1ère S

Exercices sur le produit scalaire dans le plan

1 Soit ABCD un carré de côté *a*. Calculer les produits scalaires
$p_1=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $p_2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; $p_3=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; $p_4=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$.

2 Soit A et B deux points tels que AB = *a*. On note I le milieu de [AB] et J le symétrique de B par rapport à A.
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BJ}$.

3 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = AC = 5 et BC = 4. Soit I le milieu de [BC].
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

4 Soit A, B, C trois points tels que AB = 4, AC = 6 et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$.
Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

5 Soit ABCD un carré de côté *a*.
On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].
Faire une figure codée en prenant (AB) « horizontale », A en bas à gauche, B à droite, C et D « au-dessus » de (AB).
Démontrer que (AJ) $\perp$ (DI).

6 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

7 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$.
Déterminer *k* tel que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ soient orthogonaux.

On rédigera ainsi :
« $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si …… ».

8 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB], C un point quelconque de $\mathcal{C}$ et D un point quelconque de [AB].
La droite passant par D et perpendiculaire à (AB) coupe (AC) en E.
Démontrer que l'on a : AD × AB = AE × AC.
Indication : calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$.

9 Soit ABCD un parallélogramme. On pose AB = *a* et AD = *b*.
Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ en fonction de *a* et *b*.

10 Soit ABCD un parallélogramme.
Démontrer que l'on a : $AC^2+BD^2=2\left(AB^2+AD^2\right)$.

11 Soit ABC un triangle équilatéral de côté *a* > 0.
On note G le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG}=3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}$.
Faire une figure en prenant (AB) « horizontale », A à gauche de B, C « au-dessus » de (AB).
Placer alors le point G sur la figure.

Calculer AG en fonction de *a* sans introduire de nouveaux points.

12 Soit ABC un triangle du plan *P*.
On note G son centre de gravité.
On rappelle que G est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1°) Démontrer que pour tout point M du plan *P*, on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\,\overrightarrow{MG}$.
2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

On rédigera la recherche de l'ensemble *E* en utilisant une chaîne d'équivalences selon le modèle suivant :

$M\in E$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$

si et seulement si …

si et seulement si …

si et seulement si …

On pourra utiliser le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ à la place du « si et seulement si ».

On conclura ainsi :

« L'ensemble *E* est … . »

13 Soit ABC un triangle du plan *P*.
Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$.

14 Soit A et B deux points distincts du plan *P*.
Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2$.

15 Soit A et B deux points distincts du plan *P*.

1°) On note I et J les points définis par $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$.
a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
b) Démontrer que pour tout point M du plan *P*, on a : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MJ}$.
2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $MA^2-4MB^2=0$.
Indications :
- introduire des carrés scalaires ;
- factoriser en utilisant des identités remarquables ;
- introduire les points I et J.

16 Soit A et B deux points distincts du plan.
Soit *D* et *D′* deux droites perpendiculaires à (AB). Ces droites coupent respectivement (AB) en M et N.
Soit P un point quelconque de *D* ; la droite (AP) coupe *D′* en Q.

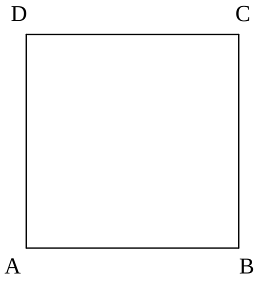
Comparer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PN}$.

Corrigé

Rappel de notation : Le produit scalaire de deux vecteurs se note $\vec{u} \bullet \vec{v}$ et non $\vec{u} \times \vec{v}$.

1 Calculs de produits scalaires

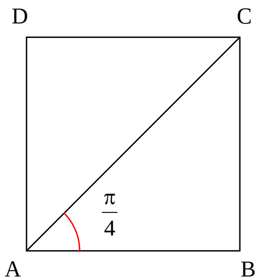
$p_1 = a^2$; $p_2 = 0$; $p_3 = -a^2$; $p_4 = -a^2$

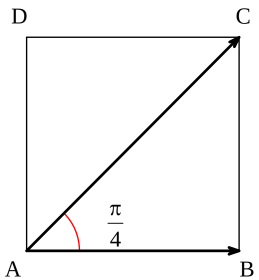


Solution détaillée :

• Calcul de $p_1 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

1ère méthode : on utilise la définition du produit scalaire de deux vecteurs.





$p_1 = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos \widehat{\text{BAC}}$ (on évite d'écrire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}\right)$ qui est un peu lourd, même si c'est ce que l'on fait en physique ; on évite aussi d'utiliser des normes)

Or ABCD est un carré donc ABC est rectangle isocèle en B.

Par suite $\widehat{\text{BAC}} = \frac{\pi}{4}$.

De plus, $\text{AC} = a\sqrt{2}$ (formule donnant la diagonale d'un carré).

D'où :

$p_1 = a \times a\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4}$

$p_1 = a \times a \cancel{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$ $\left(\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$p_1 = a^2$

2e méthode : on utilise les projetés orthogonaux

ABCD est un carré donc (BA) ⊥ (BC).
B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$p_1 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}$

$p_1 = \overrightarrow{AB}^2$ (carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$)

$p_1 = \text{AB}^2$

$p_1 = a^2$

N.B. : On pourrait aussi projeter orthogonalement B sur la droite (AC) mais c'est un peu moins facile.

• Calcul de $p_2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$

ABCD est un carré donc (AB) ⊥ (BC).

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
Donc $p_2 = 0$ (le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul).

Version maladroite :

On écrit :

$p_2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$

$= \text{AB} \times \text{BC} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BC}}\right)$

L'angle géométrique $\left(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BC}}\right)$ (angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$) est droit car le quadrilatère ABCD est un carré.

Donc

$p_2 = a \times a \times \cos\frac{\pi}{2}$

$= a \times a \times 0$

$= 0$

• Calcul de $p_3 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$

Comme ABCD est un carré, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires.
Donc $p_3 = -\text{AB} \times \text{CD} = -a^2$.

• Calcul de $p_4 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$

1[ère] méthode :

$p_4 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$

$p_4 = DA \times DB \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}}\right)$

Il est impératif de mettre le chapeau car il s'agit d'un angle géométrique de vecteurs.
Si l'on ne met pas de chapeau, alors il s'agit d'un angle orienté de vecteurs ce qui n'est pas possible car le plan n'est pas orienté.

$p_4 = a \times a\sqrt{2} \times \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$p_4 = a \times a\sqrt{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$p_4 = -\,a^2$

2[e] méthode :

$p_4 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$

$p_4 = \left(-\overrightarrow{DA}\right) \cdot \overrightarrow{DB}$

$p_4 = -\left(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}\right)$

$p_4 = -DA \times DB \times \cos\,\widehat{ADB}$

$p_4 = -a \times a\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$p_4 = -a^2$

3[e] méthode :

ABCD est un carré donc (AD) $\perp$ (AB).
A est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD).

$p_4 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$

$p_4 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA}$

$p_4 = -AD \times AD$

$p_4 = -\,a^2$

Pour le calcul de $p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, voici une manière extrêmement maladroite de faire le calcul.

$$\begin{aligned} p_1 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) \\ &= a \times \sqrt{2a^2} \times \cos\frac{\pi}{4} \\ &= a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\cancel{2}a^2}{\cancel{2}} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Pour la figure, tracer le segment [AB] horizontal avec A à gauche de B.
Placer I en marquant le codage.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\dfrac{a^2}{4}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BJ} = 2a^2$

Solution détaillée :

AB = a

I : milieu de [AB]

J : symétrique de B par rapport à A

• Calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} &= AB \times AI \\ &= a \times \frac{a}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

• Calcul de $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires de sens contraires.
Par suite, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} &= -\,IA \times IB \\ &= -\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \\ &= -\frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

• Calcul de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BJ}$

J est le symétrique A par rapport à B donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires de même sens.

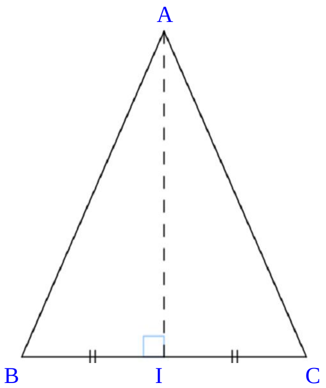
Par suite, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BJ} &= BA \times BJ \\ &= a \times 2a \qquad \text{(comme J est le symétrique de B par rapport à A, BJ = 2}a\text{)} \\ &= 2a^2\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ On utilise la méthode du projeté orthogonal.
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 8$

Solutions détaillée :

ABC : triangle isocèle en A
AB = 5
BC = 4
I : milieu de [BC]



Calculons $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

On ne connaît pas la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ donc on ne va pas utiliser l'expression trigonométrique du produit scalaire (expression de définition).

On va plutôt utiliser la méthode de calcul avec les projetés orthogonaux.

ABC est un triangle isocèle en A et I est le milieu de [BC].
Donc I est aussi le pied de la hauteur issue de A.
Par conséquent, I est le projeté orthogonal de A sur (BC).

Donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC}$
Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens (car I est le milieu de [BC]) donc
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BI \times BC = 2 \times 4 = 8$

Présentation simplifiée :

I est le pied de la hauteur issue de A car ABC est isocèle en A donc I est le projeté orthogonal de A sur (BC).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= BI \times BC \quad \text{car } \overrightarrow{BI} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires et de même sens} \\ &= 2 \times 4 \\ &= 8\end{aligned}$$

Remarques :

● Les longueurs de [AB] et [AC] ne nous servent à rien.
(on ne se sert pas de AB = AC = 5)

● On ne peut pas utiliser les longueurs BA et BC car on ne connaît pas l'angle $\widehat{ABC}$.
On pourrait cependant calculer le cosinus de cet angle en se plaçant dans le triangle ABI rectangle en I.
La méthode reviendrait en fait à la méthode par le projeté orthogonal.
On aime donc mieux éviter cette méthode.

$\boxed{4}$ **Calcul d'un angle**

$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

Solution détaillée :

AB = 4

AC = 6

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$

Calculons la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

D'où $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{12}{4 \times 6}$

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}$

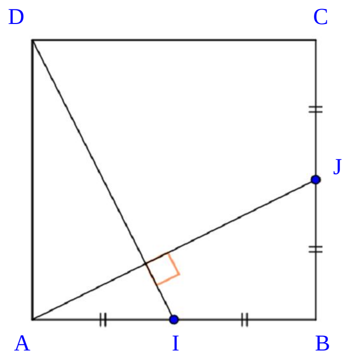
La mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$ est comprise entre 0 et π.

Donc $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ (car $\dfrac{\pi}{3}$ est le seul nombre compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à $\dfrac{1}{2}$).

$\boxed{5}$ On calcule $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI}$ en décomposant les vecteurs. On montre que ce produit scalaire est nul.

Solution détaillée :

ABCD carré de côté *a*
I : milieu de [AB]
J : milieu de [BC]



Démontrons que (AJ) ⊥ (DI).

$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right)$ (on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs)

$= \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}}_{0} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AI}}_{0}$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux

car les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux

$= AB \times AI - BJ \times DA$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens

car les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de sens contraires

$= \dfrac{a}{2} \times a - \dfrac{a}{2} \times a$
$= 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont orthogonaux.
Par suite, (AJ) ⊥ (DI).

Pour le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{DA}$, on pourrait très bien projeter orthogonalement

Étude d'une solution fausse :

Le projeté orthogonal du point J sur (AB) est le point B.
Le projeté orthogonal du point D sur (AB) est le point A.

Cette méthode n'est pas applicable car la droite (AB) ne supporte aucun des deux vecteurs qui interviennent dans le produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI}$.

Autre façon fausse dans la même veine :

On ne peut pas projeter sur $\overrightarrow{AJ}$ sur la droite (AB) et $\overrightarrow{DI}$ sur la droite (AD).

$\boxed{6}$ $\left\| \vec{u} + \vec{v} \right\| = \sqrt{6}$

Solution détaillée :

$\left\| \vec{u} \right\| = 1$
$\left\| \vec{v} \right\| = 3$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

Calculons $\left\| \vec{u} + \vec{v} \right\|$.

On va utiliser la propriété du produit scalaire d'un vecteur.
Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme.

$\left\| \vec{u} + \vec{v} \right\|^2$ est le carré de la norme de $\vec{u} + \vec{v}$.

$\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$ est le carré scalaire du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$\left\| \vec{u} + \vec{v} \right\|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$
$= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ (on applique l'identité remarquable scalaire)
$= \left\| \vec{u} \right\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \left\| \vec{v} \right\|^2$
$= 1^2 + 2 \times (-2) + 3^2$
$= 1 - 4 + 9$
$= 6$

Donc $\left\| \vec{u} + \vec{v} \right\| = \sqrt{6}$.

Solution fausse : $\left\| \vec{u}+\vec{v} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| + \left\| \vec{v} \right\|$

Cette égalité est fausse ; la norme d'une somme n'est pas égale à la somme des normes.

$\boxed{7}$ On traduit l'orthogonalité des deux vecteurs en disant que le produit scalaire est nul.
On trouve : $k = -3$.

Solution détaillée :

$\left\| \vec{u} \right\| = 5$

$\left\| \vec{v} \right\| = 4$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

Déterminons k tel que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ soient orthogonaux.

On raisonne par chaîne d'équivalences.

On peut remplacer le « si et seulement si » par la double flèche ⇔.

$\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \cdot \left(2\vec{u}+k\vec{v}\right) = 0$ *

si et seulement si $\vec{u} \cdot \left(2\vec{u}\right) + \vec{u} \cdot \left(k\vec{v}\right) + \vec{v} \cdot \left(2\vec{u}\right) + \vec{v} \cdot \left(k\vec{v}\right) = 0$ **

si et seulement si $2\left(\vec{u} \cdot \vec{u}\right) + k\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + 2\left(\vec{v} \cdot \vec{u}\right) + k\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = 0$

si et seulement si $2\vec{u}^2 + k\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + 2\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + k\vec{v}^2 = 0$

si et seulement si $2 \times 25 + 2k + 4 + 16k = 0$

si et seulement si $18k = -54$

si et seulement si $k = -3$

* Les parenthèses sont obligatoires : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \cdot \left(2\vec{u}+k\vec{v}\right) = 0$.

parenthèses obligatoires

Il n'y a pas véritablement de priorité.

** On développe en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

$\boxed{8}$ **Solution détaillée :**

Pour la figure, on prendra le segment [AB] « horizontal », le point A « à gauche » de B et C « au-dessus » de la droite (AB). On n'est pas obligé de placer le centre du cercle.

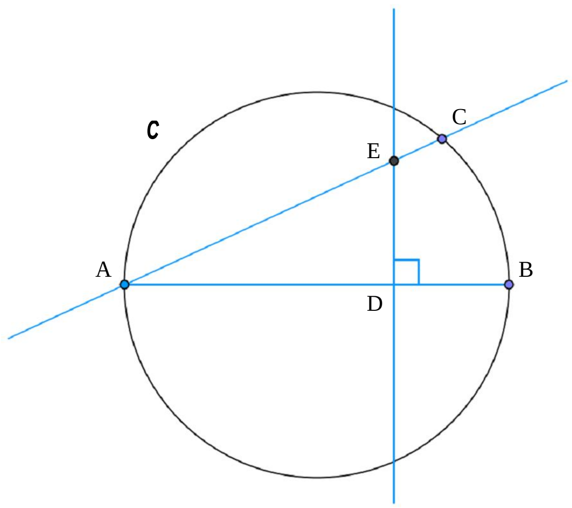
$\mathcal{C}$: cercle de diamètre [AB]

$C \in \mathcal{C}$

$D \in [AB]$

La droite passant par D et perpendiculaire à (AB) coupe (AC) en E.

Démontrons que AD × AB = AE × AC.



Le point D est le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).

Donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= AD \times AB$ car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens.

On sait que $C \in \mathcal{C}$ et que le segment [AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$, donc le triangle ABC est rectangle en C.

crochets article indéfini

(Attention à l'article « un » et aux crochets pour noter le segment car le mot diamètre est ici pris au sens de « segment » ; de même, il est important de donner la précision ABC rectangle en C).

On en déduit que C est le projeté orthogonal de B sur (AE).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$

$= AC \times AE$ car les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens.

On a donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \times AB = AE \times AC$.

On en déduit que $AD \times AB = AE \times AC$.

Autre méthode (sans utiliser le produit scalaire, en utilisant les cosinus) :

On écrit :

$\cos \widehat{EAD} = \dfrac{AD}{AE}$

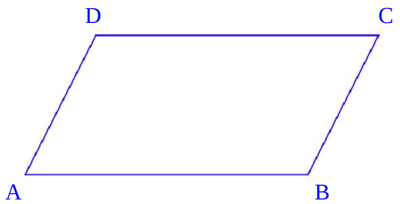
$\cos \widehat{CAB} = \dfrac{AC}{AB}$

Donc $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$ d'où $AD \times AB = AE \times AC$.

$\boxed{9}$ $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = b^2 - a^2$

Solution détaillée :

On commence par faire une figure. La disposition à adopter est : (AB) « horizontale », A « à gauche » de B, C et D « au-dessus » de (AB).



Calculons $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}$ en fonction de *a* et de *b*.

Méthode : on décompose les vecteurs.
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ d'après la règle du parallélogramme.
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$

On utilise l'égalité du parallélogramme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2$ (On applique l'identité remarquable scalaire $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} - \vec{v}\right)$)

$= AD^2 - AB^2$ (En effet, $\overrightarrow{AD}^2 = AD^2$ et $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$)

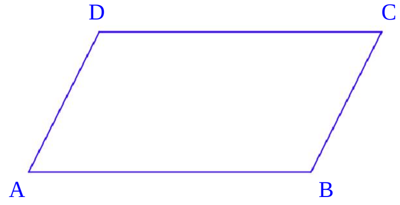
$= b^2 - a^2$

Le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AD}$ est égal au carré de la distance AD.

$\boxed{10}$ **Égalité d'Appolonius**

ABCD parallélogramme.

Faire une figure (on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D « au-dessus » de (AB), l'angle $\widehat{BAD}$ aigu).



Démontrons que $AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$.

Mêmes méthodes que dans l'exercice précédent.

Idée : $AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = ...$
On développe en utilisant les identités remarquables scalaires.

$AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2$ (car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ d'après la règle du parallélogramme)

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2$ (car $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ABCD étant un parallélogramme)

$= \overrightarrow{AB}^2 + \cancel{2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \cancel{2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{AD}^2$

$= 2\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AD}^2$

$= 2AB^2 + 2AD^2$

$= 2\left(AB^2 + AD^2\right)$

Le résultat de l'égalité d'Appolonius peut s'énoncer ainsi :

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs de tous les côtés.

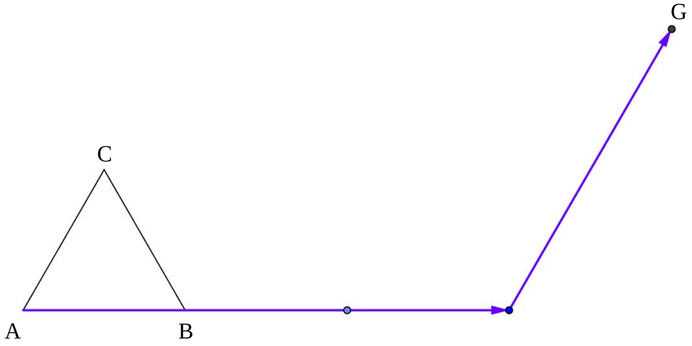
11 **Calcul de longueur**

Cet exercice montre l'utilisation de l'outil produit scalaire pour calculer une longueur.

Par égalité de position, on a : $\overrightarrow{AG}=3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}$; on calcule $\overrightarrow{AG}^2$; on trouve : $AG=a\sqrt{19}$.

Solution détaillée :

ABC triangle équilatéral de côté *a*.
$\overrightarrow{AG}=3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}$



Calculons AG en fonction de *a*.

On ne peut pas écrire AG = 3AB + 2AC (cf. explication ci-dessous).

On va mettre au carré le vecteur $\overrightarrow{AG}$.
On calcule le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AG}$.

Par contre, on va pouvoir utiliser les carrés scalaires en écrivant $AG^2=\overrightarrow{AG}^2$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}^2&=\left(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)^2\\&=9\overrightarrow{AB}^2+2\times\left[\left(3\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{AC}\right)\right]+4\overrightarrow{AC}^2\\&=9AB^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4AC^2\\&=9AB^2+12\times AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{3}+4AC^2\\&=9a^2+12a^2\times\frac{1}{2}+4a^2\\&=19a^2\end{aligned}$$

Donc : $AG=a\sqrt{19}$.

Solution tentante mais complètement fausse :

$\left\|\overrightarrow{AG}\right\|=\left\|3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|3\,\overrightarrow{AB}\right\|+\left\|2\,\overrightarrow{AC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{AB}\right\|+2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=3a+2a=5a$

En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\neq\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$.

Les exercices **12** à **15** portent sur la recherche d'ensembles de points définis à l'aide du produit scalaire (il s'agit de recherche de **lieux géométriques**).
Dans tous les cas, on se ramène à un produit scalaire nul.
On reconnaît alors un **lieu géométrique d'orthogonalité**.

---

12 **Recherche d'un ensemble de points**

1°) **Démontrons que pour tout point M du plan *P*, on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\,\overrightarrow{MG}$.**

$$\begin{aligned}\forall M\in P\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CG}\quad\text{(relation de Chasles)}\\&=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\end{aligned}$$

Or G est le centre de gravité du triangle ABC.
L'énoncé rappelle que G est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Donc $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

On en déduit que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\,\overrightarrow{MG}$.

2°) **Déterminons l'ensemble *E* = { M ∈ *P* / $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$ }.**

On fait trois étapes.

On réduit la somme vectorielle en un seul vecteur.

1ère partie : réduction de la somme vectorielle

D'après la question 1°),

$\forall M\in P\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ (on n'intercale pas de texte comme « on a » entre le quantificateur et l'égalité)

2e partie : chaîne d'équivalences

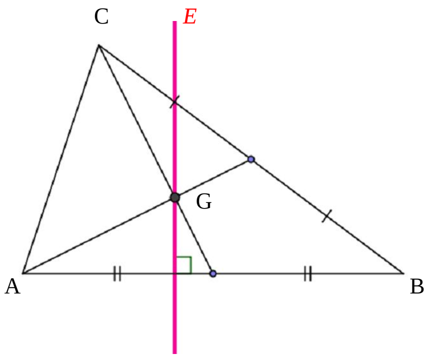
$M\in E$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$
si et seulement si $\left(3\overrightarrow{MG}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$
si et seulement si $3\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=0$ (on applique la règle du cours : $\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$)
si et seulement si $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
si et seulement si $\overrightarrow{MG}\perp\overrightarrow{AB}$ (on peut aussi s'arrêter à la ligne d'avant)

On ne peut écrire : (MG) ⊥ (AB).
En effet, lorsque M = G, la droite (MG) n'existe pas midi.

3e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

E est la droite passant par G et qui est perpendiculaire à (AB).

[On exprime la conclusion de la manière la plus claire, la plus concise possible, sans parler du point M.]



On ne fait pas figurer le point M sur la figure.

13 Recherche d'un ensemble de points

L'ensemble *E* est la droite passant par A perpendiculaire à (BC).

Solution détaillée :

ABC triangle

Déterminons l'ensemble $E = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AC}\}$.

On rédige par chaîne d'équivalences.

$M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AC}$
si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ (attention, c'est bien 0 et pas $\vec{0}$)
si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{CB} = 0$ *
si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CB}$ (⊥ : symbole d'orthogonalité pour les vecteurs) **

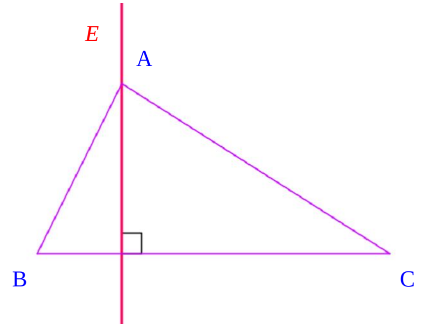
* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ (on peut aussi dire que c'est la forme soustractive de la relation de Chasles)

** Cette ligne est facultative.

Conclusion :

E est la droite passant par A perpendiculaire à (BC).

On peut aussi dire que *E* est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On fait une figure et on trace l'ensemble *E* en rouge.
On fait figurer le nom de l'ensemble *E* à côté.



14 Recherche d'un ensemble de points

L'ensemble *E* est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Solution détaillée :

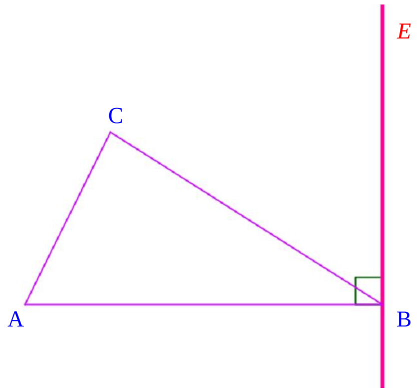
A ≠ B

Déterminons l'ensemble $E = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = AB^2\}$.

$M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = AB^2$
si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}^2 = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right) = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM}$

E est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Faire une figure en prenant (AB) horizontale, A à gauche de B.
Tracer l'ensemble *E* en rouge.
Marquer le codage d'orthogonalité.



15 **Recherche d'un ensemble de points**

Solution détaillée :

1°) $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (1) $\qquad \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ (2)

a) **Exprimons $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.**

(1) équivaut successivement à :

$\overrightarrow{IA} - 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

$-\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ (I est donc le symétrique de A par rapport à B)

(2) équivaut successivement à :

$\overrightarrow{JA} + 2\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

$3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$-3\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b)

Démontrons que $\forall$ M $\in$ *P* $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$.

$$\begin{aligned}\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \quad \text{(relation de Chasles)}\\ &= -\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\end{aligned}$$

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$

Démontrons que $\forall$ M $\in$ *P* $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MJ}$.

$$\begin{aligned}\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\right) \quad \text{(relation de Chasles)}\\ &= 3\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB}}_{\vec{0}}\end{aligned}$$

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MJ}$

2°) **Déterminons l'ensemble *E* = {M $\in$ *P* / $MA^2 - 4MB^2 = 0$}.**

M $\in$ *E* si et seulement si $MA^2 - 4MB^2 = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2 = 0$

si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$

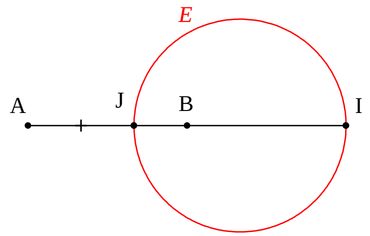
si et seulement si $\left(-\overrightarrow{MI}\right) \cdot \left(3\overrightarrow{MJ}\right) = 0$

si et seulement si $-3\left(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$

L'ensemble *E* est le cercle de diamètre [IJ].



Pour construire *E*, on place le milieu de [IJ].

$\boxed{16}$ **Hypothèses :** A et B deux points distincts du plan.

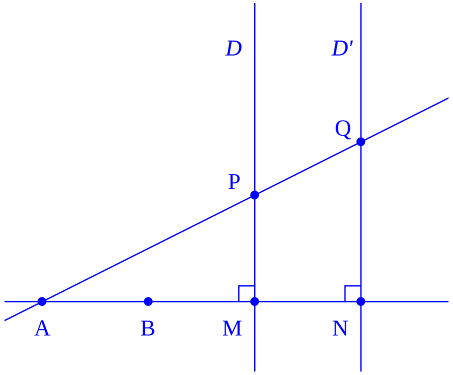
$D \perp (AB)$ et $D' \perp (AB)$

$D \cap (AB) = \{ M \}$; $D' \cap (AB) = \{ N \}$

$P \in D$

$(AP) \cap D' = \{ Q \}$

Faire une figure.
Marquer le codage des angles droits.



Comparons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN}$ (car le projeté orthogonal de Q sur (AB) est N) *

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN}$ (car le projeté orthogonal de P sur (AB) est M) **

On en déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN}$.

* et ** : Il est possible de dire que le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{MQ}$ sur la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{MN}$ et que le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{PN}$ sur la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Autres formulations possibles :

① Le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ a pour projeté orthogonal $\overrightarrow{MN}$ sur la droite (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{PN}$ a pour projeté orthogonal $\overrightarrow{MN}$ sur la droite (AB).

② Le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{MN}$ sur la droite (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{PN}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{MN}$ sur la droite (AB).

Classification des exercices par compétences

Calculer un produit scalaire en utilisant la définition	$\boxed{1}$ et $\boxed{2}$
Calculer un produit scalaire en utilisant la propriété de projection orthogonale*	$\boxed{3}$, $\boxed{8}$, $\boxed{16}$
Calculer un angle en utilisant un produit scalaire	$\boxed{4}$
Calculer la longueur d'un segment ou la norme d'un vecteur à l'aide du produit scalaire	$\boxed{6}$ et $\boxed{11}$
Démontrer que deux droites sont perpendiculaires à l'aide du produit scalaire	$\boxed{5}$
Exprimer que deux vecteurs sont orthogonaux à l'aide du produit scalaire	$\boxed{7}$
Calcul de produits scalaire en utilisant des décompositions de vecteurs	$\boxed{9}$ et $\boxed{10}$
Recherche d'ensembles de points définis par un produit scalaire	$\boxed{12}$, $\boxed{13}$, $\boxed{14}$, $\boxed{15}$

* **Comprendre la notion de « projeté orthogonal ».**