

Définition - propriétés algébriques

Ex 1 : QCM

Plusieurs réponses sont possibles.

1) La fonction exp :

- a) s'annule en 0
- b) s'annule en 1
- c) est égale à sa dérivée
- d) est l'unique fonction f telle que $f' = f$

2)

- a) $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- b) $\exp\left(\frac{1}{a}\right) = -\exp(a)$
- c) $\exp\left(\frac{a}{b}\right) = \exp(a) - \exp(b)$
- d) $\exp(a)^4 = \exp(4a)$

3) Le nombre $\exp\left(5 + \frac{1}{5}\right)$ est égal à :

- a) $\frac{\exp(26)}{\exp(5)}$
- b) $\exp(26) - \exp(5)$
- c) $-\exp(5^2)$
- d) $\exp(5) \times \exp\left(\frac{1}{5}\right)$

Ex 2 : Vrai ou faux - Logique

- 1) (P1) : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- 2) (P2) : $\exists x \in \mathbb{R}, \exp(x) = 0$
- 3) (P3) : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$
- 4) (P4) : $\exists x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$
- 5) (P3) est la négation de (P4)
- 6) (P3) est la négation de (P2)

Ex 3 : (P1) : $f' = f$ et (P2) : $f(0) = 1$

1) Dans chaque cas, indiquer si la fonction f , dérivable sur \mathbb{R} , vérifie les propriétés (P1) : $f' = f$ et (P2) : $f(0) = 1$

- a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = 0$ d) $f(x) = 2 \exp(x)$
- 2) Donner toutes les fonctions f qui vérifient (P1).
- 3) Donner une fonction f qui vérifie (P1) et (P2).
- 4) En existe-t-il d'autres ?

La notation e^x

Ex 4 : Calculs

Simplifier les expressions suivantes :

- 1) $e^{-x}(e^x)^5$ 2) $\frac{e^{3x} e^{2x}}{2e^x}$ 3) $\frac{e^{3x} + e^x}{e^x}$ 4) $(e^{-3x} - 1)^2 - (e^{-3x} + 1)^2$

Ex 5 : Cosinus hyperbolique – sinus hyperbolique

Soit les fonctions ch et sh définies par :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer que pour tout réel x :

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \quad \text{et} \quad \text{ch}(2x) = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$$

Ex 6 : Suites géométriques

Dans chaque cas, montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le 1^{er} terme.

- 1) $u_n = e^{4n}$ 2) $u_n = 3e^{\frac{n}{2}}$ 3) $u_n = \frac{e^{n+3}}{5}$ 4) $u_n = \frac{3e}{e^{n+1}}$

Ex 7 : Fonction impaire

Soit $f : x \mapsto \frac{(2x-1)e^x - 2x - 1}{e^x - 1}$ et C_f la courbe représentative de f .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Montrer que C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque : On dit que f est une fonction impaire.

Ex 8 : Ensembles de définition

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

- 1) $f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$ 2) $f(x) = \frac{1}{e^x}$
- 3) $f(x) = \frac{5e^x - 1}{e^x - e^{-x}}$ 4) $f(x) = \sqrt{1 - e^{3x}}$

Ex 9 : QCM

- 1) Pour tous réels a et b , $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$
- 2) Pour tous réels a et b , $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$
- 3) Il existe un réel a et un réel b , tels que $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$
- 4) Il existe un réel a et un réel b , tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$

Ex 10 : Dérivées

Dans chacun des cas, justifier que f est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

- 1) $f(x) = (4x - 1)e^x$ sur $I = \mathbb{R}$
- 2) $f(x) = \frac{2 - 3e^x}{1 - e^x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
- 3) $f(x) = (3e^x - 2)^3$ sur $I = \mathbb{R}$
- 4) $f(x) = \frac{2}{3e^x + 2}$ sur $I = \mathbb{R}$
- 5) $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
- 6) $f(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^x}$ sur $I = \mathbb{R}$

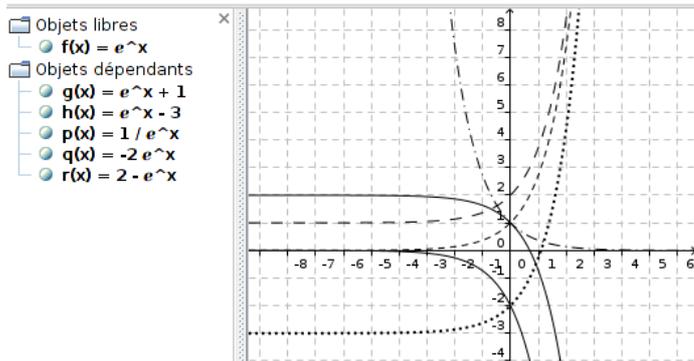
Étude de la fonction exponentielle

Ex 11 : Vrai ou faux

- 1) La fonction exp n'est définie que sur \mathbb{R}^+ .
- 2) La fonction exp est strictement positive sur \mathbb{R} .
- 3) La fonction exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- 4) La courbe représentative de la fonction exp admet une asymptote horizontale.
- 5) La courbe représentative de la fonction exp admet une asymptote verticale.
- 6) La méthode d'Euler permet d'obtenir une bonne approximation de la courbe représentative de la fonction exp.
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$
- 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

Ex 12 : A partir de la courbe représentative de la fonction exp

Identifier les courbes de chacune des fonctions.



Ex 13 : Variations sans calculer la dérivée.

Soit les fonctions f , g et h définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{7}, \quad g(x) = \frac{1}{2e^x + 5} \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{e^x + 5}$$

Déterminer le sens de variation de chacune de ces fonctions à partir de celui de la fonction exp.

Ex 14 : Variations

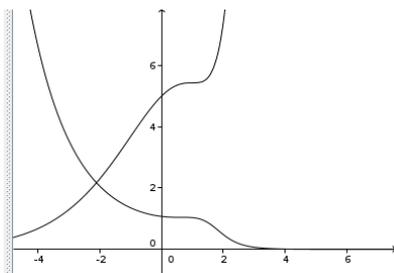
Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la fonction f .

Ne calculer la dérivée que si c'est nécessaire !

- | | |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1) $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ | 4) $f : x \mapsto (x^2 - x + 1)e^x$ |
| 2) $f : x \mapsto 4 - 3x - 4e^x$ | 5) $f : x \mapsto (e^x + x)^3$ |
| 3) $f : x \mapsto 2 - x + \frac{4}{e^x + 1}$ | 6) $f : x \mapsto x + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ |

Ex 15 : Attention aux apparences

- Objets libres
- $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$
 - $g(x) = \frac{200}{(50x^2 - 165x + 186)e^x}$
- Objets dépendants



- Associer chaque fonction à sa représentation graphique.
- f est-elle croissante sur \mathbb{R} ?
- g est-elle décroissante sur \mathbb{R} ?

Ex 16 : Équations - inéquations

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

Remarque :

L'unique solution sur \mathbb{R} de l'équation $e^x = k$ (avec $k > 0$) se note $x = \ln k$

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1) $e^x + e = 0$ | 4) $e^3 - e^x \leq 0$ |
| 2) $(e - e^x)^2 = 0$ | 5) $(e^x - e^2)(e^x - e) > 0$ |
| 3) $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$ | 6) $\frac{-3e^x}{e^x - e} < 0$ |

Ex 17 : Limites

Déterminer les limites suivantes

- | | |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x)e^x$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10}{e^x - 1}$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - 2x)e^x$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 3x}{x}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2e^x + 3x - 1$ | 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e}{x - 1}$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2e^x + 3x - 1$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^x - 1}{2e^x - 3}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$ |
| 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x - 1}{2e^x - 3}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 10e^x}{x - 2 - 5e^x}$ |

Fonctions du type $x \mapsto e^{u(x)}$

Ex 18 : Maîtriser le cours - Vrai ou faux

Soit u une fonction dérivable sur $I = [-2, +\infty[$.

- | | |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{u(x)} > 0$ | 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = +\infty$ |
| 2) La fonction e^u est dérivable sur I . | 5) $e^{u(x)} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ |
| 3) La dérivée de e^u est e^u sur I . | 6) $e^{u(x)} \leq \frac{1}{e^3} \Leftrightarrow u(x) \leq -3$ |

Ex 19 : Équations - Inéquations

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $e^{2x^2 - 3x + \sqrt{x}} + e = 0$ | 4) $e^{2x-3} + \pi \leq 3$ |
| 2) $e^{-x} - e^{2x-3} = 0$ | 5) $\frac{x-2}{e^{x+1}} < 0$ |
| 3) $e^{3x} - 9 = 6$ | 6) $(e^{4x} - e^2)(e^{-x} - e) > 0$ |

Ex 20 : Signe d'une fonction

Étudier le signe des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} .

1) $f : x \mapsto (-x^2 + 2x)e^{-x^2 + 3x + 5}$ 2) $g : x \mapsto \frac{1}{e^{x+1}} - \frac{1}{e^{2x}}$

Ex 21 : Ensemble de définition

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f : x \mapsto \frac{3e^x - 1}{\sqrt{e^x - e^{-x}}}$ 2) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{2 - e^{2x}}}{e^x - \frac{1}{2}}$

Ex 22 : Tableaux de variation

Déterminer dans chaque cas le tableau de variation (avec les limites) de la fonction f .

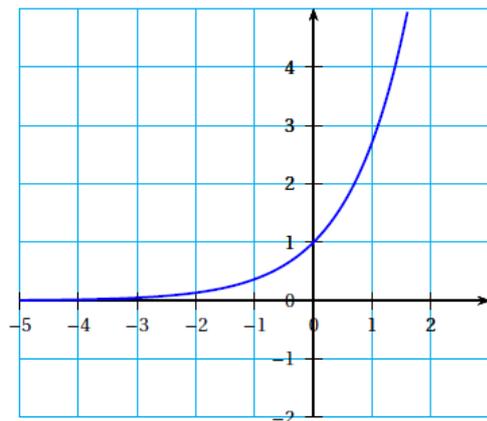
1) $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 1}$ 2) $f(x) = e^{x^2 - ex + 1}$ 3) $f(t) = 5e^{2t}(2t + 1)$

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 23 : Baccalauréat S Liban 27 mai 2015 – ex 3

Fonction exp – tangente – conjecture et résolution graphique – résolution d'équations

On considère la courbe \mathcal{C} d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note \mathcal{D}_m la droite d'équation $y = mx$.

- Dans cette question, on choisit $m = e$.
Démontrer que la droite \mathcal{D}_e , d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1.
- Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m , le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D}_m .
- Démontrer cette conjecture.

Ex 24 : Baccalauréat S Centres étrangers 10 juin 2015 – ex 3

Fonction exp – suites convergentes – limites – raisonnement par récurrence – algorithme

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

- Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

- Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
- Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
- En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

- Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
- Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
- Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .

- Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

- Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

```

u ← 0,02
n ← 0
Lire M
Tant que ...
    ...
    ...
Fin Tant que
Afficher n
    
```

- Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Ex 25 : Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015 – ex 2

Fonction exp – Minimum

Pour chaque réel a , on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

- Montrer que pour tout réel a , la fonction f_a possède un minimum.
- Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

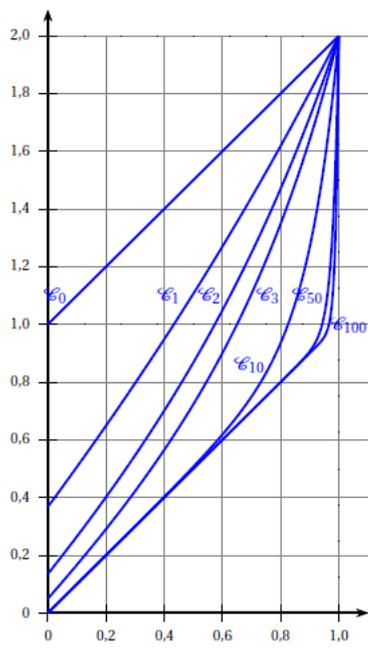
Ex 26 : Baccaauréat S Asie 16 juin 2015 – ex 3

Fonction exp – suites de fonctions – tangente – conjecture – suites - limites

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

On note \mathcal{C}_n la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Quelques-unes des courbes \mathcal{C}_n sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Montrer que les courbes \mathcal{C}_n ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
- À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes \mathcal{C}_n pour les grandes valeurs de n ? Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0; 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = f_n(x)$.

- Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .
- Dans cette question, on suppose que $0 \leq x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Ex 27 : Baccaauréat S Amérique du nord – 30 mai 2014 – ex 2

Fonction exp – position relative – distance – maximum

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3.$$

On note \mathcal{C}_f la représentation graphique de la fonction f et \mathcal{D} la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{D}

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

- Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g(x) > 0$.
- La courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} ont-elles un point commun? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe \mathcal{C}_f , N le point d'abscisse x de la droite \mathcal{D} et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

- Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
- On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
- Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0; +\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.

Ex 28 : Baccaauréat S Polynésie – 13 juin 2014 – ex 4

Fonction exp – tangente commune – position relative – limites

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

- Démontrer que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
- Étude de la position relative de la courbe \mathcal{C}_g et de la droite Δ . Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
 - Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
 - Justifier que, pour tout réel x , $h(x) = x \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right)$. En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
 - On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction h sur \mathbb{R} .
 - En déduire que, pour tout réel x , $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.
 - Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe \mathcal{C}_g et de la droite Δ ?
- Étude de la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
 - Pour tout réel x , développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$.
 - Déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Ex 29 : Baccaauréat S Antilles Guyane – 19 juin 2014 – ex 2

Fonction exp – fonction auxiliaire – théorème des bijections – tangente – position relative

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

- Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur \mathbb{R} (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
En déduire le signe de $g(x)$.
- Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
- On appelle f' la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} . Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$
- En déduire le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur \mathbb{R} . Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
- Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
 - Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite T .

Ex 30 : Baccaauréat S Asie – 19 juin 2014 – ex 3

Fonction exp – dérivée seconde – théorème des bijections – valeur approchée et calculatrice

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1; 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g .

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geq 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f .
Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.
2. On note f'' la fonction dérivée de f' .
Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0 .
4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; x_0]$.
b. Calculer $f(2)$.
En déduire que sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

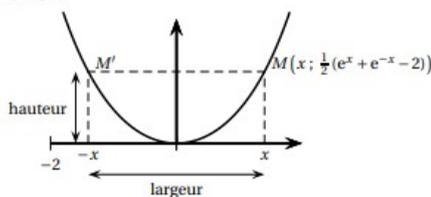
Ex 31 : Baccaauréat S Métropole – 22 juin 2018 – ex 1

Fonction exp – équation avec changement de variable – algorithme dichotomie – théorème des bijections

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ». On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein. On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2.$$

- a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$.
- b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.
b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$.
c. En posant $X = e^x$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln(2 + \sqrt{5})$.
4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0	$\ln(2 + \sqrt{5})$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

- a. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
 - b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α .
5. On considère l'algorithme suivant où les variables a , b et m sont des nombres réels :

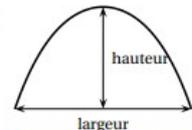
```

Tant que  $b - a > 0$ , 1 faire :
     $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$ 
    Si  $e^m + e^{-m} - 4m - 2 > 0$ , alors :
         $b \leftarrow m$ 
    Sinon :
         $a \leftarrow m$ 
    Fin Si
Fin Tant que
    
```

- a. Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3. Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ? On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.
- b. Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

m	a	b	$b - a$
2,5	2	3	1
...

6. La Gateway Arch, édifée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-contre. Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch.