I Nombre dérivé et tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère et A, le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

Taux de variation

Définition :

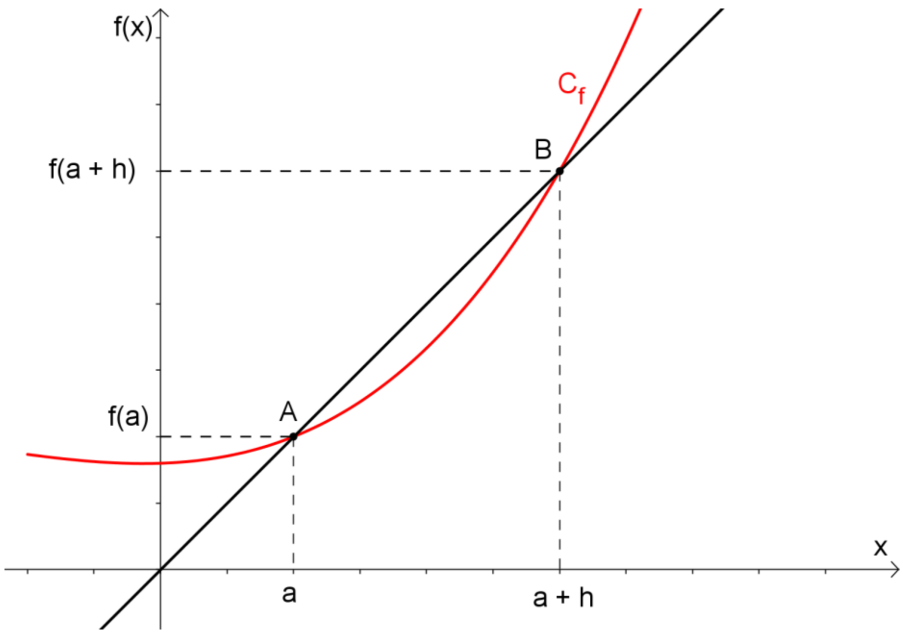
Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b, avec $a \neq b$, est le quotient $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Avec $b = a + h$ et $h \neq 0$, ce quotient s'écrit aussi $r(h) = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Interprétation graphique

Soient A et B les points de coordonnées A(a ;f(a)) et B(a + h ;f(a + h)).

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; c'est-à-dire $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.



Propriété :

Le taux de variation de f entre a et a + h est égal au coefficient directeur de la droite (AB).

Nombre dérivé

Supposons que pour des valeurs de h de plus en plus proches de zéro, (avec $h \neq 0$), r(h) devient de plus en plus proche d'un nombre fixé l.

On dit que l'on cherche la **limite** de r(h) quand h tend vers 0.

On écrit $\lim\limits_{h \to 0} r(h)$ et on lit « limite de r(h) quand h tend vers 0 ».

Définition :

On dit alors que la fonction **f est dérivable en a et que l est le nombre dérivé de f en a.**
Ce nombre dérivé est noté **f'(a)** avec :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

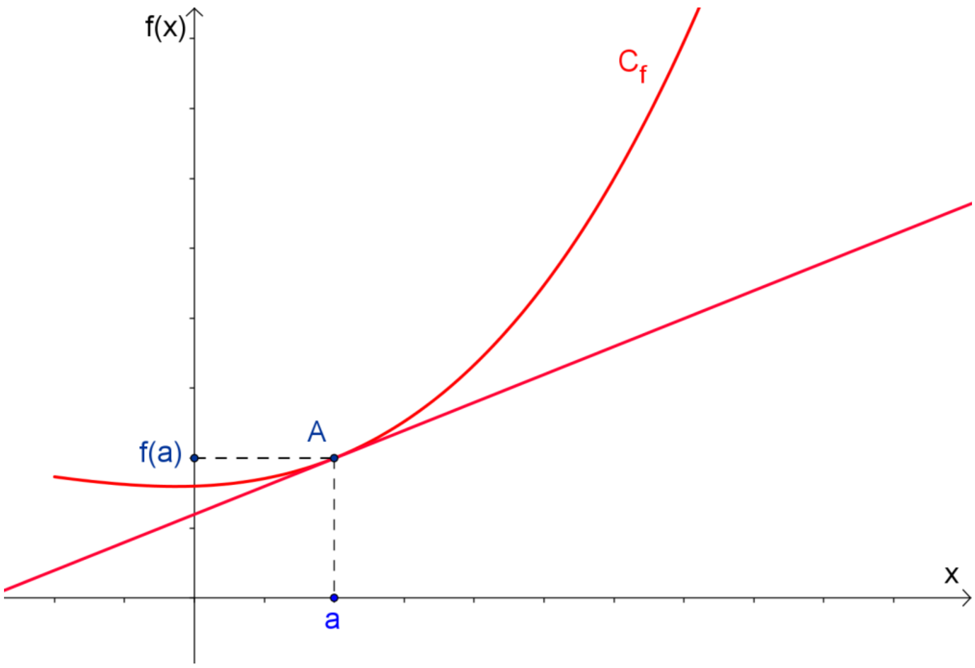
Exemple :

On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2$ et $a = 1$.
Alors $f(a + h) = f(1 + h) = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2$ et $f(a) = f(1) = 1^2 = 1$
Donc $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \dfrac{2h + h^2}{h} = 2 + h$
Et $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} (2 + h) = 2$

Tangente en un point à une courbe

Graphiquement, lorsque h tend vers 0, le point B de $\mathscr{C}_f$ se rapproche de A.
Le coefficient directeur de (AB) tend vers f'(a) lorsque B se rapproche de A.
Définition :

> Si f est dérivable en a, on appelle **tangente** en A à la courbe $\mathscr{C}_f$ la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur le nombre dérivé f'(a).



Vocabulaire :
Le point A(a ;f(a)) est le point de contact de la tangente et de $\mathscr{C}_f$.
Remarque :
Si f'(a) = 0, la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.

Equation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

II Fonction dérivée

Définition

Si f est une fonction dérivable en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé f'(x) de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2$.

Déterminons la fonction dérivée f' de f si elle existe.

On étudie le rapport $r(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$.

La limite de r(h) lorsque h tend vers 0 est 2a.

Donc la fonction f est dérivable sur ℝ et f'(a) = 2a.

La fonction dérivée f' de f est donc définie par f'(x) = 2x pour tout x de ℝ.

Dérivée des fonctions usuelles

Type de fonction	Fonction dérivée
Fonctions affines définies sur ℝ $f(x) = mx + p$	f est dérivable sur ℝ. et $f'(x) = m$
Fonctions puissances définies sur ℝ $f(x) = x^n$ avec n entier naturel non nul	f est dérivable sur ℝ. et $f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse définie sur $]-\infty ;0[\cup]0 ;+\infty[$. $f(x) = \frac{1}{x}$	f est dérivable sur $]-\infty ;0[\cup]0 ;+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée définie sur $[0 ;+\infty[$. $f(x) = \sqrt{x}$	f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Cas particuliers :

- Fonctions constantes (fonctions affines avec m = 0)
  $f(x) = p$ $\quad$ $f'(x) = 0$
- Fonctions linéaires (fonctions affines avec p = 0)
  $f(x) = mx$ $\quad$ $f'(x) = m$
- Fonction carré
  $f(x) = x^2$ $\quad$ $f'(x) = 2x$
- Fonction cube
  $f(x) = x^3$ $\quad$ $f'(x) = 3x^2$

III Dérivées et opérations

Dérivée de u + v

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Propriété :

La somme u + v est dérivable sur I et :

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Exemple :

La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 3x$ est la somme de deux fonctions u et v définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x$.

u et v sont deux fonctions dérivables sur ℝ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$.

Donc f est dérivable sur ℝ et $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + 3$.

Dérivée de u×v

Propriété :

Le produit u×v de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Exemple :

La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 2x(3x + 1)$ est le produit de deux fonctions u et v définies sur ℝ par $u(x) = 2x$ et $v(x) = 3x + 1$.

u et v sont deux fonctions dérivables sur ℝ avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3$.

Donc f est dérivable sur ℝ et $f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) = 2\times(3x + 1) + 2x\times 3$.

Soit $f'(x) = 6x + 2 + 6x = 12x + 2$

Dérivée de k×u (avec k constante réelle)

Propriété :

Le produit k×u, avec k constante réelle, est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 7x^2$.

$f(x)$ est de la forme $k\times u(x)$ avec $k = 7$ et $u(x) = x^2$.

Donc $f'(x) = k\times u'(x) = 7\times 2x = 14x$.

Dérivée de u^2

Propriété :

Le carré de u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2u'u$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x^2 + 1)^2$.

$f(x)$ est de la forme $(u(x))^2$ avec $u(x) = x^2 + 1$.

Or $u'(x) = 2x$

Donc $f'(x) = 2\times u'(x)\times u(x) = 2\times 2x\times(x^2 + 1) = 4x(x^2 + 1)$

Dérivée de $\frac{1}{v}$

Propriété :

L'inverse $\frac{1}{v}$ de v avec $v(x) \neq 0$ sur I, est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{1}{3x^2 + 4}$

f(x) est de la forme $\frac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = 3x^2 + 4$.

Or $v'(x) = 3\times 2x = 6x$

Donc $f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{6x}{(3x^2+4)^2}$

Dérivée de $\frac{u}{v}$

Propriété :

Le quotient $\frac{u}{v}$, avec $v(x) \neq 0$ sur I, est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur I = $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x + 1$.

f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$

Or $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

Donc $f'(x) = \frac{2\times(x+1) - (2x-1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$