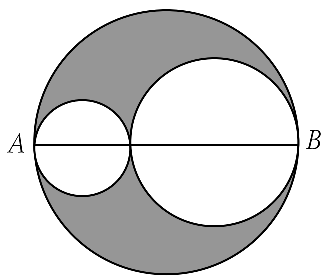
3. a.



b. $f(t)=-5t^2+10t=-5t+5,2 \Leftrightarrow -5t^2+15t-5,2=0$, soit t = 0,4 (lorsqu'elle monte) ou t = 2,6 (lorsqu'elle descend).

2-11 : Second degré 3 (c)

On considère un point M sur le diamètre $[AB]$ d'un cercle. Il détermine deux cercles de diamètre $[AM]$ et $[MB]$. On pose $AB=4$ et $AM=x$.



1. Montrer que l'aire $A(x)$ de la surface colorée est définie par : $A(x)=\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)$.

2. Déterminer la position de M pour laquelle $A(x)$ est maximale.

3. Existe-t-il une position de M pour laquelle $A(x)$ soit strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$?

4. Déterminer les positions de M pour lesquelles $A(x)$ soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$.

Correction

1. L'aire $A(x)$ de la surface colorée est définie sur $[0;4]$ par :

$$A(x)=\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{AM}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{MB}{2}\right)^2=\pi\times(2)^2-\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2=\ldots=\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right).$$

2. $A: x\to\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)=-\frac{\pi}{2}(x-2)^2+2\pi$ est une fonction du 2° qui est croissante sur $[0;2]$ et décroissante sur $[2;4]$ car le coefficient du x^2 est négatif. A admet donc un maximum en x = 2 égal à 2π. La position de M pour laquelle $A(x)$ est maximale est donc le milieu du diamètre $[AB]$.

3. $A(x)$ est strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que : $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)>\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2$; soit après calculs, $x^2-4x+4<0$.

Or $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$. Il est donc impossible de trouver une position de M vérifiant le problème.

4. $A(x)$ est inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que :

$\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)\le\frac{1}{2}\left[\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2\right]$; soit après calculs, $3x^2-12x+8\ge 0$.

Or $3x^2-12x+8$ est un trinôme du 2° positif à l'extérieur de ses racines $2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ et $2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Les positions de M vérifiant le problème sont donc telles que $x\in\left[0;2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right]\cup\left[2+\frac{2}{3}\sqrt{3};4\right]$.

2-12 : 3ème degré 3 (c)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x-1$.

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ (sens de variation et limites).

2. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 et préciser sa position relative à C_f.

3. Soit la parabole P d'équation : $y=x^2-2x+1$.

a. Préciser les éléments caractéristiques de P.

b. Vérifier que le point $A(2;\ 1)$ est un point qui appartient aux deux courbes C_f et P.

c. Etudier la position de C_f par rapport à P.

4. Tracer les courbes C_f et P dans un même repère.

Correction

1. $f: x\to x^3-3x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée : $f'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$.

a. Sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le signe de x^2-1.

b. x^2-1 est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines –1 et 1.

c. f est donc croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$, et f est décroissante sur $[-1;1]$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-3x-1=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-3x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

2. Une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est : $y=-3(x-0)-1$; soit $y=-3x-1$.

$f(x)-(-3x-1)=x^3$. Or $x^3\le 0$ sur $]-\infty;0]$ et $x^3\ge 0$ sur $[0;+\infty[$.

C_f est donc au-dessus de T_0 sur $[0;+\infty[$ et C_f est donc au-dessous de T_0 sur $]-\infty;0]$.

3. Soit la parabole $P: y=x^2-2x+1=(x-1)^2+0$.

a. P est une parabole de sommet $S(1;0)$, d'axe la droite $\Delta: x=1$ et verticale.

b. $f(2)=2^3-3\times2-1=1$ et $2^2-2\times2+1=1$. Le point $A(2;1)$ est un point des deux courbes C_f et P.

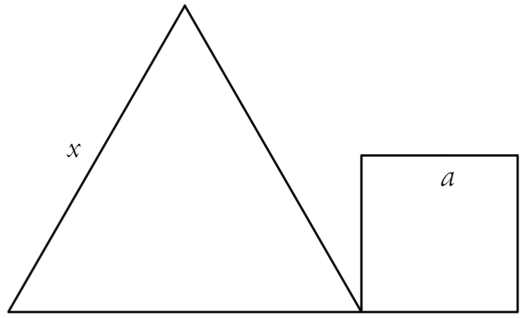
c. $f(x)-\left(x^2-2x+1\right)=x^3-x^2-x-2$. On vérifie que 2 est racine de x^3-x^2-x-2.

Après division, $x^3-x^2-x-2=(x-2)\left(x^2+x+1\right)$. Or x^2+x+1 est toujours positif car son discriminant est négatif et le coefficient de x^2 est positif. x^3-x^2-x-2 est donc du signe de $x-2$. C_f est donc au-dessus de P sur $[2;+\infty[$ et C_f est donc au-dessous de P sur $]-\infty;2]$.

4. Courbes C_f et P.

2-13 : Ficelle (c)

Avec une même ficelle de longueur 1 m, on forme un triangle équilatéral de côté x et un carré de côté a. On note s la somme des aires du triangle et du carré.



1. Montrez que $s(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{1}{16}(1-3x)^2$.

2. Pour quelle valeur de x, s est-elle minimale ?

3. Pour la valeur de x trouvée, quelle est la valeur de $\frac{x}{a}$?

Correction

1. Aire du triangle équilatéral : $\frac{base\times hauteur}{2}=\frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$; pour l'aire du carré il faut le côté ; comme on a déjà consommé $3x$ de ficelle avec le triangle, il reste $l-3x$ pour faire 4 côtés, soit $a=\frac{l-3x}{4}$.

L'aire totale est donc $s(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\left[\frac{1}{4}(l-3x)\right]^2=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{1}{16}(1-3x)^2$.

2. On calcule $s'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}2x+\frac{1}{16}2(-3)(1-3x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{8}+\frac{9}{8}x=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{8}\right)x-\frac{3}{8}$. s' s'annule en $x=\frac{3}{4\sqrt{3}+9}$ qui est la valeur pour laquelle s est minimale.

3. $a=1-3x=1-\frac{9}{4\sqrt{3}+9}=\frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{4x}{1-3x}=\frac{12}{4\sqrt{3}+9}\frac{4\sqrt{3}+9}{4\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

3. Fonctions rationnelles

3-14 : Hyperbole 1 (c)

1. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ passe par $A(2\,;\,4)$, admette en ce point une tangente horizontale et aie au point d'abcisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$.

2. Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

a. Etudier les variations de g ; correspond-t-elle à la fonction f du 1° ?

b. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. Quelles conclusions graphiques en tirez-vous ?

c. Montrez que la courbe (C) de g a une asymptote oblique (D) et précisez la position de (D) par raport à (C).

d. Déterminez la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3. Déterminez la position de (T) par rapport à (C).

e. Tracez soigneusement (T), (D) et (C) dans un repère orthonormé : unités : 2 cm (ou 3 carreaux).

Correction

1. $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ passe par $A(2\,;\,4)$ si $f(2)=2a+b+c=4$; on calcule $f'(x)=a-\frac{c}{(x-1)^2}$

elle a en ce point une tangente horizontale si $f'(2)=0\Leftrightarrow a-\frac{c}{(2-1)^2}=0\Leftrightarrow a=c$

elle a au point d'abcisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$, soit $f'(3)=1$, le coefficient directeur de la droite. On a donc $a-\frac{c}{4}=1 \Rightarrow a-\frac{a}{4}=1 \Leftrightarrow a=\frac{4}{3}=c$.

On termine avec $2a+b+c=4 \Leftrightarrow 4+b=4 \Leftrightarrow b=0$, soit $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)}$

2. Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

a. g n'a pas la même écriture que f… mais c'est la même décalée de 1 ves le bas. $g'(x)=\frac{4}{3}-\frac{4}{3(x-1)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\right)=\frac{4}{3}\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	$-7/3$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$7/3$	↗	$+\infty$

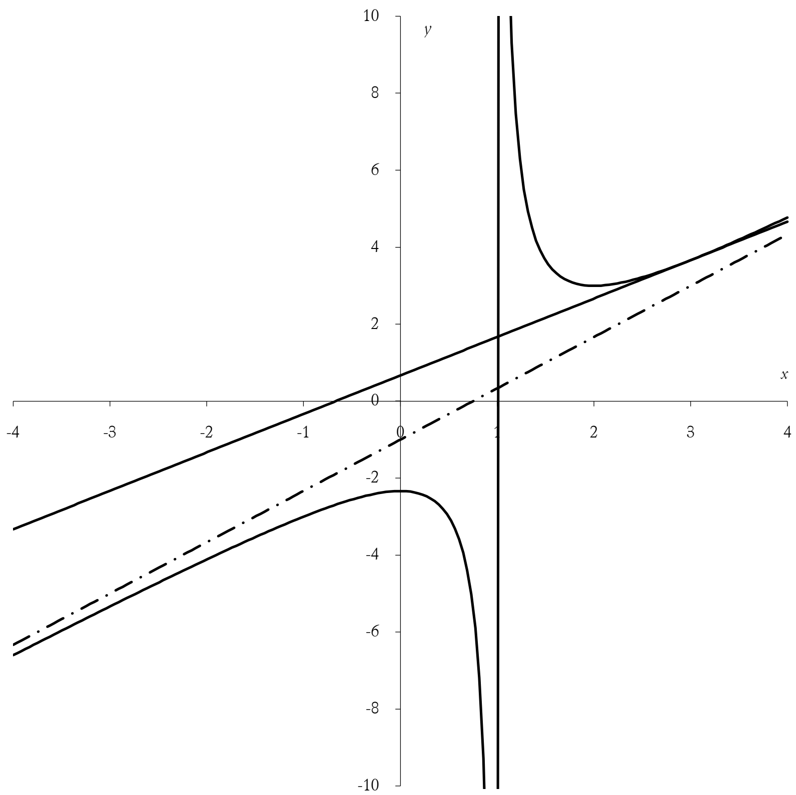
b & c. En $+\infty$ et $-\infty$ le terme $\frac{4}{3x-3}$ tend vers 0, la fonction g se comporte comme D : $y=\frac{4}{3}x-1$ qui est donc son asymptote : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)-\left(\frac{4}{3}x-1\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

A gauche de 1 on a : $g(0{,}99)=-133$, donc limite $= -\infty$;
à droite de 1 on a $g(1{,}01)=133$, donc limite $= +\infty$.
La droite $x = 1$ est asymptote verticale.

Lorsque $x > 1$, $\frac{4}{3x-3}$ est positif, C est au dessus de D, lorsque $x < 1$, $\frac{4}{3x-3}$ est positif, C est en dessous de D.

d. (T) : $y=g'(3)(x-3)+g(3)=1(x-3)+\frac{11}{3}=x+\frac{2}{3}$.

$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3(x-1)}-x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3(x-1)}=\frac{x^2-6x+9}{3(x-1)}=\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}$. Y-a-plus qu'à faire le signe… qui est très facile.



3-15 : Tangente (c)

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de *f* ? Calculer la dérivée *f'* de *f*.
2. Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de *f* au point d'abcisse 1.
3. Etudier la position de (C) par rapport à (T) .
4. Que peut-on dire de la tangente (T') à (C) au point d'abcisse – 1 ?
5. Déterminer à l'aide de (T) une valeur approchée de *f*(1,02) puis de *f*(0,96).

Correction

1. $1+x^2$ ne s'annule jamais donc ensemble de définition = $\mathbb{R}$. $f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

2. $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}x+1$.

3. $f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}x-1=\dfrac{x^3-2x^2+x}{2(1+x^2)}=\dfrac{x(x^2-2x+1)}{2(1+x^2)}=\dfrac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}$ qui est du signe de x.

Donc lorsque x est positif C est au-dessus de T, lorsque x est négatif, C est en dessous de T.

4. La fonction *f* est paire, il y a symétrie de C par rapport à l'axe vertical donc…

5. Au voisinage de 1, $f(x)\approx-\dfrac{1}{2}x+1$ donc $f(1,02)\approx-0,51+1=0,49$ et $f(0,96)\approx-0,48+1=0,52$. On peut comparer avec des valeurs plus exactes : 0,4901 et 0,5204.

3-16 : Rationnelle 1 (c)

a. Soit $P(x)=x^4+6x^2-16x+9$.

Déterminez une racine évidente de P , factorisez P et déterminez son signe.

b. Soit $f(x)=\frac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$, soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. Déterminez son ensemble de définition, calculez sa dérivée et dressez son tableau de variations.

c. Trouvez a, b, c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2+3}$. Montrez que C a une asymptote D et étudiez la position de C par rapport à D. Tracez D et C.

Correction

a. Soit $P(x)=x^4+6x^2-16x+9$.

Quand on dit évident c'est que c'est −2, 1, 0, 2, −2, etc. Ici 1 marche très bien : $P(1)=1+6-16+9=0$. On peut alors mettre (x − 1) en facteur : $P(x)=(x-1)(x^3+ax^2+bx-9)$ où il reste à trouver a et b. Si on développe et que l'on identifie les coefficients, on a alors : $P(x)=(x-1)(x^3+x^2+7x-9)$. Il nous faut recommencer, or on a 1 de nouveau racine évidente de x^3+x^2+7x-9, ce qui donne

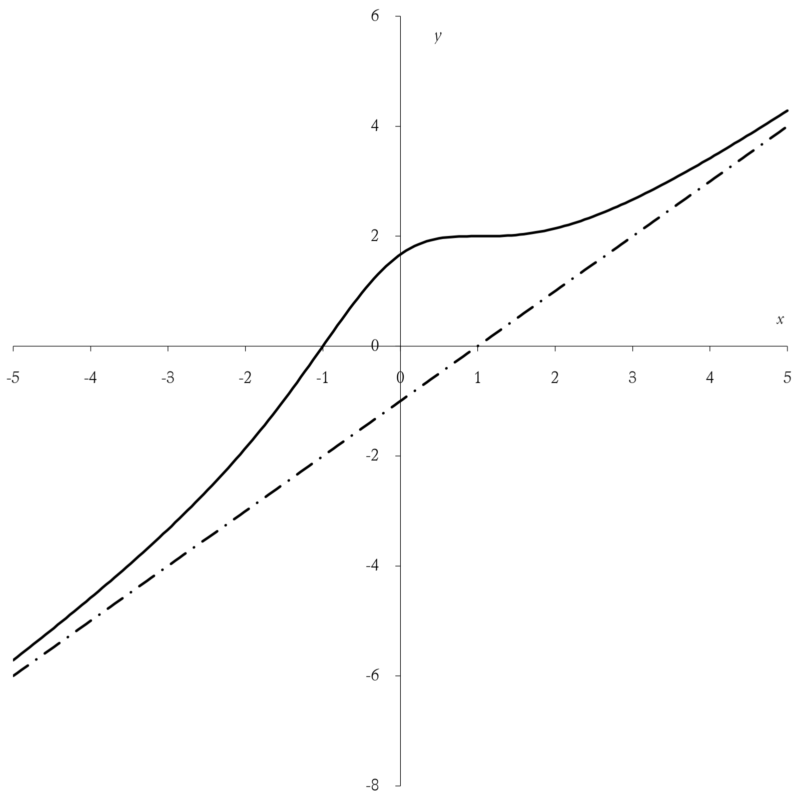
$x^3+x^2+7x-9=(x-1)(x^2+2x+9)$. Le discriminant du dernier terme est négatif, donc signe de +1, positif. Conclusion $P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+9)$ est toujours positif.

b. $f(x)=\frac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2+3>0$.

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x+3)(x^2+3)-(x^3-x^2+3x+5)(2x)}{(x^2+3)^2}=\frac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2}\geq 0 .$$

c. $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2+3}=\frac{ax^4+bx^2+3ax+3b+c}{x^2+3}$, on doit donc avoir a = 1, b = −1, c = 5 − 3b = 8. f s'écrit donc $f(x)=x-1+\frac{8}{x^2+3}$.

On en déduit les limites à l'infini : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\frac{8}{x^2+3}=+\infty-1+0=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f=-\infty$ ainsi que l'asymptote y = x − 1 : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2+3}=0$; comme cette différence est positive, on a C au-dessus de D tout le temps.



3-17 : Rationnelle 2 (c)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Calculer $f'(x)$, déterminer son signe et et étudier les variations de *f* sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.

2. Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe au point d'abscisse 0.

3. a. Résoudre l'équation $(x+1)^2=1$.

b. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x}{(x+1)^2}\geq x$. Quelle est la position de la courbe C_f de *f* par rapport à la droite D ?

c. Justifier que la tangente D ne recoupe pas la courbe C_f dans $]-1\,;\,+\infty[$.

4. Résoudre les équations : $f(x) = 0,5$; $f(x) = 0,2$.

<u>Correction</u>

1.

$$f'(x)=\frac{1(x+1)^2-x[2(x+1)]}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)(1-x)}{(x+1)^4}$$

positive à l'intérieur de $[-1;1]$, négative à l'extérieur.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	

2. $f'(0)=1$, $f(0)=0$, la tangente a pour équation $y = x$.

3. a. $(x+1)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ x+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$.

b. $\dfrac{x}{(x+1)^2}\geq x \Leftrightarrow \dfrac{x}{(x+1)^2}-x\geq 0 \Leftrightarrow x\left[\dfrac{1-(x+1)^2}{(x+1)^2}\right]\geq 0$

$$\Leftrightarrow x\left[1-(x+1)\right]\left[1+(x+1)\right]\geq 0 \Leftrightarrow -x^2\left[x+2\right]\geq 0 \Rightarrow x\leq -2.$$

Lorsque x est inférieur à -2, C_f est au-dessus de D, lorsque x est supérieur à -2, C_f est en dessous de D.

c. Les seuls endroits où la courbe coupe D c'est lorsque la différence $f(x)-x$ change de signe, soit pour $x = -2$ uniquement.

4. C'est du second degré bête et méchant : $f(x) = 0{,}5$ n'a pas de solutions ; $f(x) = 0{,}2$ a pour solutions $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

3-18 : Rationnelle 3 (c)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Etudier le sens de variation et les limites de f.

2. Dresser le tableau de variations de f.

3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x\neq 1$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

4. Démontrer que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique D en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une autre asymptote ?

5. Montrer que le point $A(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f.

Correction

1. $f: x\to\dfrac{x^2+3}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, de dérivée : $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f'(x)$ a le signe de x^2-2x-3 car $(x-1)^2>0$. x^2-2x-3 est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines –1 et 3.

f est donc croissante sur $\left]-\infty;-1\right]$ et sur $\left[3;+\infty\right[$, et f est décroissante sur $\left[-1;1\right[$ et sur]1;3].

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

* $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(x^2+3)=4\\ \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+3}{x-1}=-\infty$ et $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(x^2+3)=4\\ \lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+3}{x-1}=+\infty$.

2. $f(-1)=\dfrac{4}{-2}=-2$ et $f(3)=\dfrac{12}{2}=6$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

3. Après division, $x^2+3=(x+1)(x-1)+4$. Pour tout $x\neq1$, $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)+4}{x-1}=x+1+\dfrac{4}{x-1}$.

4. La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$ car $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+3}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+3}{x-1}=+\infty$.

$\left.\begin{array}{l} f(x)=x+1+\dfrac{4}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$ La courbe C_f de f admet pour asymptote oblique la droite $D: y=x+1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

5. $A(1;2)$ est un centre de symétrie de C_f car :

$f(1-x)+f(1+x)=1-x+1+\dfrac{4}{1-x-1}+1+x+1+\dfrac{4}{1+x-1}=4=2\times 2$ et $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ est centré en 1.

3-19 : Rationnelle 4 (c)

1. On considère le polynôme $P(x)=x^3-3x^2+2$.

a. Vérifier que $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$.

b. Etudier le signe de $P(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnée 1 cm pour 2 unités).

a. Déterminer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2. Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles.

b. Montrer que $f'(x)=\dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

c. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

d. Tracer C dans le repère précisé ci-dessus.

3. a. Pour quelle abscisse a la tangente au point d'abscisse a est-elle horizontale ? Justifier.

b. Déterminer l'équation de la tangente T à C en $x = 3$ et la tracer dans le même repère que C.

4. Trouver a, b, c et d tels que $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-2}$.

5. On admet que $f(x)=x^2+2x+1+\dfrac{4}{x-2}$. On appelle g la fonction définie par $g(x)=x^2+2x+1$ et P sa courbe représentative.

a. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x)-g(x)$. Que peut-on en déduire sur les courbes C et P ?

b. Etudier la position relative de C et P.

c. Tracer P dans le même repère que C et T en utilisant les résultats des questions a. et b.

<u>Correction</u>

1. $P(x)=x^3-3x^2+2$.

a. $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)=x^3-2x^2-2x-x^2+2x+2=x^3-3x^2+2$.

b. Pour le trinôme, on a $\Delta=12=(2\sqrt{3})^2$ d'où les racines $x_1=1-\sqrt{3}, x_2=1+\sqrt{3}$. Un petit tableau de signes nous donne $P(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[1-\sqrt{3}\,;1\right]\cup\left[1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

2. $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$

a. En $+\infty$ et en $-\infty$ f se comporte comme $\frac{x^3}{x}=x^2$ et tend vers $+\infty$; en 2, on a $f(1,99)\approx -391$ et $f(2,01)\approx 409$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty$. Il n'y a pas d'asymptote horizontale, mais il y en a une verticale en $x = 2$.

b. $f'(x)=\frac{(3x^2-3)(x-2)-(x^3-3x+2)}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-3x-6x^2+6-x^3+3x-2}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2+4}{(x-2)^2}=\frac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

c. Le sens de variation de f dépend uniquement du signe de P. On a donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-1,4$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$19,4$	↗	$+\infty$

d. En fin de devoir.

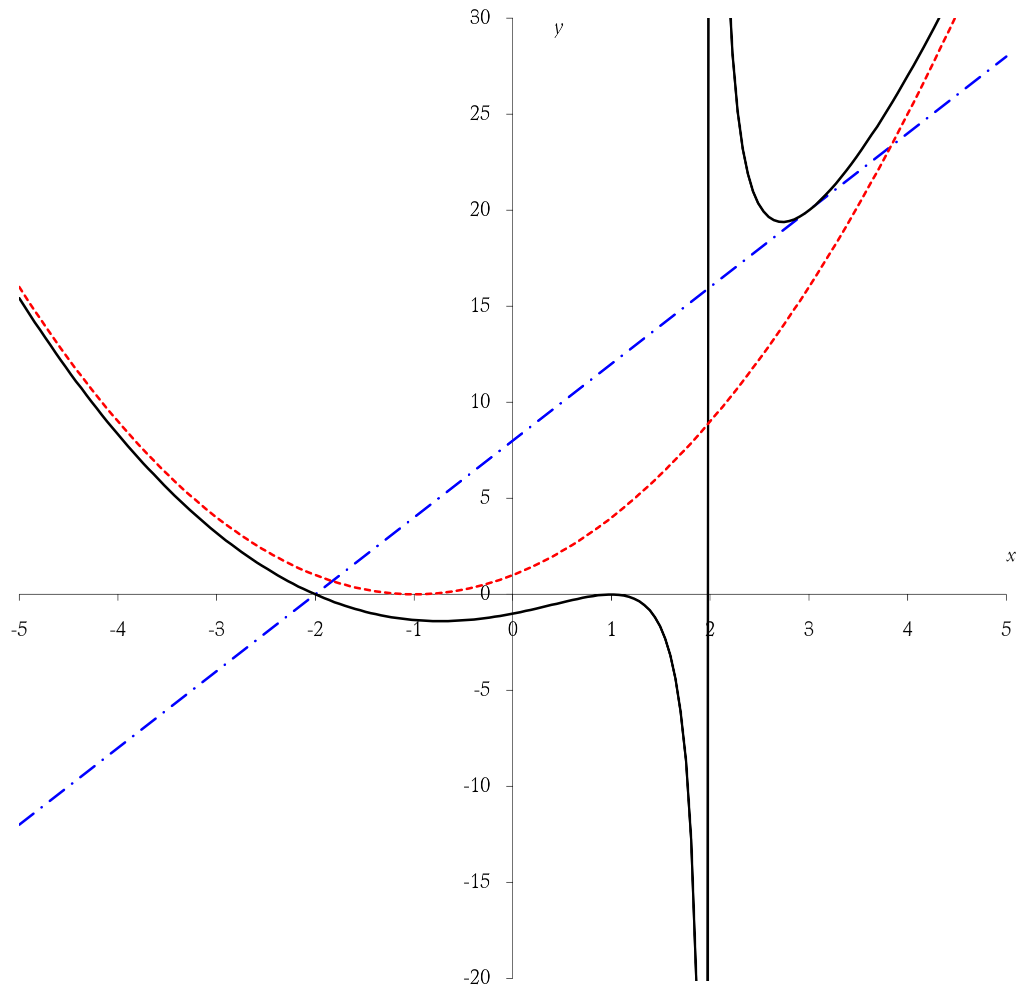
3. a. La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule, soit pour $1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

b. $y=f'(3)(x-3)+f(3)\Leftrightarrow y=4(x-3)+20=4x+8$.

4. $f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}=\frac{ax^3-2ax^2+bx^2-2bx+cx-2c+d}{x-2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+d}{x-2}$ d'où

par identification des coefficients : $\begin{cases} a=1\\ b-2a=0\\ c-2b=-3\\ d-2c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ b=2a=2\\ c=2b-3=1\\ d=2c+2=4\end{cases}$.

5. $f(x)-g(x)=\frac{4}{x-2}$ donc tend vers 0 à l'infini ; lorsque $x > 2$, $f(x) - g(x)$ est positif et C est au-dessus de P ; lorsque $x < 2$, $f(x) - g(x)$ est négatif et C est en dessous de P. Les deux courbes sont asymptotes.



3-20 : Rationnelle 5 (c)

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$ et sa courbe C dans un repère orthonormé.

a. Trouver a, b et c tels que $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$.

b. Ensemble de définition, parité, variations de f.

c. Limites de f, asymptotes à (C).

d. Position de (C) par rapport à D ($y = x$). Tracer D et C.

e. Résoudre $f(x) = 0$.

Correction

a. $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}=\dfrac{x^2(x^2-1)+a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x^3-x}=\dfrac{x^4+(-1+a+b+c)x^2+(b-c)x-a}{x^3-x}$,

soit $a=-1, b-c=0, a+b+c-1=-6 \Rightarrow a=-1, b=c=-2$. On a donc $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$.

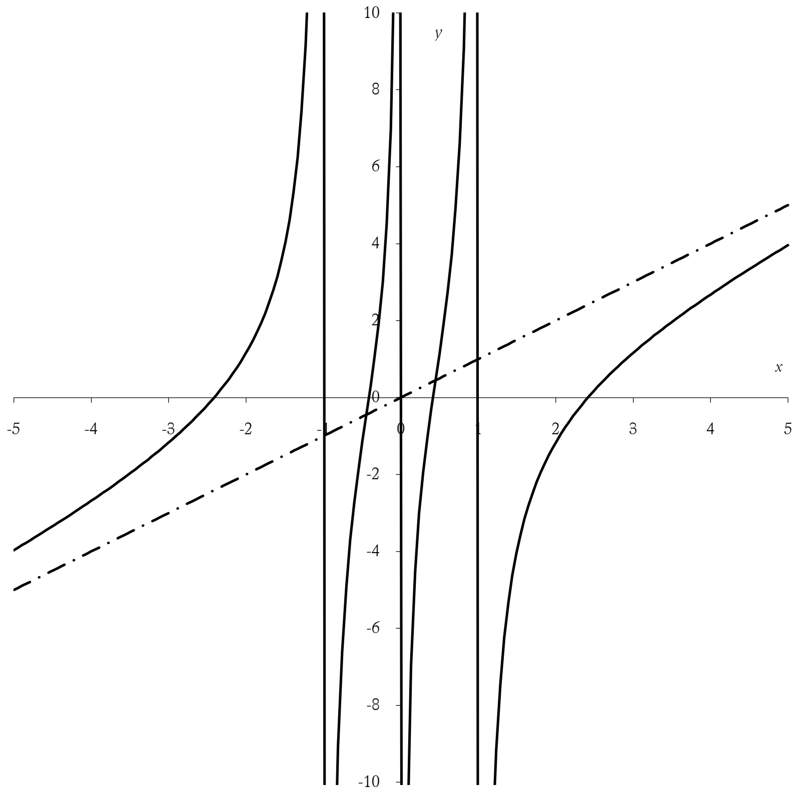
b. $E_f=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$, f est impaire, $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ donc f croissante.

c. A l'infini $f(x)$ est comme x donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x=0$, la droite D($y = x$) est asymptote de C.

Pour les autres limites vérifiez les signes des infinis : asymptotes en -1, 0 et 1.

d. $f(x)-x=-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{-(x^2-1)-2(x^2+x)-2(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{-5x^2+1}{x(x-1)(x+1)}$. C et D se coupent pour $x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, pour la position, tableau de signes.

e. On reprend $f(x)=\frac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}=0$, soit $x^4-6x^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X^2-6X+1=0 \end{cases}$; les racines sont alors $X_1=3+2\sqrt{2}$, $X_2=3-2\sqrt{2}$. Or on peut remarquer que $(1\pm\sqrt{2})^2=1\pm2\sqrt{2}+2=3\pm2\sqrt{2}$ d'où les quatre solutions : $x_1=1+\sqrt{2}, x_1'=-1-\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}, x_1'=-1+\sqrt{2}$.



3-21 : Rationnelle 6 (c)

Partie A

Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $\varphi(x)=\frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point I de coordonnées (0 ; 3) à la droite (T) d'équation $y = 4x + 3$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $f(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout x réel, on a $f(x)=\alpha+\frac{\beta x}{x^2+1}$; α *et* β étant deux réels que l'on déterminera.

2. Etudier les variations de *f*. Préciser ses limites en l'infini et en donner une interprétation graphique. Dresser le tableau de variations de *f*.

3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).
5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le repère proposé.

<u>Correction</u>

Partie A

$\varphi(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ est tangente en I si $\varphi(0)=3$ et $\varphi'(0)=4$ (même coefficient directeur que la droite T).

$\varphi(0)=b=3$ et $\varphi'(x)=\dfrac{(6x+a)(x^2+1)-2x(3x^2+ax+3)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow\varphi'(0)=a=4$.

Partie B

1. Ensemble de définition $\mathbb{R}$. $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha(x^2+1)+\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\alpha}{x^2+1}\Rightarrow\alpha=3,\beta=4$.

2. $f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ d'où les racines -1 et 1. Négatif à l'extérieur, positif à l'intérieur.

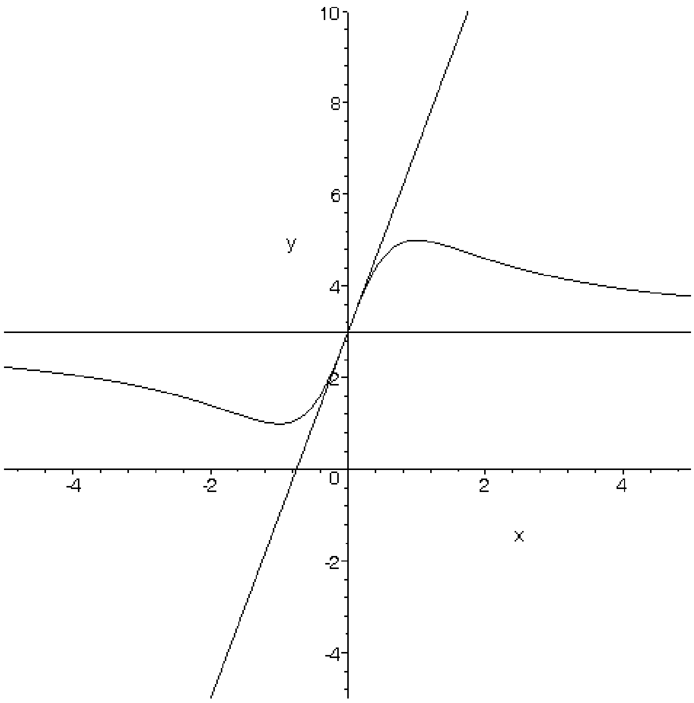
A l'infini $\dfrac{4x}{x^2+1}\approx\dfrac{4x}{x^2}=\dfrac{4}{x}$ qui tend vers 0 donc f tend vers 3, asymptote horizontale $y = 3$.

3. La tangente a évidemment pour équation $y = 4x + 3$. On fait le signe de

$$f(x)-(4x+3)=3+\frac{4x}{x^2+1}-4x-3=\frac{4x-4x(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-4x^3}{x^2+1}$$

qui est du signe de $-x$, soit (C) est au dessus de (T) pour $x\le 0$ et en-dessous pour $x\ge 0$.

4. Pour que le point $\Omega(u, v)$ soit centre de symétrie de (C) il faut que $f(u+x)+f(u-x)=2v$; ici ça donne :
$f(x)+f(-x)=3+\dfrac{4x}{x^2+1}+3-\dfrac{4x}{x^2+1}=6=2.3$, ok !



3-22 : Rationnelle 7 (c)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{x-1}$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

En déduire que la courbe C représentative de la fonction f admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

2. a. Vérifier que, pour x différent de 1, $f(x)=-3x+\frac{x^2}{x-1}$.

Peut-on en déduire que la droite d'équation $y = 3x$ est asymptote oblique à la courbe C ? Justifier.

b. Trouver les réels a, b et c tels que, pour x différent de 1, $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

En déduire que C admet, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, une asymptote D dont on donnera une équation.

c. Etudier suivant les valeurs de x la position de C par rapport à D.

3. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation .

4. Construire la courbe C et ses asymptotes.

<u>Correction</u>

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+3x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-2x=\mp\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{0^+}=+\infty$: asymptote verticale $x = 1$.

2. a. $-3x+\frac{x^2}{x-1}=\frac{-3x(x-1)+x^2}{x-1}=\frac{-2x^2+3x}{x-1}=f(x)$; on ne tire aucune information de cette écriture car $\frac{x^2}{x-1}$ tend vers l'infini à l'infini.

b. $ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}=\frac{ax^2+(b-a)x-b+c}{x-1}=\frac{-2x^2+3x}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b-a=3\\c-b=0\end{cases}$ d'où

$$f(x)=-2x+1+\frac{1}{x-1}.$$

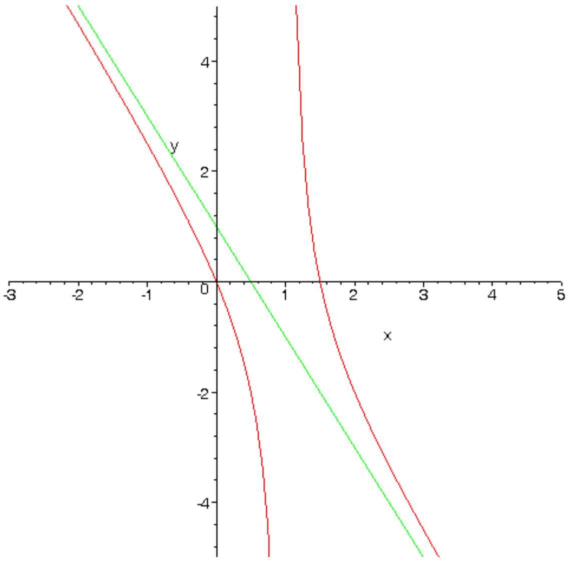
En $+\infty$ et en $-\infty$, $\frac{1}{x-1}$ tend vers 0, on a une asymptote D d'équation $y=-2x+1$.

c. Lorsque $x > 1$, $\frac{1}{x-1}>0$ donc C est au-dessus de D, lorsque $x < 1$, $\frac{1}{x-1}<0$ donc C est en dessous de D.

3. $f'(x)=\frac{(-4x+3)(x-1)-(-2x^2+3x)(1)}{(x-1)^2}=\frac{-4x^2+7x-3+2x^2-3x}{(x-1)^2}=\frac{-2x^2+4x-3}{(x-1)^2}$. Le discriminant est négatif, f' est du signe de -2, soit négative.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4.



3-23 : Rationnelles 8

1. Etudier les variations de la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

2. Montrer que $f(x)=x+2+\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$. Etudier la position de la courbe (C) de f par rapport à la droite (D) d'équation $y=x+2$.

3. En quel(s) point(s) la tangente à (C) est elle parallèle à (D) ?

4. Tracer cette (ces ?) tangente(s), (D) puis (C).

5. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=x+p$ où $p\in\mathbb{R}$.

6. Résoudre la question précédente par le calcul.

7. Lorsqu'il y a deux solutions, il y a deux points d'intersection entre la droite $y=x+p$ et (C). Déterminer l'abscisse du point P, milieu de ces deux points d'intersection.

<u>Correction</u>

1. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme fonction rationnelle.

$$f'(x)=\frac{3x^2\times(x-1)^2-x^3\times 2\times 1\times(x-1)^1}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

La dérivée dépend du signe de (x-3) / (x-1), les autres facteurs étant positifs.

	$-\infty$	1	||		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	−		+	
$f(x)$	↗		||	↘	$\frac{27}{4}$	↗	

2. On peut par exemple effectuer la division des polynômes :

x^3	$x^2 - 2x + 1$
$x^3 - 2x^2 + x$ ——— $2x^2 - x$ $2x^2 - 4x + 2$ ——— $3x - 2$	$x + 2$

Etude du signe de $f(x) - (x+2)$: lorsque $x < 2/3$, cette différence est négative, donc la courbe est en dessous de la droite (on démontrerait que cette droite est asymptote à la courbe en démontrant que la limite de la différence lorsque x tend vers l'infini est zéro).

Lorsque $x > 2/3$, la courbe est au-dessus de la droite.

Remarque : La courbe et la droite se coupe au point d'abscisse 2/3 et d'ordonnée $\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$.

3. Le nombre dérivé de f en x_J est donc égal au coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse x_J : c'est 1. Soit à résoudre l'équation :

$$f'(x_J)=1 \Leftrightarrow \frac{x_J{}^2(x_J-3)}{(x_J-1)^3}=1 \Leftrightarrow x_J{}^2(x_J-3)=(x_J-1)^3 \Leftrightarrow x_J{}^3-3x_J{}^2=x_J{}^3-3x_J{}^2+3x_J-1$$

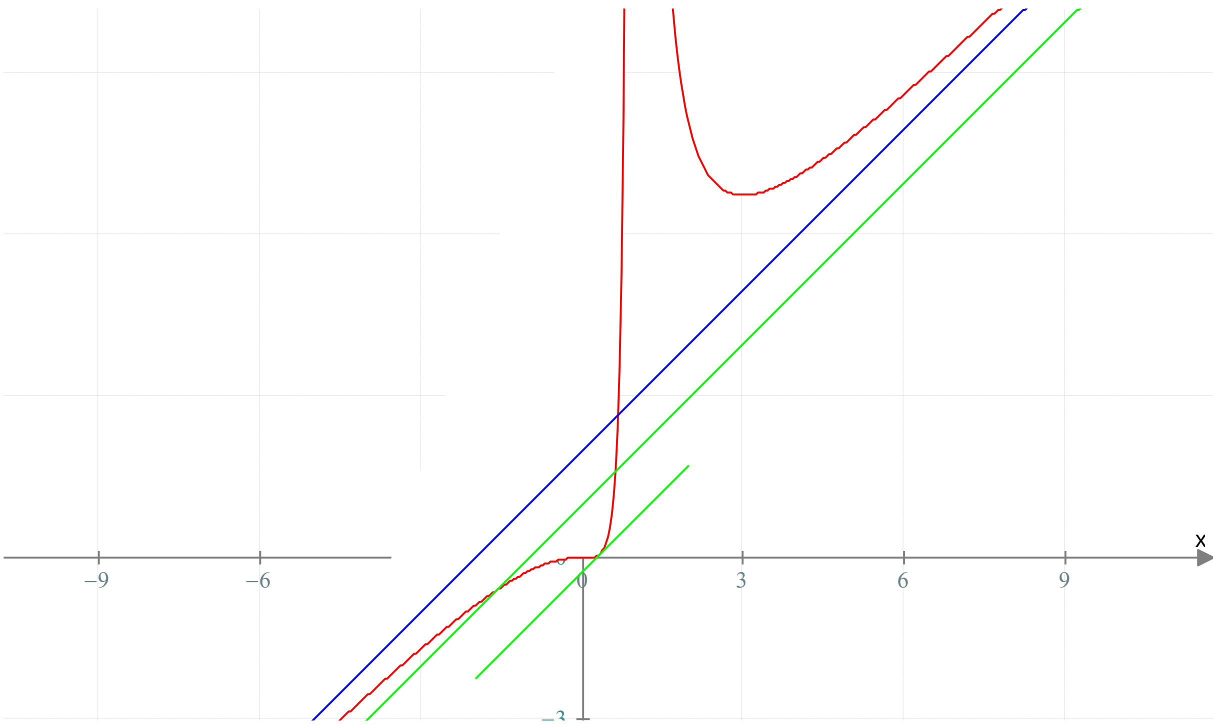
$$\Leftrightarrow 3x_J-1=0 \Leftrightarrow x_J=\frac{1}{3}.$$

$$f(x_J)=\frac{1}{12}.$$

L'équation de la tangente à la courbe en J est :

$$y=1\times(x-\frac{1}{3})+f(\frac{1}{3}) \Leftrightarrow y=x-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=x-\frac{1}{4}.$$

4.



5. Lorsque p < 1/4, l'intersection de la courbe et de la droite $y = x + p$ est vide.

Lorsque p > 1/4 (avec $p \neq 2$), il y a deux solutions à l'équation, qui sont les abscisses des points intersection de la courbe et de la droite.

Lorsque p = 2, il y a un seul point d'intersection, il a pour abscisse 2/3 (voir 2.)

6. On doit résoudre l'équation :

$$f(x) = x + p \Leftrightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} = (x+p) \Leftrightarrow x^3 = (x+p)(x-1)^2 \Leftrightarrow x^3 = (x+p)(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 = x^3 - 2x^2 + x + px^2 - 2px + p \Leftrightarrow x^2(p-2) + x(1-2p) + p = 0.$$

Remarques et interprétation : c'est une équation du second degré de paramètre p. Discutons du nombre de solutions suivant les valeurs de p :

Si p = 2, l'équation est du premier degré. La solution est x = 1/3.

$$\Delta = (1-2p)^2 - 4p(p-2) = 1 - 4p + 4p^2 - 4p^2 + 8p = 4p - 1.$$

Si p < 1/4, on a Δ < 0, et l'équation n'a pas de solution (la droite et la courbe ne se coupent pas).

Si p = 1/4 on a Δ = 0, la courbe est tangente à la droite.

Si p > 1/4 il y a deux solutions qui sont les abscisses de deux points M et N.

Les solutions sont : $x = \dfrac{-(1-2p) \pm \sqrt{4p-1}}{2(p-2)}$.

$$2x_P = x_M + x_N = \frac{-(1-2p) - \sqrt{4p-1}}{2(p-2)} + \frac{-(1-2p) + \sqrt{4p-1}}{2(p-2)} = \frac{2p-1}{p-2} \Rightarrow x_P = \frac{2p-1}{2p-4} = \frac{2p-4+3}{2p-4} = 1 + \frac{3}{2p-4}.$$

3-24 : Asymptotes

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

a. Trouvez les réels a, b, c, d tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{d}{(x+1)^2}$.

b. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Précisez (en justifiant) les deux asymptotes à la courbe C de f.

d. Etudiez les variations de f.

Correction

Pour montrer la puissance d'un logiciel de calcul, nous faisons la correction avec Maple :

```
> restart;with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> f:=x->(x^3+3*x^2+10*x+5)/(x+1)^2;
```

$$f := x \to \frac{x^3 + 3\,x^2 + 10\,x + 5}{(x+1)^2}$$

Question a

```
> f:=unapply(convert(f(x), parfrac, x),x);
```

(On convertit f sous forme de somme de fractions)

$$f := x \to x + 1 + \frac{7}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

```
> g:=unapply(op(1,f(x))+op(2,f(x)),x);
```
(Ceci permet de récupérer l'asymptote sous forme de fonction)

$$g := x \to x+1$$

Question b

```
> limit(f(x),x=infinity);
```
$$\infty$$

```
> limit(f(x),x=-infinity);
```
$$-\infty$$

```
> limit(f(x),x=-1,left);
```
$$-\infty$$

```
> limit(f(x),x=-1,right);
```
$$-\infty$$

Donc la droite $x = -1$ est asymptote de C.

Question c

```
> limit(f(x)-g(x),x=infinity);limit(f(x)-g(x),x=-infinity);
```
$$0$$

$$0$$

Donc D($y = x+1$) est asymptote de C en + et - inf.

Position de C par rapport à D :

```
>
> solve(f(x)-g(x)>=0);
```
$$\mathrm{RealRange}\left(\frac{-4}{7}, \infty\right)$$

Donc C est au-dessus de D lorsque x > -4/7.

Question d

```
> ff:=D(f);simplify(ff(x));
```
$$ff := x \to 1 - \frac{7}{(x+1)^2} + \frac{6}{(x+1)^3}$$

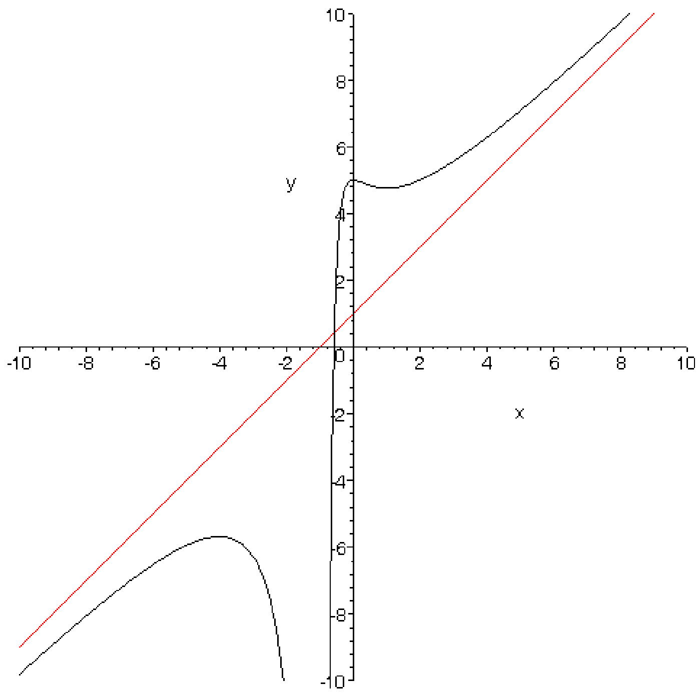
$$\frac{x\,(x^2+3\,x-4)}{(x+1)^3}$$

```
> solve(ff(x)=0);solve(ff(x)>=0);f(0);f(1);f(-4);
```
$$0, 1, -4$$

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, -4), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), 0), \mathrm{RealRange}(1, \infty)$$

$$5, \frac{19}{4}, \frac{-17}{3}$$

```
> u:=plot(f(x),x=-10..10,y=-10..10,color=black):
> v:=plot(g(x),x=-10..10,y=-10..10,color=red):
> display({u,v});
```



> fichier : http://laroche.lycee.free.fr/1S/etude_fonction.mws

3-25 : Factorisons (c)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{4x^2-4x+1}{-x^3+6x^2-11x+6}$.

1. Déterminez a, b et c réels tels que : $-x^3+6x^2-11x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

2. Déduisez-en l'ensemble de définition de f.

3. On admet que $-x^3+6x^2-11x+6=(x-1)(-x^2+5x-6)$. Résolvez l'inéquation $f(x)\geq 0$.

__Correction__

1. Développons : $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$ d'où $a=-1$, $b-a=6$, soit $b=5$, $c-b=-11$, soit $c=-6$. On a donc $-x^3+6x^2-11x+6=(x-1)(-x^2+5x-6)$.

2. On cherche les racines de $-x^2+5x-6$, ce qui donne 2 et 3. On a donc $E_f=\mathbb{R}-\{1, 2, 3\}$.

3. On remarque que le numérateur est en fait $(2x-1)^2$, donc toujours positif. Un petit tableau de signes nous donne alors $f(x)\geq 0$ lorsque $x\in]-\infty\,;1[\cup]2\,;3[$.

3-26 : Approximations (c)

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{1+2x}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ ainsi que les fonctions $g(x)=1+3x$ et $h(x)=1+3x+3x^2$. On appelle C la courbe représentative de f.

1. Trouver a et b tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{1-x}$. Etudier les variations de f, préciser ses limites à l'infini et en 1.

La partie de la courbe C correspondant à l'intervalle $[-1\,;1[$ est tracée sur la feuille jointe qui sera rendue avec la copie.

2. Etudier les variations de h, tracer dans le même repère que C les courbes représentant g et h.

3. Préciser par le calcul la position de C par rapport aux courbes de g et h.

4. On se demande s'il ne serait pas possible de trouver une fonction du troisième degré dont la courbe « ressemblerait » à C aux alentours de 0.

a. Vérifiez que $1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x}=\frac{1}{1-x}$.

b. Déduisez-en avec l'aide du 1. que $f(x)=1+3x+3x^2+3x^3+\frac{3x^4}{1-x}$. Tracez la courbe représentative de $k(x)=1+3x+3x^2+3x^3$ sur la feuille.

c. Donnez un encadrement de $\frac{3x^4}{1-x}$ à l'aide de votre calculatrice pour $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. Que pouvez-vous dire de $f(x)-k(x)$ lorsque $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ¿

Correction

1. $f(x)=a+\frac{b}{1-x}=\frac{a(1-x)+b}{1-x}=\frac{a+b-ax}{1-x}$ d'où $a=-2$ et $b=1-a=3$. On a donc $f(x)=-2+\frac{3}{1-x}$.

$f'(x)=0-\frac{3(-1)}{(1-x)^2}=\frac{3}{(1-x)^2}$ donc positive, *f* est croissante.

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{3}{1-x}$ tend vers 0 donc *f* tend vers -2.

Lorsque x tend vers 1, $x<1$, $\frac{3}{1-x}$ tend vers $+\infty$ ($f(0,99)=300$) ; lorsque x tend vers 1, $x>1$, $\frac{3}{1-x}$ tend vers $-\infty$ ($f(1,01)=-300$).

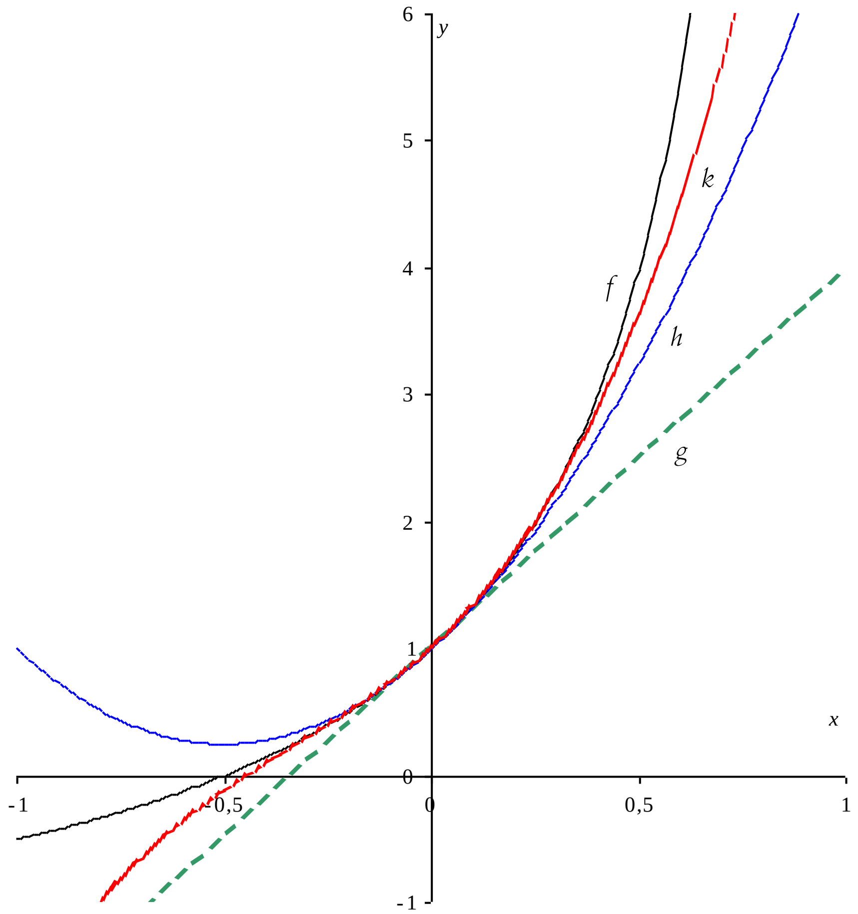
2. $h(x)=1+3x+3x^2$; $h'(x)=3+6x=3(1+2x)$ donc croissante après $-1/2$, décroissante avant $-1/2$. $h(-1/2)=1/4$.

3. On cherche le signe des expressions

* $f(x)-g(x)=-2+\frac{3}{1-x}-1-3x=-3-3x+\frac{3}{1-x}=3\frac{x^2}{1-x}$.

Lorsque $x<1$ $f(x)-g(x)>0$ donc la courbe de *f* est au dessus de la courbe de *g* ; c'est le contraire lorsque $x>1$.

* $f(x)-h(x)=-2+\frac{3}{1-x}-1-3x-3x^2=-3-3x-3x^2+\frac{3}{1-x}=3\frac{x^3}{1-x}$ qui est du signe de $\frac{x}{1-x}$, soit positif (courbe de *f* au-dessus de courbe de *h*) lorsque $x\in[0,1[$, négatif sinon.



4. On se demande s'il ne serait pas possible de trouver une fonction du troisième degré dont la courbe « ressemblerait » à C aux alentours de 0.

a. $1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x}=\frac{(1+x+x^2+x^3)(1-x)+x^4}{1-x}=\frac{1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-x^4+x^4}{1-x}=\frac{1}{1-x}$.

b. $f(x)=-2+\frac{3}{1-x}=-2+3\left[1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x}\right]=1+3x+3x^2+3x^3+\frac{3x^4}{1-x}$.

c. En fait il faut montrer que $\frac{3x^4}{1-x}$ est croissant pour $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$; ceci dit on a alors $-0,125<\frac{3x^4}{1-x}<0,0417$.

On peut dire que $f(x)-k(x)$ vaut entre $-0,125$ et 0,0417 lorsque $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. Ceci donne une valeur approchée de *f* sur cet intervalle.

3-27 : Eclairement (c)

En Physique il y a une loi disant que « lorsqu'un point *M* est situé à une distance *d* d'une source lumineuse de puissance *p*, l'intensité de l'éclairement en *M* est égale à $\frac{p}{d^2}$ ».

1. Sur Terre nous recevons une intensité lumineuse d'environ 1 watt/m^2. La distance Terre-Soleil est de 150 millions de km. Quelle est la puissance lumineuse du Soleil ?

2. On considère deux sources lumineuses ponctuelles *A* et *B* de même puissance *p* et telles que $AB = l$. Soit *M* un point de [*AB*], on pose $AM = x$ avec $x\in\,]\,0\ ;l\,[$.

a. Montrer que l'intensité de l'éclairement en M est $I(x)=\dfrac{p}{x^2}+\dfrac{p}{(l-x)^2}$.

b. Calculer la dérivée $I'(x)$ et montrer que I est minimale lorsque M est au milieu de $[AB]$.

(On rappelle que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$)

Correction

1. Attention, il faut convertir les km en m… $1\text{ W.m}^{-2}=\dfrac{p_S}{(1,5.10^{11})^2}\Rightarrow p_S=2,25.10^{22}\text{ W}$.

2. a. La puissance reçue en M provenant de A est $\dfrac{p}{x^2}$, celle provenant de B est $\dfrac{p}{(l-x)^2}$ donc l'intensité reçue en M est $I(x)=\dfrac{p}{x^2}+\dfrac{p}{(l-x)^2}$.

b. On calcule $I'(x)$:

$$I'(x)=p\frac{-(2x)}{x^4}+p\frac{-2(-1)(l-x)}{(l-x)^4}=2p\left[\frac{-1}{x^3}+\frac{1}{(l-x)^3}\right]=2p\left[\frac{-(l-x)^3+x^3}{x^3(l-x)^3}\right]$$

$$=2p\left[\frac{(x-l+x)\left\{x^2+x(l-x)+(l-x)^2\right\}}{x^3(l-x)^3}\right]=2p\left[\frac{(2x-l)\left\{x^2+xl-x^2+l^2-2lx+x^2\right\}}{x^3(l-x)^3}\right]$$

$$=2p\left[\frac{(2x-l)\left\{l^2-lx+x^2\right\}}{x^3(l-x)^3}\right].$$

(En fait on pouvait s'arrêter au début de la deuxième ligne, ou même à la deuxième égalité… pourquoi ¿)

Le terme x^2-lx+l^2 a pour discriminant $\Delta=l^2-4l^2=-3l^2<0$ et est donc toujours positif. Donc le signe de I' ne dépend que de celui de $2x-l$, négatif pour $x<\dfrac{l}{2}$ et positif après. Il s'agit donc bien d'un minimum, obtenu lorsque M est au milieu de $[AB]$.

4. Trigonométrie

4-28 : Sinus cardinal

1. On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0\,;\pi]$ par $g(x)=x\cos x-\sin x$.

a. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $[0\,;\pi]$.

b. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par $\begin{cases}f(0)=1\\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\neq 0\end{cases}$. Etudier les variations de f sur $]0\,;\pi]$.

2. <u>Etude de f en 0</u>

a. Prouver que, pour tout réel $x\geq 0$, $\dfrac{1}{6}x^3\geq x-\sin x\geq 0$ (on pourra introduire la fonction φ définie par $\varphi(x)=\sin x-x+\dfrac{1}{6}x^3$, étudier ses variations et déterminer son signe).

b. Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3. Construire la courbe représentative de f.

Correction

1. a. $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$ qui est négative sur $[0\,;\pi]$; g est décroissante, donc $g(x)\leq g(0)=0\cos 0-\sin 0=0$, g est négative sur $[0\,;\pi]$.

b. $f(x)=\frac{\sin x}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos - x\sin x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$, donc négative. La limite de f en 0 est 1 (cours de Première), en π f vaut 0.

2. a. $\varphi(x)=\sin x - x+\frac{1}{6}x^3 \Rightarrow \varphi'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \varphi''(x)=-\sin x+x \Rightarrow \varphi'''(x)=-\cos x+1\geq 0$.

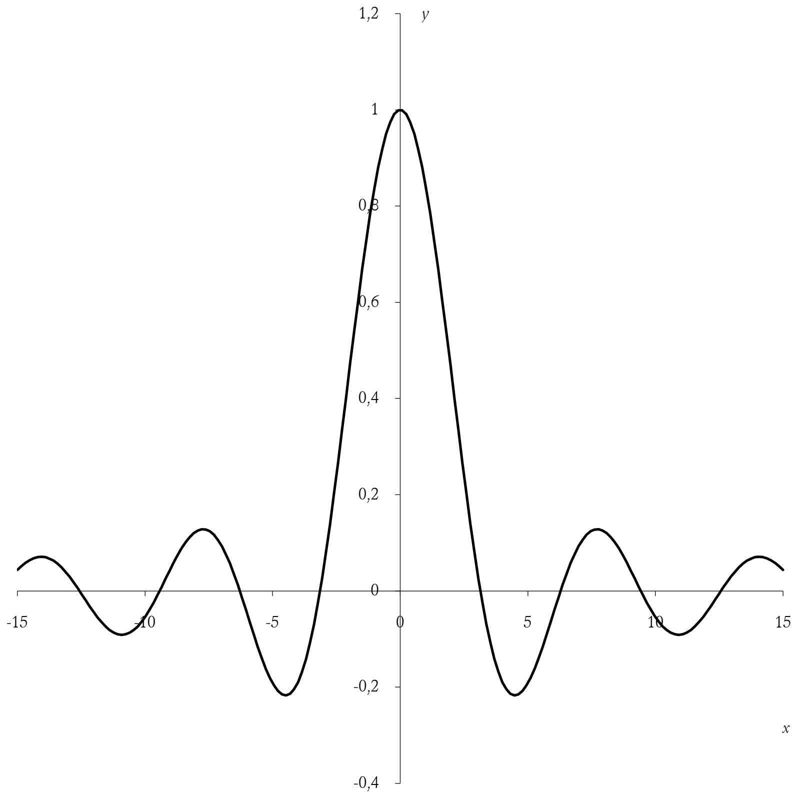
Comme $\varphi'''\geq 0$, φ'' est croissante et $\varphi''(x)\geq\varphi''(0)=0$, donc φ' est croissante et $\varphi'(x)\geq\varphi'(0)=0$, donc φ est croissante et $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$.

Conclusions : tout d'abord $\varphi(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3\geq 0\Rightarrow \sin x-x\geq -\frac{1}{6}x^3 \Leftrightarrow x-\sin x\leq\frac{1}{6}x^3$, puis $\varphi''(x)=-\sin x+x\geq 0\Leftrightarrow x\leq\sin x$.

b. Pour prouver que f est dérivable en 0, il faut calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$; or on a $\frac{1}{6}x^3\geq x-\sin x\geq 0\Leftrightarrow -\frac{1}{6}x^3\leq \sin x-x\leq 0\Rightarrow -\frac{1}{6}x\leq\frac{\sin x-x}{x^2}\leq 0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{6}x\leq\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}\leq 0$.

Conclusion $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0=f'(0)$. En fait ici on n'a que la dérivée à droite puisqu'on a $x\geq 0$, mais c'est la même chose pour x négatif car f est paire, donc les dérivées à gauche et à droite sont identiques, et la tangente est horizontale..

3.



La fonction $\frac{\sin x}{x}$ est très importante dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. On l'appelle Sinus Cardinal (est-ce à cause de la forme de la courbe qui ressemble un peu à un chapeau de cardinal ¿), noté **sinc**.

4-29 : Arctangente

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, C sa courbe.

1. Etude de *f*

a. Quel est l'ensemble de définition de *f* ? Montrez que C est symétrique par rapport à l'axe (O*y*). Calculez la dérivée *f'* de *f*.

b. Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de *f* au point d'abcisse 1.

c. Etudier la position de (C) par rapport à (T) .

d. Que peut-on dire de la tangente (T') à (C) au point d'abcisse – 1 ?

2. On considère la fonction *tangente* définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$: $g(x)=\tan x$.

a. Montrez que sa dérivée est $g'(x)=1+\tan^2 x$.

b. Donnez une équation de sa tangente en *O*.

c. On appelle Γ la courbe de tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et γ la courbe symétrique de Γ par rapport à la droite ($y = x$). Tracez Γ et γ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

d. La courbe γ est la courbe représentative d'une fonction appelée *arc tangente* , notée **arctan** ($\tan^{-1}$ sur votre calculatrice) et telle que

$$\arctan(\tan x)=\tan(\arctan x)=x\ .$$

Indiquer sur la figure les valeurs de $\arctan 0$, $\arctan(1)$, $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$. Vérifiez avec votre calculatrice.

e. De manière purement graphique, tracez la tangente à γ au point d'abscisse 1 et donnez son équation.

f. On admettra le résultat suivant : la dérivée de $\tan\left[u(x)\right]$ où u est une fonction à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est $u'(x)\left[1+\tan^2\left(u(x)\right)\right]$. Montrez que la dérivée de arctan(x) est $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Vérifiez le résultat du 2. e.

<u>Correction</u>

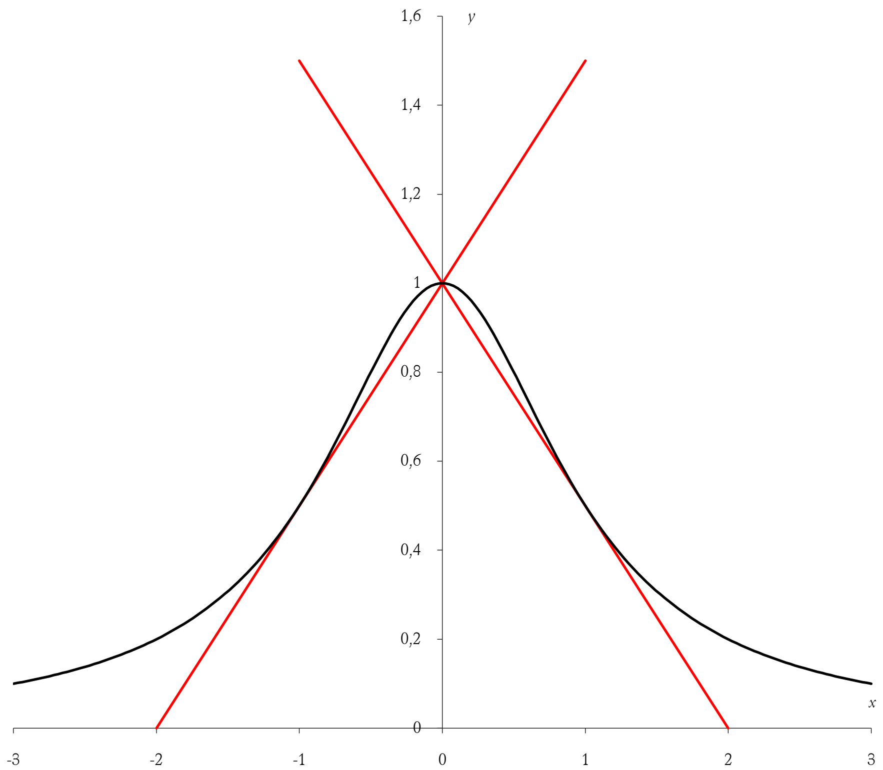
1. Etude de *f*

a. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ car $1+x^2$ ne paut jamais être nul. Par ailleurs on a $f(-x)=f(x)$ donc *f* est paire et C est symétrique par rapport à l'axe (O*y*). $f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

b. (T) $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}x+1$.

c. $f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}x-1=\dfrac{2+x(1+x^2)-2(1+x^2)}{2(1+x^2)}=\dfrac{x^3-2x^2+x}{2(1+x^2)}=\dfrac{x\left(x-1\right)^2}{2(1+x^2)}$. Ceci est positif et donc (C) au-dessus de (T) lorsque x est positif, négatif et donc (C) en dessous de (T) lorsque x est négatif.

d. Comme *f* est paire, c'est la même chose à l'envers en -1.

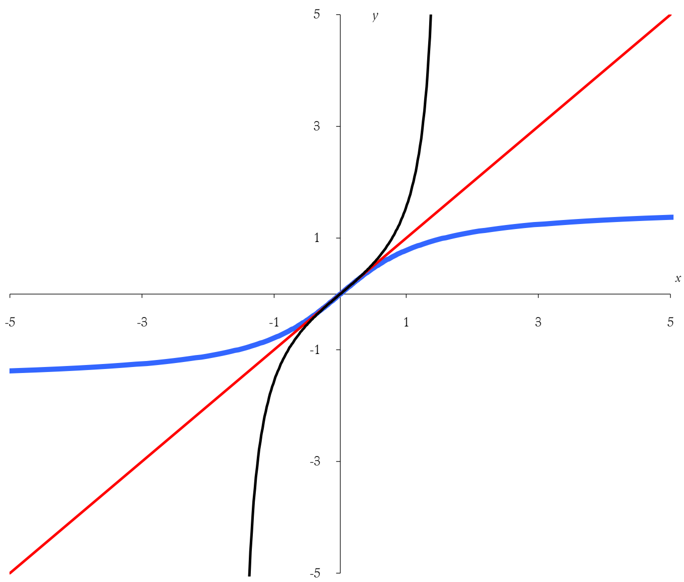


2. On considère la fonction *tangente* définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $g(x)=\tan x$.

a. $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ donc $g'(x)=\dfrac{(\sin x)'(\cos x)-(\cos x)'(\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x-(-\sin^2 x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

b. Tangente en O : $y=1(x-0)+0 \Leftrightarrow y=x$.

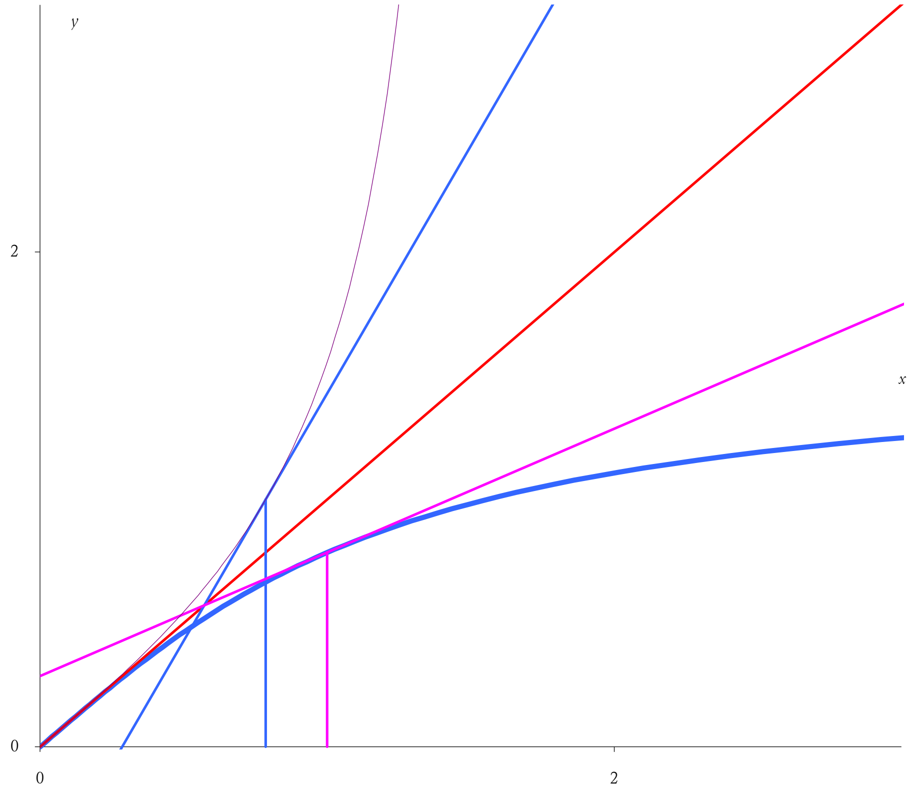
c.



d. Comme on a tan 0 = 0, on a arctan 0 = 0. De même $\tan\frac{\pi}{4}=1 \Leftrightarrow \arctan(1)=\frac{\pi}{4}$ et $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

e. Comme ($y = x$) est la tangente à Γ en 0 et que c'est l'axe de symétrie entre les deux courbes, c'est la tangente à γ en 0 également.

Pour 1, on fait la tangente symétrique à celle en $\frac{\pi}{4}$ pour tan ; comme cette dernière a pour équation $y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$, celle en 1 pour arctan a pour équation $x=2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{\pi}{4}$ (on intervertit simplement x et y).



f. Comme on a la dérivée de $\tan\left[u(x)\right]$, appliquons cela à tan[arctan(x)] :

$$\left[\tan(\arctan x)\right]'=\left[\arctan(x)\right]'\left[1+\tan^2(x)\right].$$

Or $\tan(\arctan x)=x \Rightarrow \left[\tan(\arctan x)\right]'=1$ d'où

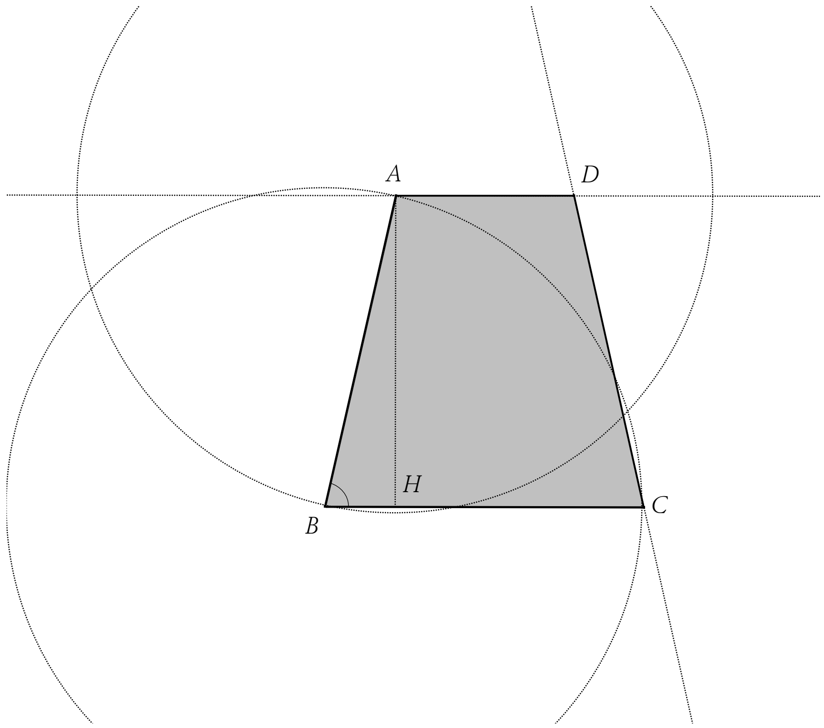
$$\left[\arctan(x)\right]'\left[1+\tan^2(\arctan x)\right]=1 \Rightarrow \left[\arctan(x)\right]'=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

4-30 : Trapèze d'aire maximale

On considère un trapèze *ABCD* tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ aient la même mesure α.

Déterminer les valeurs de α pour que le trapèze *ABCD* ait une aire maximale sachant que les côtés *AB*, *BC* et *CD* mesurent un mètre.

Correction



On pose $\widehat{ABC} = \alpha$, alors $\frac{AH}{AB} = \sin\alpha \Rightarrow AH = AB\sin\alpha = \sin\alpha$;

$\frac{BH}{AB} = \cos\alpha \Rightarrow BH = \cos\alpha \Rightarrow AD = 1-2\cos\alpha$.

L'aire est alors $\left(\frac{AD+BC}{2}\right)AH = \frac{(1-2\cos\alpha+1)}{2}\sin\alpha = (1-\cos\alpha)\sin\alpha = f(\alpha)$.

On dérive f : $f'(\alpha) = \sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)\cos\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos\alpha = 1+\cos\alpha - 2\cos^2\alpha$; les racines du trinôme sont 1 et $-1/2$, on cherche donc α tel que $\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$. L'aire maxi est alors $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

5. Optimisation et modélisation

5-31 : Boite

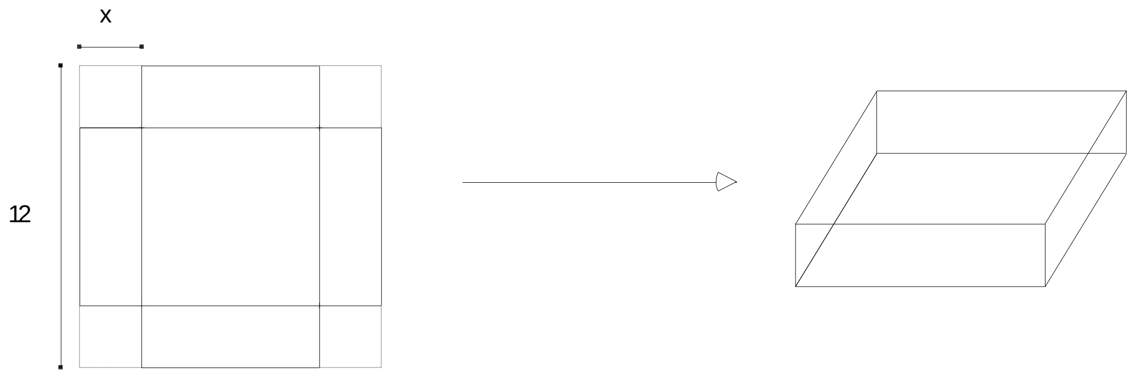
Partie I : Soit V la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

1. Etudier les variations de la fonction V sur $\mathbb{R}$.

2. Tracer la représentation graphique de la fonction V dans un plan muni d'un repère orthogonal.

On utilisera les unités graphiques suivantes : sur l'axe des abscisses 2 cm pour 1 unité et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 10 unités.

Partie II : Dans un carré de côté 12, on découpe dans les quatre angles des carrés de côté x pour construire le patron d'un pavé droit sans couvercle.



1. Justifier que l'ensemble des valeurs que peut prendre x est l'intervalle [0 ; 6].
2. Montrer que le volume du pavé est donné par la formule $V(x)$.
3. En déduire qu'il existe une valeur de x qui rend le volume maximal. Que vaut alors ce volume ?

<u>Correction</u>

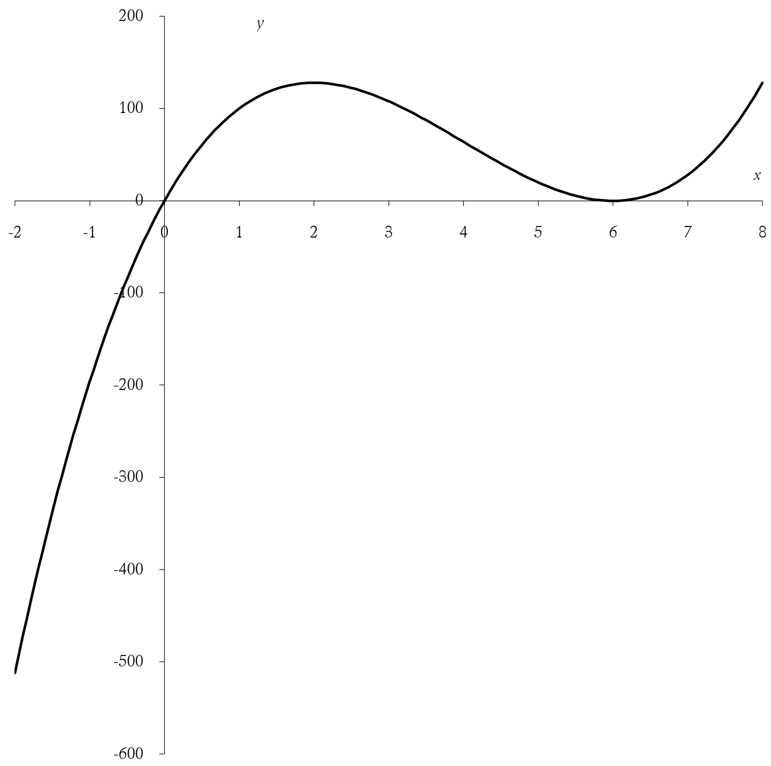
<u>Partie I</u> : $V(x)=4x^3-48x^2+144x$.

1. Variations de la fonction V sur $\mathbb{R}$: $V'(x)=12x^2-96x+144=12\left(x^2-8x+12\right)=12\left(x-2\right)(x-6\left.\right)$.

Donc deux racines, 2 et 6, le trinôme est du signe de a, soit positif sur $\left]-\infty\,;2\right]\cup\left[6\,;+\infty\right[$ et négatif sur $\left[2\,;6\right]$.

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	128	↘	0	↗	

2.



Partie II :

1. Evidemment, $2x$ représente ce qu'on enlève sur le côté, il faut donc que $0 \le 2x \le 12 \Leftrightarrow 0 \le x \le 6$.

2. $V = Base \times Hauteur = (12-2x)\times(12-2x)\times x = ... = V(x)$.

3. V est maximum lorsque $x = 2$; le volume vaut alors 128 cm^3.

5-32 : Coûts de production (c)

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 euros.

Le coût de production unitaire *U(x)* exprime le coût de production par objet produit. On a déterminé qu'il est égal à $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour x appartenant à l'intervalle $\mathrm{I} = [10\,;100]$.

1. a. Etudier la fonction U sur I. Tracer sa courbe C (unités : 1cm pour 5 objets / 1cm pour 10 **€**).

b. Déterminer pour quelle production le cout unitaire est le plus bas. Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.

c. Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un coût de production unitaire inférieur ou égal à 80 **€**.

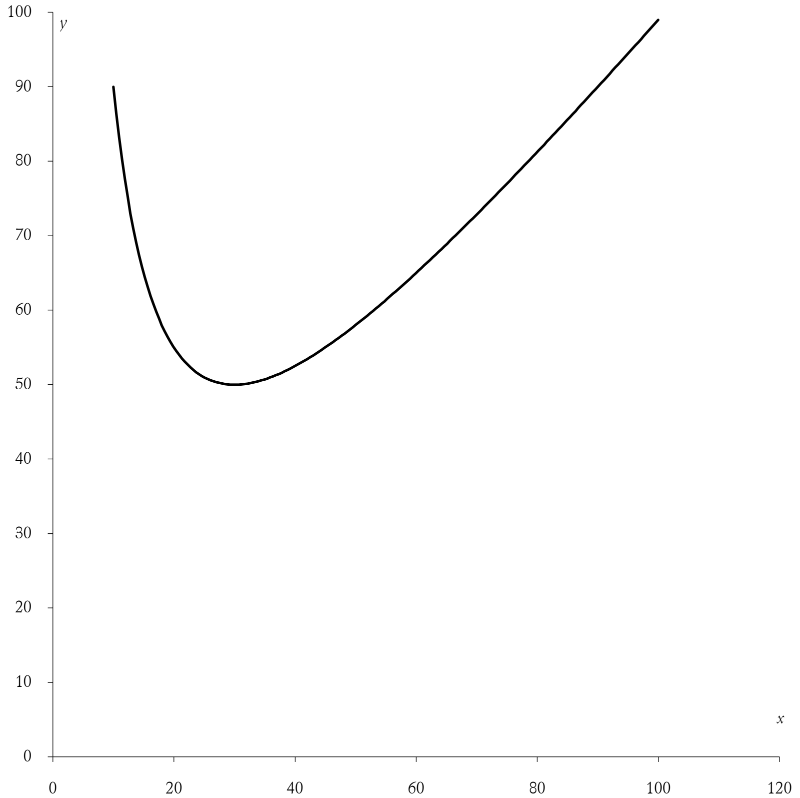
2. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 110x - 900$. Déterminer son sens de variation sur I et déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice?

Correction

$U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour x dans l'intervalle $\mathrm{I} = [10\,;100]$.

1. a. Dérivée : $U'(x) = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2 - 900}{x^2} = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$ d'où le tableau de variations : $x + 30$ est toujours positif sur I, $x - 30$ est négatif avant 30, positif après.

x	10		30		100
U'		$-$	0	$+$	
U	90	$\searrow$	50	$\nearrow$	99



b. Le minimum est obtenu pour 30 objets produits. Le bénéfice est alors $(100-U(30))\times 30=1500$.

c. Graphiquement le nombre d'objets fabriqués doit être compris entre 11,5 et 78,5.

2. Le bénéfice est $B(x)=x(100-U(x))=x\left(100-x+10-\dfrac{900}{x}\right)=-x^2+110x-900$. Sa dérivée est $B'(x)=-2x+110$ qui s'annule pour $x=55$. Avant 55 B est coissante ($B'>0$), après 55 B est décroissante ($B'<0$), c'est bien un maximum. Ce bénéfice maximum est alors $B(55)=2125$.

5-33 : Théorie de la relativité (c)

D'après la théorie de la relativité, une particule de masse m_0 au repos a une masse m à la vitesse v donnée par la formule $m(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ où c est la vitesse de la lumière soit 300 000 km/s.

a. Calculez m pour v=0,3 km/s puis $v=10^4$ km/s. On prendra $m_0=1$ pour les calculs et les figures.

b. Etudiez la fonction $m(v)$ pour v variant de 0 à c. Tracez sur la même figure la droite $m=m_0$ et la courbe représentative de $m(v)$.

c. Pour quelle vitesse la masse vaut-elle deux fois la masse au repos ? A partir de quelle vitesse un individu verra-t-il son poids augmenter de 1% ? Conclure.

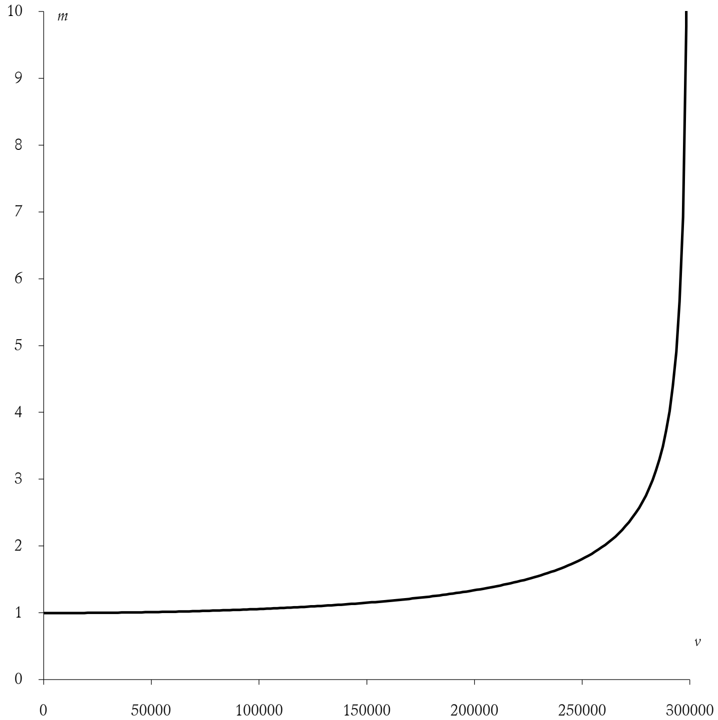
Correction

1. $m(v)=\dfrac{cm_0}{\sqrt{c^2-v^2}}=\dfrac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}$. Pour v=0,3 km/s, m vaut pratiquement 1, pour $v=10^4$ m vaut 1,00055602.

2. On a $m(v)=c(c^2-v^2)^{-1/2}\Rightarrow m'(v)=c\left(-\dfrac{1}{2}\right)(-2v)(c^2-v^2)^{-1/2-1}=\dfrac{cv}{(c^2-v^2)^{3/2}}>0$ donc m est bien croissante. Lorsque v tend vers c, c^2-v^2 tend vers 0 et m tend vers l'infini.

4. On cherche v pour que $m(v)=2m_0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}=2\Leftrightarrow c^2=4(c^2-v^2)\Leftrightarrow v^2=\dfrac{3}{4}c^2\Rightarrow v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, soit environ 260 000 km/s.

5. $m(v)\geq 1,01m_0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}\geq 1,01\Leftrightarrow c^2\geq(1,01)^2(c^2-v^2)\Leftrightarrow v^2\geq\dfrac{1,01^2-1}{1,01^2}c^2\Rightarrow v\geq 0,0197c\approx 6000$ km/s . Il faut aller vraiment très vite…



5-34 : Courbe+optimisation (c)

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$.

a. Déterminer les limites de f.

b. Calculer $f'(x)$, déterminer son signe, faire le tableau de variations de f, déterminer le minimum de f pour $x > 0$.

c. On appelle C la courbe représentative de f, et P la parabole $y = x^2$

Soit M le point de P d'abcisse x et N le point de C de même abcisse. Calculer $\overline{MN}=y_N-y_M$, préciser son signe ainsi que sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelles conclusions pouvez vous en tirer ?

d. Tracer dans le même repère les tangentes à C en 1 et 2 ainsi que P puis C (unite = 2 cm)

e. Un industriel doit fabriquer une boite fermée de volume 1 litre ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur h et dont la base est un carré de côté x. L'unité de longueur est le dm.

Montrer que la surface de la boîte est $S(x) = 2f(x)$ et déterminer les dimensions de la boîte pour lesquelles cette surface est minimale.

Correction

a. A l'infini le terme $\frac{2}{x}$ tend vers 0 donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$.

En 0 le terme $\frac{2}{x}$ tend vers l'infini et on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$.

b. $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}$; or x^3-1 est positif lorsque $x\geq 1$ et négatif sinon.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

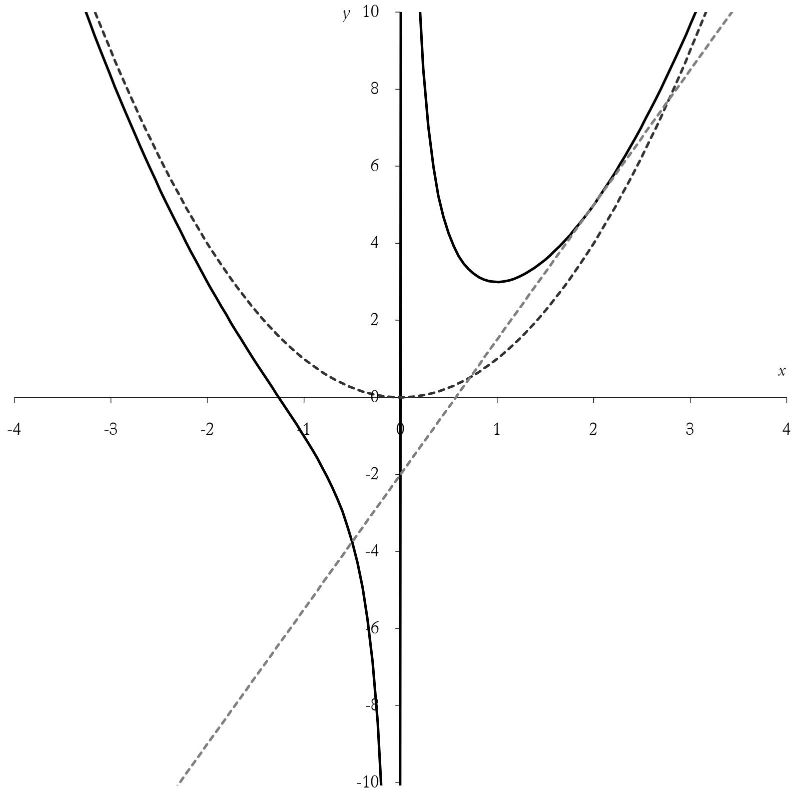
c. $\overline{MN}=y_N-y_M=f(x)-x^2=\frac{2}{x}$. Ceci tend vers 0 à l'infini donc C et P sont asymptotes.

Lorsque $x > 0$, on a $\frac{2}{x}>0\Rightarrow y_N>y_M$ donc C est au-dessus de P ; lorsque $x < 0$, on a $\frac{2}{x}<0\Rightarrow y_N<y_M$ donc C est en-dessous de P.

d. La tangente en 1 a pour coefficient directeur 0, elle est horizontale ; la tangente en 2 a pour coefficient directeur 7/2.

e. La surface de la boîte est 2n fois la base x^2 plus quatre fois le côté xh. On a donc $S(x)=2x^2+4xh$. Or le volume de la boîte est $V=x^2h=1\,\text{l}=1\,\text{dm}^3\Rightarrow h=\frac{1}{x^2}$ et $S(x)=2x^2+4x\frac{1}{x^2}=2f(x)$.

La surface est minimale lorsque f est minimale, c'est-à-dire lorsque $x = 1$; on a alors $h = 1$ et la boîte est un cube de côté 1 dm.



5-35 : Triangles (c)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB=1$ et $AD=2$. M est un point variable sur $[DC]$: on pose $DM=x$. Les droites (AM) et (DB) se coupent en I. On désigne par $S(x)$ la somme des aires des triangles ABI et DIM.

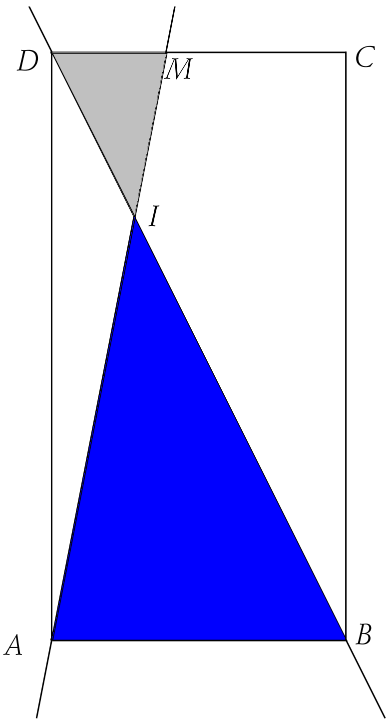
1. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2. Démontrer que la hauteur IK du triangle ABI est égale à $\frac{2}{x+1}$.

3. En déduire que : $S(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$.

4. Pour quelle valeur de x, $S(x)$ est-elle minimale ? Que vaut cette aire minimale ?

<u>Correction</u>



1. Calcul de $S(0)$ et $S(1)$: si $x=0$, $M=D$ et $S(0)$ est l'aire du triangle ABD ; soit

$$S(0)=\frac{2\times 1}{2}=1 \ ;$$

si $x=1$, $M=C$ et $S(1)$ est la somme des aires des triangles ABI et DIC ; soit $S(1)=\frac{1\times 1}{2}+\frac{1\times 1}{2}=1$.

2. Calcul de IK.

Dans les triangles IBA et IDM, les points B, I, D et A, I, M sont alignés et (AB) et (DM) sont parallèles.

On peut donc utiliser Thalès :

$$\frac{ID}{IB}=\frac{IM}{IA}=\frac{DM}{BA}\Rightarrow\frac{ID}{IB}=\frac{x}{1}\Rightarrow ID=x\,IB.$$

Dans les triangles BIK et BDA, les points B, I, D et B, K, A sont alignés et (AD) et (KI) sont parallèles.

On peut donc utiliser Thalès :

$$\frac{BI}{BD}=\frac{BK}{BA}=\frac{IK}{DA}\Rightarrow\frac{BI}{BD}=\frac{IK}{2}\Rightarrow\frac{BI}{BI+ID}=\frac{IK}{2}.$$

Or $ID=x\,IB$. On obtient ainsi : $\frac{BI}{BI+x\,BI}=\frac{IK}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}=\frac{IK}{2}\Leftrightarrow IK=\frac{2}{1+x}$.

3. Calcul de $S(x)$: la hauteur IH du triangle DIM est obtenue par $IH=2-\frac{2}{1+x}=\frac{2x}{1+x}$.

On obtient ainsi : $S(x)=\frac{AB\times IK}{2}+\frac{DM\times IH}{2}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{1+x}+\frac{1}{2}\times x\times\frac{2x}{1+x}$; soit $S(x)=\frac{1+x^2}{1+x}$.

4. M est un point variable sur $[DC]$ et $DM=x$ appartient à $[0;1]$.

$S:x\to\frac{1+x^2}{1+x}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, donc sur $[0;1]$, de dérivée :

$$S'(x)=\frac{2x(1+x)-(1+x^2)}{(1+x)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}.$$

* Sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $S'(x)$ a le signe de x^2+2x-1 car $(1+x)^2>0$.

* x^2+2x-1 est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.

* S est décroissante sur $\left[0;-1+\sqrt{2}\right]$ et croissante sur $\left[-1+\sqrt{2};1\right]$.

$S:x\to\frac{1+x^2}{1+x}$ admet donc un minimum en $x=-1+\sqrt{2}$ égal à $S\left(-1+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2$.

$S(x)$ est donc minimale pour $x=-1+\sqrt{2}$ et cette aire minimale vaut $2\sqrt{2}-2$.

5-36 : Polynômes de Legendre

On appelle *polynômes de Legendre* la famille de fonctions définies sur $[-1\,;\,1]$ par

$$P_0(x)=1 \text{ et } P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

((n) représente la dérivée n-ième et $n!$ est le nombre $1.2.3.\ldots.n$ qui se lit « factorielle de n »).

1. Calculer $P_n(x)$ pour $n=1, 2, 3, 4$ et 5.

2. A l'aide d'Excel tracer ces fonctions dans un même repère. Etudier leurs variations.

3. On démontre que $P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x)$ pour toute valeur de n. Vérifier cette formule pour n = 1, 2, 3 et 4. Même question pour la formule suivante :

$$(\mathbf{E}) \quad (n+2)P_{n+2}(x)=(2n+3)xP_{n+1}(x)-(n+1)P_n(x).$$

4. Un des principaux intérêts de ces polynômes est que l'on a :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2ux+x^2}}=P_0(u)+xP_1(u)+x^2P_2(u)+\ldots+x^nP_n(u)+\ldots$$

a. On prend u = 1 : donner une expression simple de f. Ecrire la formule précédente jusqu'à n = 5. Peut-on deviner une formule générale ?

b. A l'aide d'Excel et de la formule (**E**) tracer les fonctions $f_n(x)=P_0(u)+xP_1(u)+\ldots+x^nP_n(u)$ pour u = 1/2 et n = 0, 1, …20.

Sur la même figure tracer f et sur une figure différente tracer les fonctions $f_n(x)-f(x)$. Constatations ?

Correction

$$P_0(x)=1 \text{ et } P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

1. $P_1(x)=\frac{1}{2.1!}(x^2-1)'=\frac{1}{2}2x=x$;

$P_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\left[(x^2-1)^2\right]^{(2)}=\frac{1}{8}\left(2x(x^2-1)\right)'=\frac{1}{8}\left(6x^2-2\right)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$;

$$P_3(x)=\frac{1}{2^3 3!}\left[(x^2-1)^3\right]^{(3)}=\frac{1}{48}\left[3(2x)(x^2-1)^2\right]^{(2)}$$

$$=\frac{1}{8}\left[x(x^2-1)^2\right]^{(2)}=\frac{1}{8}\left[x^5-2x^3-x\right]^{(2)}=\frac{1}{8}(20x^3-12x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

Pour les autres c'est plus désagréable : calculons $(x^2-1)^4=x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1$ et dérivons 4 fois :

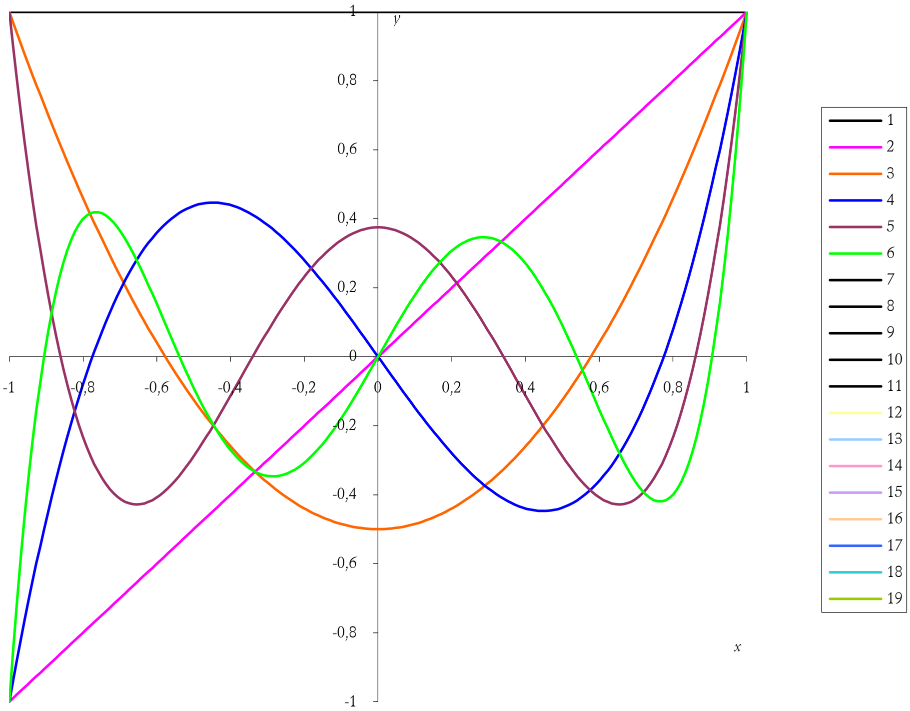
$\left[(x^2-1)^4\right]'=8x^7-4.6x^5+6.4x^3-4.2x$, $\left[(x^2-1)^4\right]^{(2)}=8.7x^6-4.6.5x^4+6.4.3x^2-4.2$,

$\left[(x^2-1)^4\right]^{(3)}=8.7.6x^5-4.6.5.4x^3+6.4.3.2x$, $\left[(x^2-1)^4\right]^{(4)}=8.7.6.5x^4-4.6.5.4.3x^2+6.4.3.2$; il reste à diviser par $\frac{1}{2^4 4!}=\frac{1}{16.4.3.2.1}$, ce qui donne $P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$.

Vous vous ferez une joie de vérifier que $P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$.

2. Pour l'étude des trois premières il n'y a pas de difficulté. Pour la 4 :

$P'_4(x)=\frac{1}{8}\left(35.4.x^3-30.2.x\right)=\frac{5}{2}x(7x^2-3)$ d'où les racines 0, $\sqrt{\frac{3}{7}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{7}}$. La suite est facile.



Pour $P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$, on a $P_5'(x)=\frac{1}{8}\left(63.5.x^4-70.3.x^2+15\right)=\frac{15}{8}\left(21x^4-14x^2+1\right)$. On pose $X=x^2$: $21X^2-14X+1$ et on cherche les racines : $\Delta=14^2-84=112=(4\sqrt{7})^2$ d'où $X_1=\frac{14+4\sqrt{7}}{2.21}=\frac{7+2\sqrt{7}}{21}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\sqrt{7}}$, $X_1=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt{7}}$, soit les quatre racines :

$$x_1=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3\sqrt{7}}},\ x_2=-\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3\sqrt{7}}},\ x_3=\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt{7}}},\ x_4=-\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt{7}}}.$$

3. Vérifions simplement pour $n=4$: $P_5'(x)-xP_4'(x)=5P_4(x)$, soit avec les calculs précédents :

$$\frac{15}{8}\left(21x^4-14x^2+1\right)-x\frac{5}{2}x(7x^2-3)=\frac{5}{8}\left(63x^4-42x^2+3-28x^4+12x^2\right)=\frac{5}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right).$$ Ok.

5-37 : Point de Torricelli, Point de Fermat

http://pilat.free.fr/pilat/sketchpad/fermat.htm

http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./t/torricelli.html

http://membres.lycos.fr/villemingerard/Geometri/Triangle.htm

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B, C de coordonnées (2 ; 0), (0 ; 1) et (0 ; −1).

Pour tout point M de P, on pose $\varphi(M)=MA+MB+MC$ et on se propose de trouver un point M_0 tel que $\varphi(M)>\varphi(M_0)$ pour tout point M différent de M_0. Autrement dit, on cherche à minimiser la fonction φ.

Partie A

On note Δ le demi-axe des abscisses correspondant aux x positifs. On regarde ici ce qu'il se passe lorsque M est sur Δ.

1. Soient les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=2\sqrt{x^2+1}+x-2$ et $g(x)=2\sqrt{x^2+1}-x+2$.

Etudier les variations de f et g.

2. Soit h définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x)=2\sqrt{x^2+1}+|x-2|$. Etudier, au moyen de la question précédente, les variations de h.

3. Soit M un point de Δ. Montrer que $\varphi(M)=h(x)$ où x désigne l'abscisse de M. Quel est le minimum de φ lorsque M décrit Δ ? En quel point de Δ ce minimum est-il atteint ?

Partie B

Etude de φ sur le plan entier.

1. Etablir que, pour tout point M de P, on a $MB+MC\geq 2$.

2. Etant donné un réel a supérieur ou égal à 1, on note Γ_a l'ensemble des points M tels que $MB+MC=2a$.

a. Reconnaître Γ_1.

b. Reconnaître Γ_a lorsque $a > 1$.

Tracer sur la même figure Γ_1 et $\Gamma_{5/3}$.

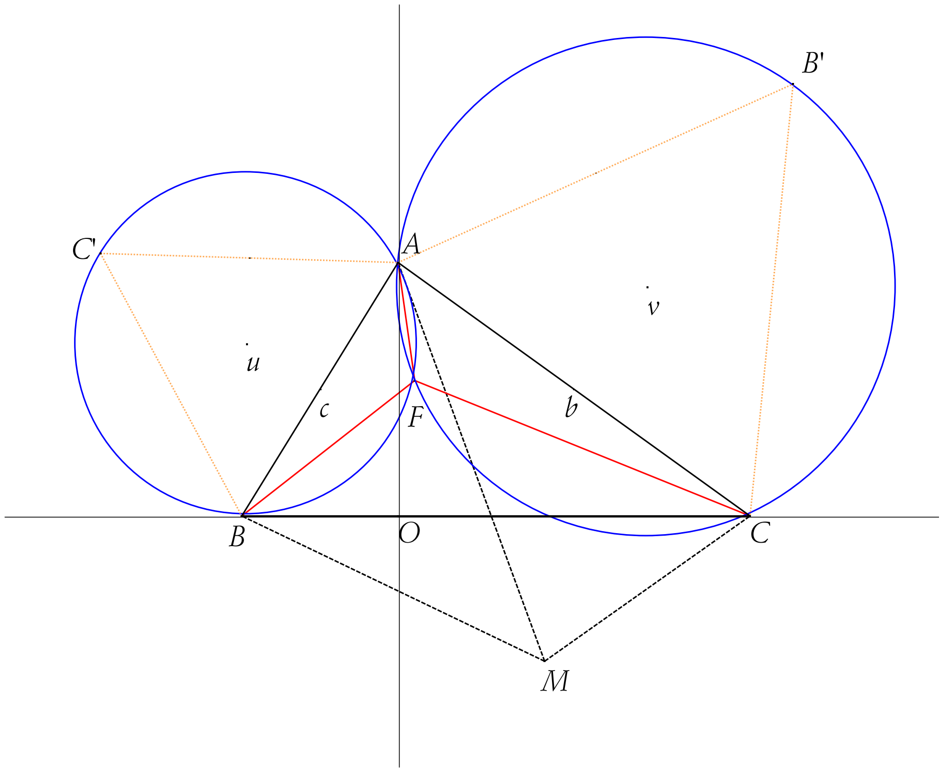
3. Etablir que, pour tout $a\geq 1$, Γ_a rencontre Δ en un unique point T_a dont on précisera l'abscisse.

4. Soit un réel $a\geq 1$.

a. Vérifier que tout point de Γ_a a pour coordonnées (x ; y) telles que $\begin{cases} x=\sqrt{a^2-1}\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$, $t\in[0\ ;2\pi[$.

b. Exprimer en fonction de t la différence $MA^2-T_aA^2$ et montrer que, si M est différent de T_a, cette différence est strictement positive. En déduire que, si M est un point de Γ_a et différent de T_a, on a $\varphi(M)>\varphi(T_a)$.

5. Soit M_0 le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;0\right)$. Montrer que, pour tout point M du plan différent de M_0, on a $\varphi(M)>\varphi(M_0)$.



La solution générale consiste à tracer les cercles circonscrits aux triangles équilatéraux construits sur les côtés du triangle ABC. Ces cercles se coupent en un point F, appelé point de Fermat ou de Steiner.

<u>Correction</u>

Partie A

1. $f(x)=2\sqrt{x^2+1}+x-2$; $f'(x)=2\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1=\dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}>0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc f est croissante ;

$g(x)=2\sqrt{x^2+1}-x+2$; $g'(x)=2\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}$.

On cherche si

$2x-\sqrt{x^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow 4x^2\geq x^2+1\Leftrightarrow 3x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (on se rappelle que x est positif) ;

donc g est croissante lorsque $x\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, décroissante sinon.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		2		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
h	0	$\searrow$	$\sqrt{3}+2$	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $h(x)=2\sqrt{x^2+1}+|x-2|$: lorsque $x\geq 2$, $|x-2|=x-2$ donc $h(x)=f(x)$; lorsque $x\leq 2$, $|x-2|=-x+2$ et $h(x)=g(x)$. On a donc le tableau de variation ci-contre.

3. Rappelons que la distance sur une droite entre deux points $A(a)$ et $B(b)$ est $|b-a|$.

$$\begin{aligned}\varphi(M)&=MA+MB+MC=|2-x|+\sqrt{(0-x)^2+(1-0)^2}+\sqrt{(0-x)^2+(-1-0)^2}\\&=|2-x|+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}=|2-x|+2\sqrt{x^2+1}=h(x).\end{aligned}$$

Le minimum de φ lorsque M décrit Δ est donc le minimum de h, soit $\sqrt{3}+2$, atteint lorsque $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

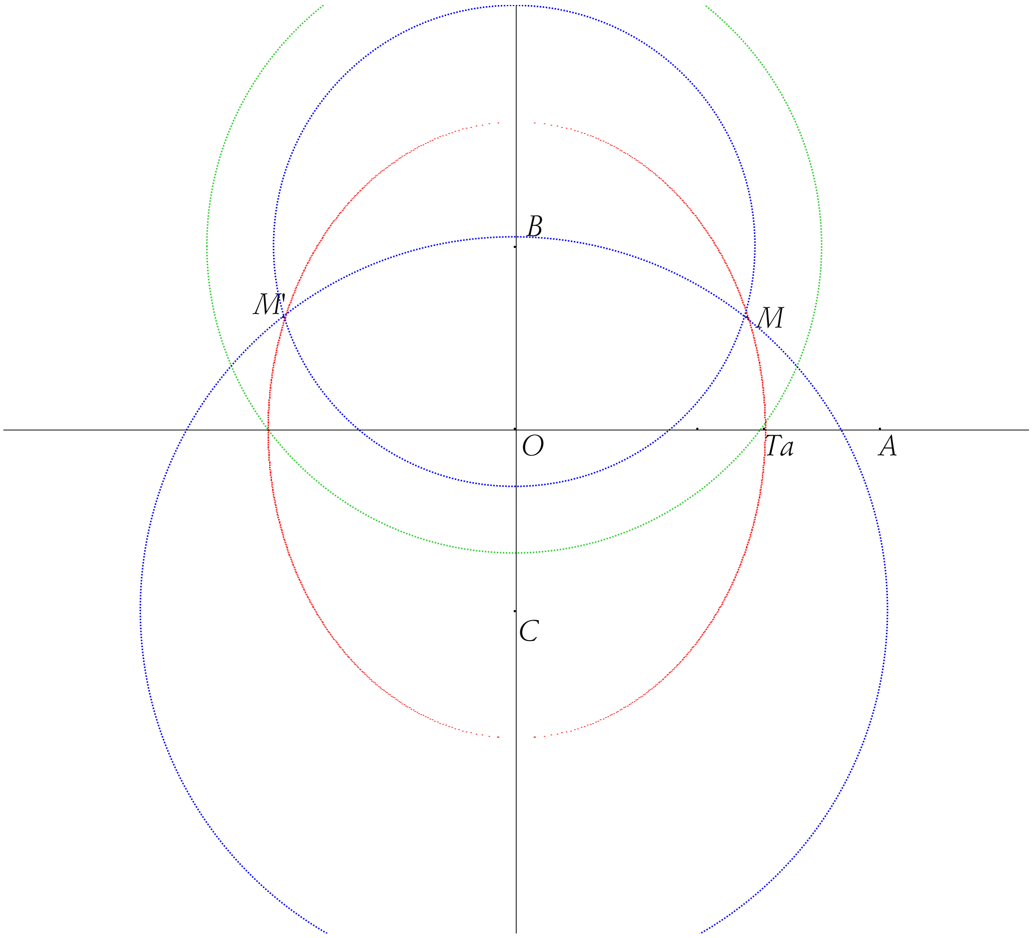
Partie B

1. Inégalité triangulaire : $MB+MC\geq BC$; or $BC=2$ donc $MB+MC\geq 2$.

2. $MB+MC=2a\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2a$. En fait il s'agit simplement d'une ellipse de foyers B et C.

a. Γ_1 est l'ensemble des points M tels que $MB+MC=2=BC$ donc M est entre B et C, c'est le segment $[BC]$ (ellipse aplatie).

Le fichier http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/1S/transf_fermat.cha montre la construction.



3. Γ_a rencontre Δ (abscisse positives) lorsque le rayon du cercle BM vaut a, soit en un unique point T_a : on a alors $T_aB+T_aC=2a \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}=2a \Leftrightarrow x^2+1=a^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{a^2-1}$.

4. a. Remplaçons x et y par $\begin{cases} x=\sqrt{a^2-1}\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$:

$MB+MC=2a \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2-1)\cos^2 t+(a\sin t-1)^2}+\sqrt{(a^2-1)\cos^2 t+(a\sin t+1)^2}=2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2\cos^2 t-\cos^2 t+a^2\sin^2 t-2a\sin t+1}+\sqrt{a^2\cos^2 t-\cos^2 t+a^2\sin^2 t+2a\sin t+1}=2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1-\cos^2 t-2a\sin t}+\sqrt{a^2+1-\cos^2 t+2a\sin t}=2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+\sin^2 t-2a\sin t}+\sqrt{a^2+\sin^2 t+2a\sin t}=2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-\sin t)^2}+\sqrt{(a+\sin t)^2}=2a \Leftrightarrow a-\sin t+a+\sin t=2a.$

Ouf…

b.

$MA^2-T_aA^2=(2-x)^2+y^2-\left(2-\sqrt{a^2-1}\right)^2=\left(2-\sqrt{a^2-1}\cos t\right)^2+a^2\sin^2 t-\left(2-\sqrt{a^2-1}\right)^2$

$=4-4\sqrt{a^2-1}\cos t+(a^2-1)\cos^2 t+a^2\sin^2 t-4+4\sqrt{a^2-1}-a^2+1$

$=1-\cos^2 t+4\sqrt{a^2-1}\,(1-\cos t)=(1-\cos t)\left(1+\cos t+4\sqrt{a^2-1}\right).$

Les deux termes sont positifs, seul le premier pourrait être nul lorsque cos t = 1, soit lorsque t = 0, c'est-à-dire lorsque M est en T_a.

On a donc pour M sur Γ_a, $\varphi(M) = MA + MB + MC = MA + 2a$ et $\varphi(T_a) = T_aA + T_aB + T_aC = T_aA + 2a$; mais $MA^2 - T_aA^2 > 0 \Leftrightarrow MA > T_aA$ d'où $\varphi(M) > \varphi(T_a)$.

5. Lorsque a varie, T_a se déplace sur le demi-axe Δ comme vu dans la partie A. La position de T_a pour laquelle $\varphi(M)$ est minimale est précisément au point M_0 de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;0\right)$ (qui correspond à $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$).

On a donc pour tout point M du plan différent de M_0, $\varphi(M) > \varphi(T_a) > \varphi(M_0)$.

5-38 : Un conejo

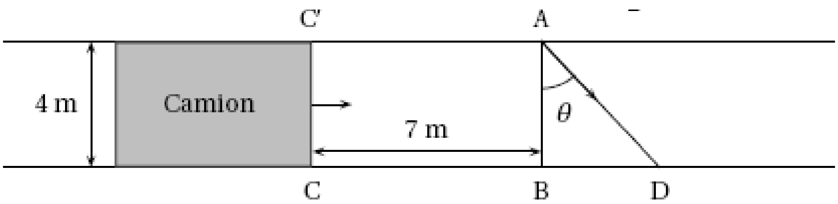
Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.

Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2. On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$. Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3. Etudier les variations de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et montrer qu'elle s'annule pour deux valeurs de θ dont on donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

4. Tracer la courbe représentative de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (unité : 5 cm pour chaque axe).

5. Conclure.

Rappel : La fonction $x \to \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée la fonction $x \to \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

<u>Correction</u>

1. On appelle v la vitesse du lapin, et donc $2v$ celle du camion.

$\dfrac{AB}{AD} = \cos\theta \Rightarrow AD = \dfrac{AB}{\cos\theta} = \dfrac{4}{\cos\theta}$ d'où $t_1 = \dfrac{AD}{v_{Lapin}} = \dfrac{4}{v\cos\theta}$.

$\dfrac{BD}{AB} = \tan\theta \Rightarrow BD = 4\tan\theta$ d'où $t_2 = \dfrac{CB}{v_{Camion}} + \dfrac{BD}{v_{Camion}} = \dfrac{7}{2v} + \dfrac{4\tan\theta}{2v}$.

2. Le temps mis par le camion doit être supérieur à celui mis par le lapin (si le lapin veut éviter le camion…), il faut donc

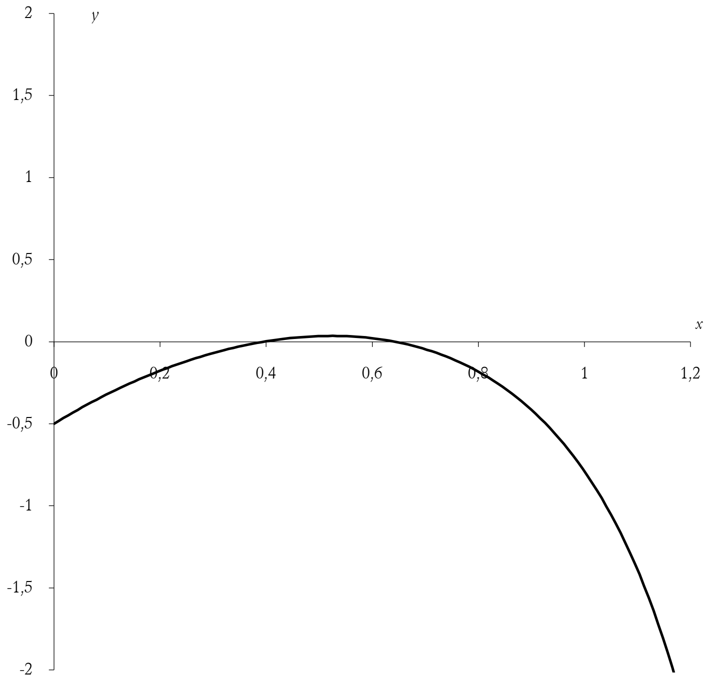
$$t_2 > t_1 \Leftrightarrow \frac{7+4\tan\theta}{2v} > \frac{4}{v\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{7+4\tan\theta}{2} > \frac{4}{\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta} > 0 \Leftrightarrow f(\theta) > 0.$$

3. Variations de f : $f'(t)=2\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{-4(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=2\frac{1-2\sin\theta}{\cos^2\theta}$, qui s'annule pour $\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$: lorsque $\theta<\frac{\pi}{6}$, $\sin\theta<\frac{1}{2}\Rightarrow f'(\theta)>0$, f croissante, $\frac{\pi}{6}$ donne l'abscisse du maximum de f, qui est alors de

$$f(\pi/6)=\frac{7}{2}+2\tan\frac{\pi}{6}-\frac{4}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{7}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{8}{\sqrt{3}}\approx 0,036.$$

Comme $f(0)=3,5-4=-0,5<0$ et que $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta)=-\infty$, la fonction s'annule deux fois : une première fois vers 0,39, une deuxième vers 0,65 ; le lapin doit donc choisir un angle dans ces zones-là pour avoir une chance de survivre…

4.



5. Le lapin doit donc « choisir » un angle entre 0,4 rad (environ 23°) et 0,65 rad (environ 37°) dans ces zones-là pour avoir une chance de survivre… Ceci dit tout ceci est assez formel…