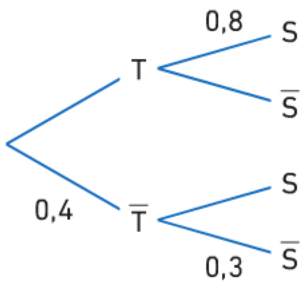
Probabilité conditionnelle

Ex. 1 — À l'aide de l'arbre pondéré ci-dessous, déterminer les probabilités demandées.



1. $P(T)$ 2. $P_{\overline{T}}(\overline{S})$ 3. $P_{\overline{T}}(S)$
4. $P(T \cap \overline{S})$ 5. $P(\overline{T} \cap S)$

Ex. 2 — Dans la savane, il y a 20 % de lions, 30 % d'éléphants, et 50 % de zèbres. La probabilité que ces animaux aient faim est respectivement de 50 %, 20 % et 30 %.

1. On croise un animal. Quelle est la probabilité qu'il soit affamé ?
2. On croise un animal affamé. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un lion ?

Ex. 3 — On présente les résultats d'une enquête sur les gauchers datant de 2007 portant sur une population de 8735 élèves de cinq régions françaises.
On a recensé 1130 gauchères et gauchers réparti en 681 garçons et 449 filles.
On choisit au hasard un élève ayant participé à cette enquête.

1. Quelle est la probabilité que cet élève soit gaucher ?
2. Quelle est la probabilité que cet élève soit une fille gauchère ?
3. Quelle est la probabilité que cet élève soit une fille sachant qu'elle est gauchère ?

Ex. 4 — Dans une population, 65 % des individus ont les yeux marron, 15 % ont les yeux marron, 15 % ont les cheveux blonds et 5 % ont les yeux marron et es cheveux blonds.
On choisit un individu au hasard dans cette population.

1. Quelle est la probabilité que cet individu ait les yeux marron ou les cheveux blonds ?
2. On constate que cet individu a les yeux marron. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi les cheveux blonds ?
3. On constate que cet individu a les cheveux blonds. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi les yeux marron ?

Évènements indépendants

Ex. 5 — Pour une certaine expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ et $P(A \cap B) = 0,06$.
Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Ex. 6 — Pour une certaine expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B indépendants tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,7$.
Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Ex. 7 — Pour une certaine expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B tels que $P(\overline{A}) = 0,6$ et $P_B(A) = 0,6$.
Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Ex. 8 — Une urne contient sept jetons : trois noirs notés N1, N2 et N3 et quatre rouges notés R1, R2, R3 et R4.
Un joueur prend au hasard un jeton dans l'urne.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   — A : "Le jeton est noir" ;
   — B : "Le jeton porte un numéro impair".
2. Décrire par une phrase les évènements $A \cup B$ et $A \cap B$ et calculer leurs probabilités.
3. Calculer $P_B(A)$, $P_A(B)$, $P_B(\overline{A})$, $P_{\overline{B}}(A)$.
4. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Vers le bac

Ex. 9 — Un chirurgien orthopédique commande des prothèses chez trois fabricants A, B et C. Le tiers des prothèses provient de A, 30 % provient de B et le reste provient de C. La proportion de prothèses défectueuses est de 0,3 % chez A, de 0,6 % chez B et de 0,5 % chez C.
On prend au hasard la fiche d'un patient qui s'est fait poser une prothèse par ce médecin. Quelles est la probabilité que la prothèse portée soit défectueuse ?

Ex. 10 — Un concessionnaire automobile fait le bilan de ses ventes. 60 % des véhicules vendus sont d'occasion, les autres sont neufs. Certains ont un moteur diesel et les autres un moteur essence. Parmi les véhicules d'occasion, 25 % ont un moteur diesel et parmi les véhicules neufs, 30 % ont un moteur essence.
On choisit au hasard le dossier d'un véhicule vendu cette année. On note :
—N l'évènement : "C'est un véhicule neuf" ;
—D l'évènement : "C'est un véhicule diesel".

1. Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Traduire par une phrase l'évènement $N \cap D$ puis calculer sa probabilité.
3. En déduire la probabilité conditionnelle $P_D(N)$ (on donnera une valeur arrondie à 10^{-2} près).
4. Les évènements N et D sont-ils indépendants ?

Ex. 11 — On sait que 1 % d'une population est atteinte d'une maladie orpheline. On dispose de tests de dépistage de cette maladie ainsi que des données suivantes :
—Si la personne est atteinte de cette maladie, alors le test est positif dans 90 % des cas ;
—SI la personne n'est pas atteinte par cette maladie, alors le test est néanmoins positif dans 5 % des cas.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement atteinte par cette maladie sachant que son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne ne soit pas atteinte par cette maladie sachant que son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité qu'une personne soit atteinte par cette maladie si son test est négatif ?

Ex. 12 — Un club de sport propose à ses adhérents trois types de pratique : la compétition, le loisir et la remise en forme. Chaque adhérent ne peut pratiquer qu'une sorte d'activité. La répartition des adhérents par sexe est est donnée par le tableau suivant :

	Compétition	Loisir	Remise en forme	Total
Hommes	33 %	13 %	12 %	58 %
Femmes	3 %	9 %	30 %	42 %
Total	36 %	22 %	42 %	100 %

On prend la fiche d'un adhérent au hasard et on note :
—C l'évènement "la fiche est celle d'une personne pratiquant le sport en compétition" ;
—L l'évènement "la fiche tirée est celle d'une personne pratiquant le sport comme loisir" ;
—R l'évènement est celle d'une personne pratiquant le sport pour se remettre en forme" ;
—F l'évènement : "la fiche tirée est celle d'une femme".

Déterminer les probabilités suivantes :

1. $P(L)$ 2. $P(\overline{F})$ 3. $P_F(C)$
4. $P_R(H)$ 5. $P(F \cap R)$ 6. $P(\overline{F} \cup L)$

Ex. 13 — Une personne s'est créée une adresse de courrier électronique. Au bout de quelques semaines, elle constate que 90% des messages reçus dans sa boîte mail sont des spams. Elle installe donc un logiciel qui classe les messages en deux catégories : normaux et indésirables.
Après utilisation, elle constate que 98 % des spams reçus sont classés indésirables et que 1 % des messages normaux reçus sont classés en indésirables. On note S l'évènement "le message reçu est un spam" et n l'évènement "le message reçu est classé normal".

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre.
2. Calculer la probabilité qu'un message soit un spam sachant qu'il a été classé normal.
3. Construire un arbre de probabilité permettant de représenter la même situation.

Ex. 14 — Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant.
L'entreprise Micro vend en ligne du matériel informatique, notamment des ordinateurs portables.
Durant la période de garantie, les deux problèmes les plus fréquemment relevés par le service après-vente portent sur la batterie et sur le disque dur :
—parmi les ordinateurs vendus, 5 % ont été retournés pour un défaut de batterie et, parmi ceux-ci, 2 % ont aussi un disque dur défectueux ;
—parmi les ordinateurs dont la batterie fonctionne correctement, 5 % ont un disque dur défectueux.

On suppose que la société Micro garde constant le niveau de qualité de ses produits.

Suite à l'achat en ligne d'un ordinateur :
Proposition 1
La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à 0,08 à 0,01 près.
Proposition 2
La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,0485.
Proposition 3
Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à 0,02.

Ex. 15 — Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles. La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B. La machine M_A fournit 40 % de la production totale et la machine M_B le reste. La machine M_A produit 2 % de médailles défectueuses et la machine M_B en produit 3 %.

On prélève au hasard une médaille produite et on considère les évènements suivants :
—A : "La médaille provient de la machine M_A" ;
—B : "La médaille provient de la machine M_B" ;
—D : "La médaille est défectueuse".

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité qu'une médaille soit défectueuse est égale à 0,026.
3. Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.

Ex. 16 — Le service marketing d'un magasin de téléphonie a procédé à une étude du comportement de sa clientèle. Il a ainsi observé que celle-ci est composée à 42 % de femmes. 35 % des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat, alors que cette proportion est de 55 % pour les hommes. Une personne entre dans le magasin.

On note les évènements :
—F : "La personne est une femme" ;
—R : "La personne repart sans rien acheter".

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter.
3. Montrer que $P(R) = 0,534$.
4. Les évènements F et R sont-ils indépendants ?