# Fiche d'exercices 5 : Suites numériques - Généralités

## Suites numériques - Généralités

### *Exercice 1*

On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $i$ est un nombre réel |
| **Traitement :** | Pour $i$ allant de 0 à 5 |
| | Afficher $i\times(i-1)$ |
| | Fin de la boucle Pour |

1. Donner les différentes valeurs affichées par cet algorithme.
2. Donner l'expression d'une suite $(u_n)$ dont les six premiers termes sont les valeurs affichées par l'algorithme.

### *Exercice 2*

Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

a. $u_n = 2{\cdot}n^2 - n + 1$    b. $v_n = \dfrac{2{\cdot}n+1}{2-3{\cdot}n}$

c. $w_n = \sqrt{3n+25}$    d. $x_n = 3{\cdot}\left[1+(-1)^n\right]+2$

### *Exercice 3*

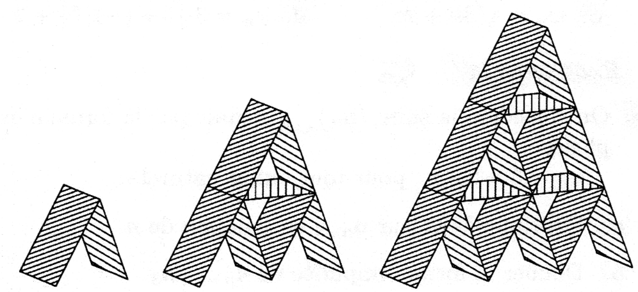
1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :
   $u_n = 5 + 2\times n$ pour tout entier naturel $n$.
   a. Exprimer la valeur $u_{n-3}$ en fonction de $n$.
   b. Donner la forme simplifiée de $u_{n-3}+u_3$.
   c. Donner la forme simplifiée de $u_{n-5}+u_5$.
   d. Soit $k$ et $n$ deux entiers tels que $k\leqslant n$. Montrer que $u_k+u_{n-k}$ a sa valeur indépendante de $k$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :
   $v_n = 2n^2 - 3n + 2$ pour tout entier naturel $n$.
   On souhaite étudier la différence entre deux termes consécutifs de la suite $(v_n)$ :
   a. Donner l'expression du terme $v_{n+1}$ en fonction de $n$.
   b. Etudier la valeur de $v_{n+1}-v_n$ en fonction de $n$.

### *Exercice 4*

1. On définie la suite par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :
   $u_0=5$ ; $u_{n+1}=2{\cdot}u_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   Déterminer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. On définie la suite par récurrence $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la relation :
   $v_1=-2$ ; $v_{n+1}=\dfrac{1-v_n}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
   Déterminer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)$.

### *Exercice 5*

On considère la construction d'un château de cartes :



$u_0$    $u_1$    $u_2$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape $n$.

1. Déterminer les quatres premiers termes de la suite $(u_n)$.

2. Pour tout entier naturel $n$, déterminer une expression du terme $u_{n+1}$ en fonction du terme précédent $u_n$ et du rang $n$.

3. A quel étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes ?

## Exercice 6

On considère l'algorithme suivant :

```
     Variables : i est un nombre réel
                 a est un nombre réel
Initialisation : a prend la valeur 2
    Traitement : Pour i allant de 0 à 5
                     Afficher a
                     a prend la valeur a×2
                 Fin de la boucle Pour
```

1. Donner les différentes valeurs affichées par cet algorithme.

2. Parmi les exrpressions choisies qu'elle$(s)$ peuvent être l'expression d'une suite $(u_n)$ afin que ses six premiers termes soient ceux affichés par l'algorithme à la question précédente :

a. $u_n = 2{\cdot}n, \quad \forall n{\in}\mathbb{N}$

b. $u_n = 2^n, \quad \forall n{\in}\mathbb{N}$

c. $u_n = 2^{n+1}, \quad \forall n{\in}\mathbb{N}$

d. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2{\cdot}u_n, \ \forall n{\in}\mathbb{N} \end{cases}$

e. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2{\cdot}u_{n+1}, \ \forall n{\in}\mathbb{N} \end{cases}$

f. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2{\cdot}u_{n-1}, \ \forall n{\in}\mathbb{N}^* \end{cases}$

## Exercice 7

1. On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2{\cdot}u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n{\in}\mathbb{N} \end{cases}$$

Donner les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

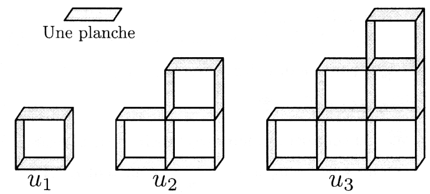
2. On considère la suite $(v_n)$ définie par :

$$v_0 = -3 \quad ; \quad v_{n+1} = n - 2{\cdot}v_n \quad \text{pour tout } n{\in}\mathbb{N}$$

Donner les quatre premiers termes de la suite $(v_n)$.

## Exercice 8

On construit successivement un objet comme le représente le schéma ci-dessous :




Pour tout entier naturel $n$ non-nul, on note $u_n$ le nombre de planches nécessaires pour construire la figure à l'étape $n$.

Donner une relation de récurrence caractérisant la suite $(u_n)$.

## Exercice 9

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \quad \text{pour tout } n{\in}\mathbb{N}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite $(u_n)$

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang $n$ est définie par la relation :

$$v_n = \frac{1}{2}{\cdot}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite $(v_n)$.

3. Faire une conjecture quant à l'égalité des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

4. a. Donner en fonction de $n$, la valeur de :

$$v_{n+1} - \frac{1}{3}v_n$$

b. En déduire l'égalité des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

## Exercice 10

**1.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$u_n = -2n^2 - 3n + 2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Etudier la monotonie de chacune des suites ci-dessous, en étudiant la fonction $f$ vérifiant la relation :

$u_n = f(n) \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

**2.** La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$v_n = \frac{2n^2+1}{2n+5} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{2x+5}$$

**a.** Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f$.

**b.** Etablir que la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ admet pour expression sur $\mathcal{D}_f$ :

$$f'(x) = \frac{4x^2+20x-2}{(2x+5)^2}$$

**c.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

**d.** Justifier que la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang 1.

**e.** Peut-on dire que la suite $(v_n)$ est croissante sur $\mathbb{N}$ ?

## Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - {u_n}^2 - 1 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

**1.** A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | |

**2.** En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

## Exercice 12

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

**1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang $n$ est définie par :

$u_n = -32n + 102 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Montrer que cette suite est décroissante.

**2.** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang $n$ est définie par :

$v_n = \sqrt{2n-1} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Montrer que cette suite est croissante.

**3.** Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang $n$ est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite $(w_n)$ est croissante.

## Exercice 13

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

**1.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)$ est strictement croissante.

**2.** La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$v_n = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Montrer que $(v_n)$ est strictement décroissante à partir du rang 2.

## *Exercice 14*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{2n+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

   a. Simplifier l'expression : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1$.

   b. En déduire les variations de la suite $(u_n)$ sur $\mathbb{N}$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{1-n}{1+n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

   a. Déterminer une expression simplifiée de $v_{n+1}-v_n$.

   b. En déduire les variations de la suite $(v_n)$ sur $\mathbb{N}$.

## *Exercice 15*

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{5^n}{n+2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :

$$v_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$

   a. Donner l'expression réduite de : $v_{n+1}-v_n$.

   b. En déduire que la suite $(v_n)$ est croissante pour $n$ supérieur à 2.

## *Exercice 16*

1. On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_n = \frac{n^2+10}{2n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Justifier que $(u_n)$ est croissante à partir du rang 3.

2. On considère la suite $(v_n)$ définie par :

$$v_n = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Montrer que $(v_n)$ est décroissante à partir du rang 2.

# Suites numériques – Sujets de devoirs

## Exercice 1

Les suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ sont définies pour tout entier naturel $n$, par :

$$u_n = 1 - 3n \ ; \qquad v_0 = \frac{4}{9} \ \textit{et} \ v_{n+1} = \frac{3v_n}{2} \ ; \qquad w_n = \frac{n^2}{2^n}$$

1. Compléter le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | |
| $v_n$ | | | | | |
| $w_n$ | | | | | |

2. Démontrer que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.
3. Démontrer que la suite $(v_n)$ est strictement croissante.
4. On veut démontrer que la suite $(w_n)$ est décroissante à partir du rang 3.
   (a) Etudier le signe de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ sur $[0; +\infty[$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $w_{n+1} - w_n = \dfrac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$
   (c) En déduire que si $n \geq 3$ alors $w_{n+1} \geq w_n$ et conclure.

## Exercice 2

Etudier les variations des suites suivantes :

1. $(u_n)$ définie par $u_n = 2n^2 - 3n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $(v_n)$ définie par $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $(w_n)$ définie par $w_n = \dfrac{3n-1}{2-5n}$ pour $\in \mathbb{N}$.

## Exercice 3

Etudier le sens de variation des suites $(u_n)$ suivantes :

1. $u_n = n^2 - 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

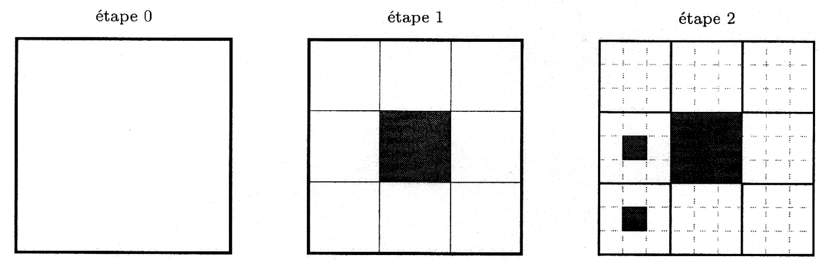
## Exercice 4

Un carré de $1\,\text{m}^2$ est divisé en neuf carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-dessous. On colorie le carré central en gris (étape 1).

Les huit carrés restants sont à leur tout divisés en neuf carrés égaux comme indiqué sur la figure. On colorie les huit carrés centraux obtenus en gris (étape 2).

On continue de la même façon à colorier puis diviser le carré.

Pour tout entier naturel $n$, on désigne par $A_n$ l'aire en $\text{m}^2$ de la surface totale coloriée après $n$ coloriages.




1. Calculer $A_1$.
2. Compléter l'étape 2 sur la figure précédente.
3. Calculer $A_2$.
4. En remarquant qu'à chaque étape, on colorie $\frac{1}{9}$ de la partie non coloriée, justifier que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a

$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$

## Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

2. Compléter le programme suivant qui permet de calculer et afficher les premiers termes de la suite $(u_n)$.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n

  u PREND_LA_VALEUR __________
  AFFICHER "\nu_0 = "
  AFFICHER u
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR

    u PREND_LA_VALEUR __________
    AFFICHER "\nu_"
    AFFICHER k
    AFFICHER " = "

    AFFICHER __________
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. Tester le programme avec $n = 10$.
4. Conjecturer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
5. Que vaut l'expression

$$1 + \underbrace{5 + \ldots + 5}_{n \text{ fois}}$$

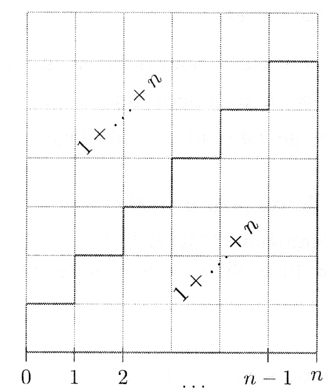
en fonction de $n$.

## *Exercice 6*

1. Écrire un programme qui demande $n$ et affiche dans l'ordre croissant les $n$ premiers entiers naturels. Le tester
2. Écrire un programme qui demande $n$ et affiche dans l'ordre décroissant les $n$ premiers entiers naturels. Le tester
3. Écrire un programme qui demande $n$ et calcul et affiche la somme des $n$ premiers entier naturels : $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.
4. Taper le programme suivant :

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
l EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  S PREND_LA_VALEUR 0
  TRACER_SEGMENT_Bleu (0,0)->(n+1,0)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (n+1,0)->(n+1,n)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (n+1,n)->(0,n)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (0,n)->(0,0)
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    TRACER_SEGMENT_Rouge (k,0)->(k,k)
    TRACER_SEGMENT_Rouge (k,k)->(k+1,k)
    TRACER_SEGMENT_Rouge (k+1,0)->(k+1,k)
    S PREND_LA_VALEUR S + k
    FIN_POUR
  AFFICHER "\n S = "
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

5. Tester le programme avec $n = 2, 3, 4, \ldots, 10$.
À chaque fois, comparer $S$, l'aire du domaine rouge, l'aire du rectangle bleu et le complémentaire du domaine rouge dans le rectangle bleu.
6. Conjecturer une expression de $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ en fonction de $n$.



## Exercice 7

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{5}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. a. Dans un repère orthonormal (unité graphique 1cm), tracer, sur l'intervalle [0,10], la courbe $(\Gamma)$ représentative de la fonction : $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, ainsi que la droite d d'équation y=x.
   b. Construire graphiquement les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.
   c. Conjecturer graphiquement le comportement de la suite $(u_n)$ (limite et sens de variation).
3. Reprendre le raisonnement de la question dans le cas où $u_0$=8.

## Exercice 8

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel $n$, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si $f$ est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f$ ainsi que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$.

1. a) Sur l'axe des abscisses, placer $u_0$ puis construire $u_1$, $u_2$ et $u_3$ en laissant apparents les traits de construction.
   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite $(u_n)$ ?
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a $u_n - 1 > 0$.
   b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite $(u_n)$ par une autre méthode, en déterminant une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   Pour tout nombre entier naturel $n$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
   b) Pour tout nombre entier naturel $n$, exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
   c) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.