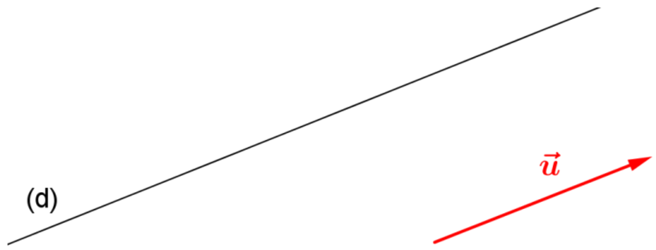
Equations cartésiennes d’une droite

I) Vecteur directeur d’une droite :

1) Définition

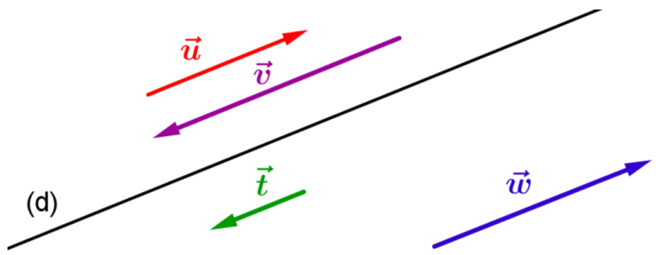
Soit (d) une droite du plan.

Un vecteur directeur d’une droite (d) est un vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (d).



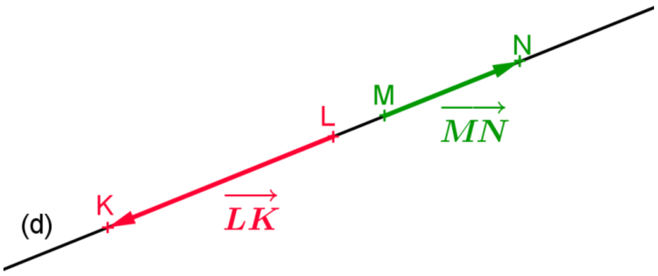
Exemple 1 :

Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.



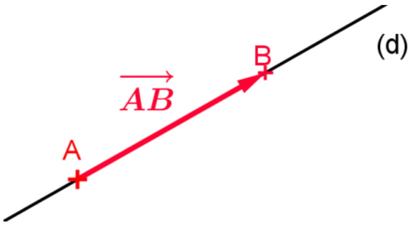
Remarque : Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (d).Tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de cette droite.

Exemple 2 :

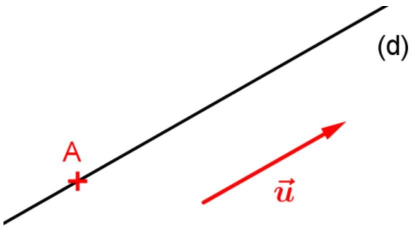


Remarques :

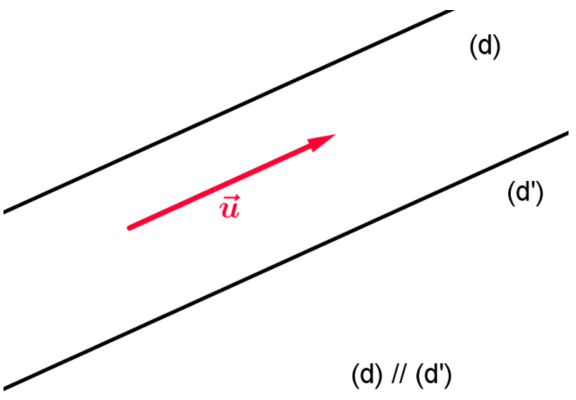
• Deux points distincts quelconques de la droite (d) définissent un vecteur directeur de cette droite.



• La donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul définissent une unique droite (d).



• Deux droites (d) et (d') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.



II) Equations cartésiennes d'une droite

1) Propriété

Toute droite (d) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$

avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\,(\ -b\ ;\ a)$

Remarque : Une droite (d) admet une infinité d'équations cartésiennes
En effet, si $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ est une équation cartésienne de (d), alors pour tout réel $\boldsymbol{k}$ non nul, $\boldsymbol{kax} + \boldsymbol{kby} + \boldsymbol{kc} = \mathbf{0}$ est une autre équation de la même droite.

2) Propriété réciproque

L'ensemble des points M $(x\,;\,y)$ vérifiant l'équation : $ax + by + c = 0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(\ -b\ ;\ a)$

Démonstration :

Soit (d) une droite, A$(x_A\ ,\ y_A)$ un point de (d) et $\vec{u}\,(p\,;\,q)$ un vecteur directeur de (d).

Soit M $(x\ ;\ y)$ un point du plan.

« M appartient à (d) » équivaut à :

« $\overrightarrow{AM}\ (x - \boldsymbol{x_A}\ ;\ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A})$ et $\vec{u}\,(p\,;\,q)$ sont colinéaires », qui équivaut à :

« $\boldsymbol{q}\ (x - \boldsymbol{x_A}\ ) - \boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A})\ = 0$ qui équivaut à :

$\boldsymbol{q}\ x - \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{x_A} - \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y_A}) = 0$
Posons $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{q}\ ;\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{x_A} - \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y_A})$.
Cette dernière équation s' écrit $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ et $\vec{u}$, vecteur directeur de (d), a pour coordonnées $(-\boldsymbol{b}\ ;\ \boldsymbol{a})$.

Si $\boldsymbol{a} = 0$, alors $\boldsymbol{b} \neq 0$, $ax + by + c = 0$ équivaut à : $y = -\dfrac{c}{b}$. Attention l'ensemble des points M cherché, est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Si $\boldsymbol{b} = 0$, alors $\boldsymbol{a} \neq 0$, $ax + by + c = 0$ équivaut à : $x = -\dfrac{c}{a}$. Attention l'ensemble des points M cherché, est donc une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

3) Exemples

Exemple 1 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite, connaissant un point et un vecteur directeur

Soit (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) un repère du plan
Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (-1; 3).

Réponse : Soit M un point de d de coordonnées : M (x ; y)

Les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$ ($\boldsymbol{x-1}\,;\boldsymbol{y+1}$) et $\vec{u}$ (**-1; 3**) sont colinéaires si, et seulement si,

($\boldsymbol{x-1}$)(**3**) – ($\boldsymbol{y+1}$)(**-1**) = 0 équivaut à :

$3x-3+y+1=0$ équivaut à :

$\boldsymbol{3x+y-2=0}$ **Une équation cartésienne de la droite d est :** $\boldsymbol{3x+y-2=0}$

Exemple 2 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite connaissant deux points distincts de la droite

Soit (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) un repère du plan.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points A (5 ; 13) et B (10; 23).

Réponse : Les points A et B appartiennent à la droite d donc le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ est un vecteur directeur de cette droite.

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (10 – 5 ; 23 – 13), soit $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (5 ; 10) en divisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}$.(1 ; 2) vecteur directeur aussi de la droite d.

Donc b = 1 et a = -2

Une équation cartésienne de la droite d est donc de la forme : $-\boldsymbol{2}x+y+c=0$

Comme le point A (**5** ; **13**) appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation :

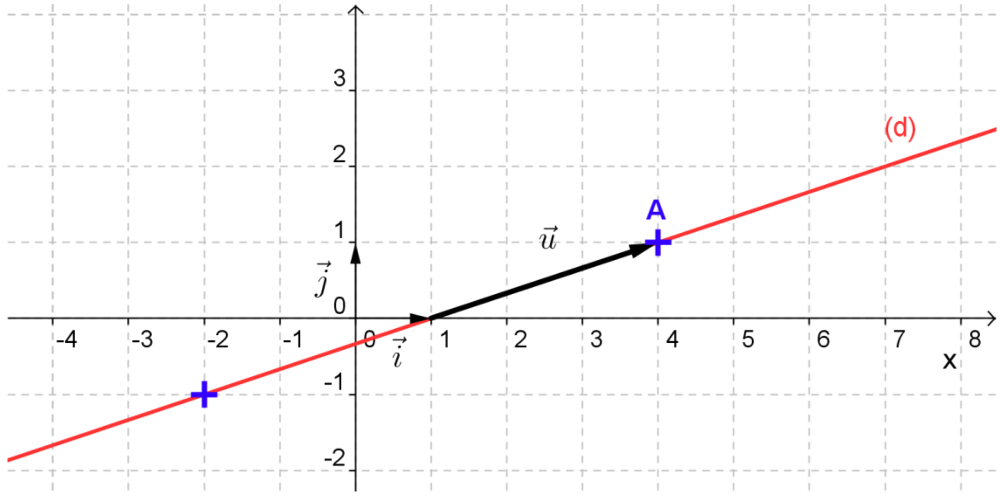
$-2\times\boldsymbol{5}+\boldsymbol{13}+c=0$ $-10+13+c=0$

D'où : **c = – 3**

Une équation cartésienne de la droite d est donc : $\boldsymbol{-2x+y-3=0}$

Exemple 3 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique

Soit (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d, tracée ci-dessous



Réponse :

Méthode 1 : Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d)
On lit graphiquement $\vec{u}$ (3 ; 1) Donc a = -1 et b = 3

Une équation cartésienne de la droite d est de la forme :

$-x + 3y + c = 0$ Comme le point A (4 ; 1) appartient à la droite (d), ses coordonnées vérifient l'équation :

$-4 + 3 + c = 0$ $\quad c = 1$

Une équation cartésienne de la droite d est : $\boldsymbol{-x + 3y + 1 = 0}$

Méthode 2 : On prend deux points de la droite, par exemple : A (4 ; 1) et B (-2 ; -1) et on applique la même méthode qu'à l'exemple 2.

4) Equation réduite d'une droite

Soit (d) une droite du plan.

• Si (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un unique couple de réels (m,p) tel que l'équation $y = mx + p$ soit une équation de (d) qui peut aussi s'écrire sous la forme : $mx - y + p = 0$

• Si (d) est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un unique réel c tel que l'équation $x = c$ soit une équation de (d).

Remarque : Soit (d) une droite **non parallèle à l'axe des ordonnées.**

Son équation réduite peut donc s'écrire sous la forme: $y = mx + p$ **.**

● Nous avons vu dans les classes précédentes, que le nombre $\boldsymbol{m}$ **est le coefficient directeur de la droite (d).**

L'équation réduite peut aussi s'écrire sous la forme $mx - y + p = 0$. Un vecteur directeur de cette droite est donc (1 ; $\boldsymbol{m}$)

● Cette droite (d) est la représentation graphique de la fonction affine :
$f(x) = mx + p$.

Exemple:

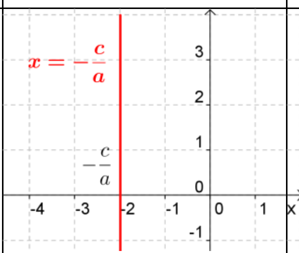
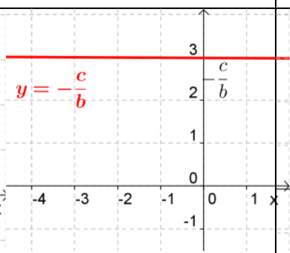
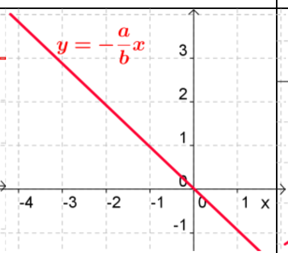
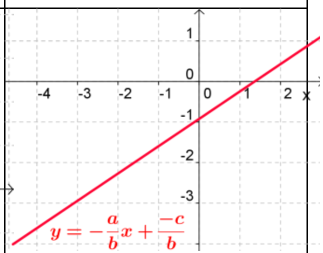
Soit (d) la droite d'équation cartésienne: $4x + 2y + 3 = 0$

● **Son équation réduite est de la forme:** $\boldsymbol{y = -2x - \frac{3}{4}}$

• Un vecteur directeur de cette droite est (1 ; **-2**)

• Cette droite est la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = -2x - \frac{3}{4}$.

III) Récapitulatif : Equations cartésiennes et équations réduites

	Cas où $b = 0$ **et** $a \neq 0$	**Cas où** $a = 0$ **et** $b \neq 0$	**Cas où** $c = 0$ **et** $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$	**Cas où** $c \neq 0$ **et** $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$
Equation cartésienne	$ax + 0 + c = 0$ $ax + c = 0$	$0 + by + c = 0$ $by + c = 0$	$ax + by + 0 = 0$ $ax + by = 0$	$ax + by + c = 0$
Equation réduite	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{c}{b}$	$y = -\frac{a}{b}x$	$y = -\frac{a}{b}x + -\frac{c}{b}$
Représentation graphique				

IV) Positions relatives de deux droites

1) Propriété

Deux droites (d) et (d'), d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si : $a\,b' - a'b = 0$

2) Démonstration :

Soit d la droite d'équation : $ax + by + c = 0$ et d' la droite d'équation $a'x + b'y + c' = 0$
$\vec{u}\,(-b\ ;\ a)$. est un vecteur de directeur de d et $\vec{u}'\,(-b'\ ;\ a')$. est un vecteur de directeur de d' .
d et d' sont parallèles équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires
ce qui équivaut à : $-b\ a' - a\ (-b') = 0$
ce qui équivaut à : $a\ b' - a'b = 0$.

3) Exemples

Exemple 1 : Dans un repère du plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$,
la droite d_1 a pour équation : $2x + y - 3 = 0$ et d_2 a pour équation : $-4\,x - 2y + 5 = 0$.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Réponse :

$\overrightarrow{u_1}\,(-1\ ;\ 2)$.et $\overrightarrow{u_2}\,(2\ ;\ -4)$.sont deux vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.

$-1 \times (-4) - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$

Les droites d_1 et d_2 sont donc parallèles.

Exemple 2 : Dans un repère du plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$,
la droite d_1 a pour équation : $3x + 2y - 3 = 0$ et d_2 a pour équation : $-x + 2y + 5 = 0$.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Réponse :

$\overrightarrow{u_1}\,(-2\ ;\ 3)$.et $\overrightarrow{u_2}\,(-2\ ;\ -1)$.sont deux vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.

$-2 \times (-1) - (-2) \times 3 = 2 + 6 = 8 \neq 0$

Les droites d_1 et d_2 ne sont donc pas parallèles.

Remarque:

Soit la droite (d) d'équation : $y = mx + p$ et (d') : $y' = m'x + p'$
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $m = m'$

En effet les vecteurs de coordonnées $(1\ ;\ m)$ et $(1\ ;m')$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d').
D'où : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $m = m'$