Travail en groupe :

Exercice 1 :

Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :

- 10 % de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015+n$.

1. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que
   $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 250$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2500$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. Préciser v_0.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0,9^n + 2500$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 2 :

Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger.
Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %.

Partie A

On modélise le nombre de films proposés par une suite géométrique (u_n) où n désigne le nombre de mois depuis l'ouverture du site. On a donc $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2 et donner le résultat arrondi à l'unité.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Partie B

Dans cette partie, on souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

1. On veut déterminer cette valeur à l'aide d'un algorithme.
   Recopier et compléter les lignes L3, L5 et L7 pour que l'algorithme donne le résultat attendu.

L1 :	**Initialisation**	Affecter à U la valeur 500
L2 :		Affecter à N la valeur 0
L3 :	**Traitement**	Tant que U ......
L4 :		Affecter à N la valeur $N+1$
L5 :		Affecter à U la valeur ......
L6 :		Fin Tant que
L7 :	**Sortie**	Afficher ......

2. On veut maintenant utiliser une méthode algébrique Calculer le nombre de mois recherché.

Partie C

En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante :
chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 25000$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,9 et préciser son premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier n, $v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$.

Exercice 3 :

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 % puis baisse de 300 euros.
Le premier versement a lieu le 25 février 2016.
On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n-ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$.
Les résultats seront donnés sous forme approchée à $0,01$ près si nécessaire.

1. (a) Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

   (b) Calculer u_2.

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1,015 u_n - 300$$

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 700
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 4\,500$ faire
	u prend la valeur $1,015 \times u - 300$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5 700			
Valeur de n	0			
$u > 4\,500$ (vrai/faux)	vrai		vrai	faux

   (b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20000$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$.

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

   (a) Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

   (b) Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.

   (c) Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

   (d) Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?