I Equations du second degré

Forme canonique d'un polynôme du second degré

Définition :

La fonction qui à tout réel x associe $ax^2 + bx + c$, où a est un nombre non nul est une **fonction polynôme du second degré**.
Les réels a, b et c sont les **coefficients** de ce polynôme.

Exemples :

- Les coefficients du polynôme $5x^2 - 7x + 8$ sont 5 ; -7 et 8.
- Les coefficients du polynôme $8x^2 - 3$ sont 8 ; 0 et -3.

Remarque :
Un polynôme du second degré est aussi appelé **trinôme** du second degré.

Définition :

Le réel $b^2 - 4ac$, noté Δ, est appelé **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Exemples :

- Le discriminant du polynôme $5x^2 - 7x + 8$ est $\Delta = (-7)^2 - 4\times5\times8 = 49 - 160 = -111$.
- Le discriminant du polynôme $8x^2 - 3$ est $\Delta = (0)^2 - 4\times8\times(-3) = 96$.

Propriété :

Pour tout polynôme $ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

$a(x - \alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Remarque :

On montre que $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Le polynôme s'écrit alors : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

Exemple :
Soit $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$.
Les coefficients sont $a = -2$, $b = 8$ et $c = 10$; donc $\Delta = 8^2 - 4\times(-2)\times10 = 64 + 80 = 144$

D'où : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{-4} = 2$ et $\beta = -\dfrac{144}{-8} = 18$.

La forme canonique de f est donc : $f(x) = -2(x - 2)^2 + 18$.

Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

Propriété :

Le signe du discriminant Δ permet de déterminer le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a est un réel différent de 0.

- Si **$\Delta > 0$**, l'équation du second degré a **deux solutions distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si **$\Delta = 0$**, l'équation du second degré a **une seule solution** :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré **n'a pas de solution réelle**.

Exemples :

- Soit l'équation $2x^2 + 4x - 6 = 0$.
  Le discriminant est $\Delta = 4^2 - 4\times2\times(-6) = 16 + 48 = 64 = 8^2$
  Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :
  $$x_1 = \frac{-4-8}{4} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-4+8}{4} = 1.$$
- Soit l'équation $3x^2 + x + 1 = 0$.
  Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4\times3\times1 = 1 - 12 = -11$.
  Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

II Factorisation et signe d'un polynôme du second degré

Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété :

Soit le polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a différent de 0.
- Si **$\Delta > 0$** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines de ce polynôme.
- Si **$\Delta = 0$** : $f(x) = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double de ce polynôme.
- Si **$\Delta < 0$** : $f(x)$ ne peut pas se factoriser en facteurs du premier degré.

Signe d'un polynôme du second degré

Propriété :

Soit le polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a différent de 0.
- Si **$\Delta > 0$** : $f(x)$ s'annule pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$ (on suppose $x_1 < x_2$), alors :
  - le signe de $f(x)$ est le signe **contraire de celui de a si x est compris entre les racines.**
  - le signe de $f(x)$ est du signe **de celui de a si x n'est pas compris entre les racines.**

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	signe de (-a)	0	signe de a	

- Si **$\Delta = 0$**, $f(x)$ s'annule pour $x = x_0$: son signe est celui de a pour $x \neq x_0$
- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ a **le même signe que a pour tout réel x.**

Exemple :

Etudions le signe du polynôme $2x^2 + 4x - 6$.
Les deux solutions de l'équation $2x^2 + 4x - 6 = 0$ sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$2x^2 + 4x - 6$		+	0	-	0	+	

III Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

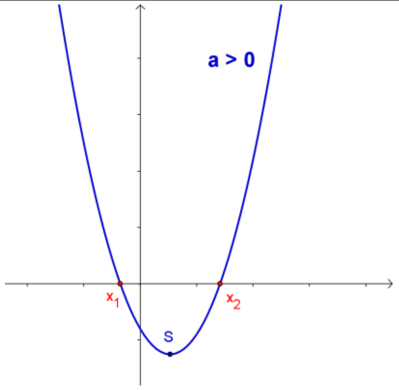
Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a est un réel non nul.

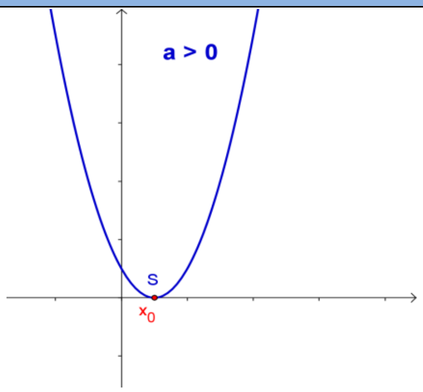
<u>Propriété</u> :

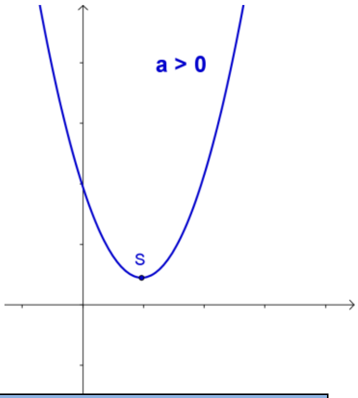
> Dans le plan rapporté à un repère, la représentation graphique de la fonction f définie par :
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (avec a réel non nul)}$$
>
> est une **parabole** dont le sommet S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$, où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
>
> Cette parabole admet pour **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$.

<u>Six exemples de paraboles selon les signes de Δ et de a</u>.

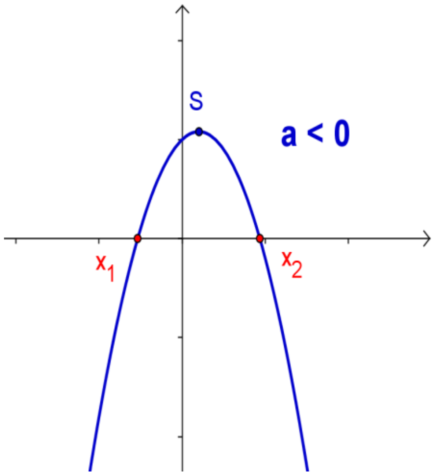
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

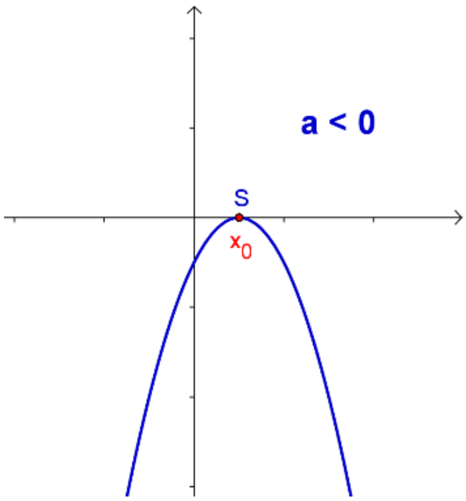


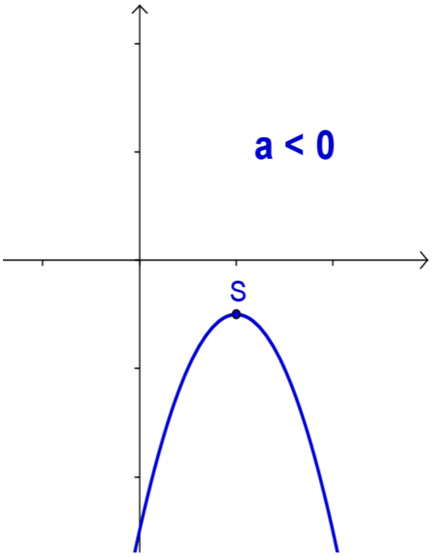




$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$







Formes de f(x) $\Delta > 0$	Formes de f(x) $\Delta = 0$	Formes de f(x) $\Delta < 0$
développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$ canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$ canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ factorisée : $f(x) = a(x - x_0)^2$	développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$ canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ pas de forme factorisée