SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.
Les nombres suivants sont-ils en progression arithmétique ?
2364510 ; 3475621 ; 4586732

Exercice n°2.
Parmi ces suites, lesquelles sont arithmétiques ? :

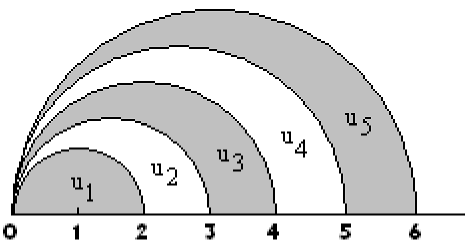
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} + u_n = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n - u_{n+1} = 4 \end{cases}$

Exercice n°3. (u_n) est une suite arithmétique de raison *r*.

1) On sait que $u_0 = 2$ et $r = -3$. Calculer u_{10}, u_{20}, u_{100}.
2) On sait que $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$. Calculer *r* et u_2 et u_5
3) On sait que $u_0 = 2$ et $u_2 = 10$. Calculer *r* et u_1, u_5
4) On sait que $u_1 = 10$ et $u_{10} = 28$. Calculer *r* et u_0, u_5
5) On sait que $u_5 = 17$ et $u_{10} = 12$. Calculer *r* et u_0, u_1
6) Sachant que $u_{20} = -52$ et $u_{51} = -145$, explicitez u_n
7) Sachant que $u_{22} = 15$ et $r = \frac{3}{4}$, explicitez u_n
8) Sachant que $u_0 = 3$ et que $u_{20} = u_{10} + 25$, explicitez u_n
9) Une suite arithmétique *u* est telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$.Calculez u_0

Exercice n°4.
Albert place un capital initial C_0 = 3000 € à un taux annuel de 6%, les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, comme ce serait le cas pour des intérêts composés).
On note C_n le capital d'Albert au bout de n années, capital exprimé en euros.

1) Montrer que, pour tout entier *n*, $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on?
2) Pour tout entier *n*, exprimer C_n en fonction de *n*.
3) De quel capital Albert dispose-t-il au bout de 10 ans?
4) Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé?
5) Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10000 € ?



Exercice n°5. Montrer que la suite (u_n) des aires définies par la figure ci-dessus est arithmétique.

Exercice n°6.
Combien y a-t-il de nombres impairs entre 179 et 1243 ? de nombres pairs?

Exercice n°7.

1) En reconnaissant la somme des termes d'une suite arithmétique, calculer $S_1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + ... + \frac{19}{3} + 7$
2) Calculer S_2 = 5+2-1-4-7…-34
3) Calculer la somme des entiers multiples de 7 qui sont plus grands que 100 et plus petits que 1000.
4) Exprimer la somme $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ en fonction de *n*.

Exercice n°8.

Une suite arithmétique u de raison 5 est telle que u_0 = 2 et, n étant un nombre entier, $\sum_{i=3}^{i=n} u_i = 6456$. Calculez *n*.

Exercice n°9.
Une horloge sonne toutes les heures, de 1 coup à 1 heure du matin à 24 coups à minuit. Quel est le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures ?

Exercice n°10.

1) Les nombres – 5, 8, 21 sont les trois termes consécutifs d'une suite. Est-ce une suite arithmétique ou géométrique ? Quelle est la raison de cette suite ?
2) Les nombres –5, 10, –20 sont les trois termes consécutifs d'une suite. Est-ce une suite arithmétique ou géométrique ? Quelle est la raison de cette suite ?

Exercice n°11. Les nombres suivants sont-ils en progression géométrique ? 346834 ; 3434 ; 34

Exercice n°12. Parmi ces suites, lesquelles sont géométriques :

$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{6}{100} u_n \end{cases}$

Exercice n°13. (u_n) est une suite géométrique de raison r.

1) On sait que $u_0 = 32$ et $r = \dfrac{1}{4}$. Calculer u_2, u_3, u_5, u_8.
2) On sait que $u_1 = \dfrac{1}{125}$ et $r = 5$. Calculer u_0, u_5, u_7, u_{20}.
3) On sait que $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{1}{3}$. Calculer r, u_2 et u_5
4) On sait que $u_0 = 3$ et $u_2 = 12$. Calculer r, u_1 et u_5
5) On sait que $u_1 = -1$ et $u_{10} = 1$. Calculer r, u_0 et u_5

Exercice n°14.

Montrer que ces suites sont géométriques, et préciser leur raison et leur premier terme.

$u_n = (-4)^{2n+1}$ $v_n = 2^n \times \dfrac{1}{3^{n+1}}$ $w_n = (-1)^n \times 2^{3n+1}$

Exercice n°15.

En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique, calculer :

1) $18 + 54 + 162 + ... + 39366$
2) $\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + ... - \dfrac{1}{1048576}$
3) $\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} .... - 64 + 64\sqrt{2} - 128$
4) $2^7 + 2^8 + 2^9 + ... + 2^{21}$
5) $-x + x^2 - x^3 + x^4 .... - x^{17}$

Exercice n°16.

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités. On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année 2000 + n.

a) Montrer que P_n est une suite géométrique dont on donnera la raison.

b) Calculer P_5.

c) Si la production descend au dessous de 15000 unités, l'usine sera en faillite, quand cela risque-t-il d'arriver si la baisse de 4% par an persiste ? La réponse sera recherchée par expérimentation avec la calculatrice.

Exercice n°17.

La location annuelle initiale d'une maison se monte à 7000 €. Le locataire s'engage à louer durant 7 années complètes. Le propriétaire lui propose deux contrats :

1) *Contrat n°1*

Le locataire accepte chaque année une augmentation de 5 % du loyer de l'année précédente

a) Si u_1 est le loyer initial de la 1ère année, exprimer le loyer u_n de la nième année en fonction de n

b) Calculer le loyer de la 7ème année

c) Calculer la somme payée, au total, au bout de 7 années d'occupation

2) *Contrat n°2*

Le locataire accepte chaque année une augmentation forfaitaire de 400 €

a) Si v_1 est le loyer initial de la 1ère année, exprimer le loyer v_n de la nième année en fonction de n

b) Calculer le loyer de la 7ème année

c) Calculer la somme payée, au total, au bout de 7 années d'occupation

3) Conclure : quel contrat est le plus avantageux ?

Exercice n°18.

Nous avons tous 2 parents, 4 grands parents, 8 arrières grands-parents, etc…
En supposant que nous appartenons à la génération 1, que nos parents appartiennent à la génération 2, nos grands parents à la génération 3, etc… :

1) Combien d'ancêtres figurent à la génération 10 ?
2) Si on pouvait remonter jusqu'en l'an 1000 (soit environ à la 40ème génération), combien y aurait-il d'individus au total sur l'arbre généalogique (de la 1ère génération c'est à dire nous, jusqu'à la 40ème génération comprise) ? Que penser de ce résultat ?

Exercice n°19.

Un roi de Perse voulut récompenser l'inventeur du jeu d'échecs. Celui-ci demanda au roi de déposer un grain de blé sur la première case, 2 grains sur la seconde, 4 grains sur la troisième et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre de grains jusqu'à la 64ème case.
1) Combien de grains de blé devront être posés sur l'échiquier ?
2) En admettant que 1024 grains de blé pèsent 100 grammes, calculer la masse de ces grains de blé.
3) En 1989, la production française de blé a été de 30 millions de tonnes, combien d'années de production faudrait-il pour remplir l'échiquier ?
4) Sachant que le roi pose un grain à la seconde, et qu'il commença lors du big-bang, a-t-il aujourd'hui terminé ?

Exercice n°20.

On déchire en deux une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur.
On superpose les deux morceaux que l'on déchire de nouveau en deux.
Quelle épaisseur de papier obtiendrait-on si on pouvait répéter l'opération au total trente fois (c'est à dire répéter 29 fois ce que l'on vient de faire) ?

Exercice n°21.

On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).

2) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et préciser sa limite.

3) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de *n*.

4) Exprimer la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$ en fonction de *n*. En déduire le calcul de $u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$ en fonction de *n*.

SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES
CORRECTION

Exercice n°1

Puisque 3475621-2364510=111111 et 4586732-3475621,=111111, ces nombres sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 111111

Exercice n°2

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} + u_n = 1 \end{cases}$ n'est pas arithmétique car si on calcule $u_1 = 1 - u_0 = 0$, $u_2 = 1 - u_1 = 1$, $u_3 = 1 - u_2 = 0$, etc…, on s'aperçoit que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas toujours la même. La suite est alternée, un terme sur deux valant 0, l'autre valant 1

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n - u_{n+1} = 4 \end{cases}$ est arithmétique car elle se redéfinit par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$, qui est caractéristique d'une suite arithmétique de raison –4.

Exercice n°3

1) Si $u_0 = 2$ et $r = -3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 2 - 3n$, ce qui nous permet de calculer $u_{10} = -27$, $u_{20} = -58$ et $u_{100} = -297$.

2) On calcule $r = u_1 - u_0 = 5 - 2 = 3$, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 2 + 3n$ ce qui nous permet de calculer $u_2 = 8$ et $u_5 = 17$

3) Puisque $u_2 = u_0 + 2 \times r$, on en déduit que $r = \frac{1}{2}(u_2 - u_0) = 4$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 2 + 4n$ ce qui nous permet de calculer $u_1 = 6$ et $u_5 = 22$

4) Puisque $u_{10} = u_1 + 9 \times r$, on en déduit que $r = \frac{1}{9}(u_{10} - u_1) = 2$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = 10 + 2(n-1) = 2n + 8$ ce qui nous permet de calculer $u_0 = 8$ et $u_5 = 18$

5) Puisque $u_{10} = u_5 + 5 \times r$, on en déduit que $r = \frac{1}{5}(u_{10} - u_5) = -1$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_5 + (n-5) \times r = 17 - (n-5) = 22 - n$ ce qui nous permet de calculer $u_0 = 22$ et $u_1 = 21$

6) Puisque $u_{51} = u_{20} + (51 - 20) \times r$, on en déduit que $r = \frac{1}{31}(u_{51} - u_{20}) = \frac{1}{31}(-145 + 52) = -3$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_5 + (n-5) \times r = 17 - (n-5) = 22 - n$

7) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{22} + (n-22) \times r = 15 + \frac{3}{4}(n-22) = \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$

8) Puisque $u_{20} = u_{10} + (20-10) \times r$, on en déduit que $10r = 25 \Leftrightarrow r = 2,5$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 3 + 2,5n$

9) Puisque la suite *u* est arithmétique de raison *r*, $u_2 + u_3 + u_4 = u_2 + u_2 + r + u_2 + 2r = 3u_2 + 3r$, et $u_6 = u_2 + 4r$. Le système $\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 15 \Leftrightarrow u_2 + r = \frac{15}{3} = 5 \\ u_6 = 60 \Leftrightarrow u_2 + 4r = 20 \end{cases}$ a pour solution $\begin{cases} u_2 = 0 \\ r = 5 \end{cases}$. Puisque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + (n-2) \times r = 0 + 5(n-2) = 5n - 10$, on en déduit $u_0 - 10$

Exercice n°4

1) Le montant des intérêts qui s'ajoutent au capital d'une année C_n est égal à 3% de 3000 €, c'est-à-dire à $3000 \times \frac{6}{100} = 180$ €. Ainsi $C_{n+1} = C_n + 180$. La suite (C_n) est donc une suite arithmétique de raison 180 et de premier terme $C_0 = 3000$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = C_0 + n \times r = 3000 + 180n$

3) Au bout de 10 ans, Albert disposera de $C_{10} = 3000 + 180 \times 10 = 4800$ €

4) On résout $C_n \geq 2C_0 \Leftrightarrow 3000 + 180n \geq 6000 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{3000}{180}$. Comme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 17$. Le capital d'Albert aura donc doublé au bout de 17 ans

5) On résout $C_n \geq 10000 \Leftrightarrow 3000 + 180n \geq 10000 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{7000}{180}$. Comme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 39$. Le capital d'Albert aura donc atteint 10000 € au bout de 39 ans

Exercice n°5

Notons (r_n) la suite des rayons des cercles. (r_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme égal à $r_1 = 1$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $r_n = 1 + \dfrac{1}{2}(n-1)$. Les aires des demi disques sont donc égales à :

$$A_n = \frac{1}{2}\pi (r_n)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{1}{2}(n-1)\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)^2$$

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = A_n - A_{n-1} = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{1}{2}n + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{1}{2}(n-1) + \dfrac{1}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}\pi\left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}n\right)\right]\left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}n\right)\right] = \frac{1}{4}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $\boxed{u_n = \dfrac{1}{4}\pi\left(n + \dfrac{1}{2}\right)}$

Pour montrer que la suite (u_n) des aires est arithmétique, on calcule la différence enter deux termes consécutifs : Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4}\pi\left(n + 1 + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{4}\pi\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}\pi$. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $\boxed{\dfrac{1}{4}\pi}$

Exercice n°6

Les nombres impairs sont les termes de la suite arithmétique de raison 2, et de premier $u_0 = 1$. Ainsi ils sont de la forme $u_n = 2n + 1$. On cherche à dénombrer les nombres impairs tels que $179 \leq u_n \leq 1243 \Leftrightarrow 179 \leq 2n + 1 \leq 1243$,

$\Leftrightarrow \dfrac{179-1}{2} \leq n \leq \dfrac{1243-1}{2}$, c'est-à-dire correspondant à $89 \leq n \leq 621$. Il y a $621 - 89 + 1 = 533$ entiers n tels que $89 \leq n \leq 621$, donc il y a 533 nombres impairs entre 179 et 1243

Les nombres pairs étant les termes de la suite arithmétique de raison 2, et de premier $v_0 = 1$. Ainsi ils sont de la forme $v_n = 2n$. On cherche donc les entiers tels que $179 \leq 2n \leq 1243 \Leftrightarrow \dfrac{179}{2} \leq n \leq \dfrac{1243}{2}$. Comme $n \in \mathbb{N}$, $90 \leq n \leq 621$. Il y a 621-90+1=532 nombres impairs entre 179 et 1243.

Exercice n°7

1) Si on note (u_n) la suite arithmétique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $\dfrac{1}{3}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}n$.

Résolvons $u_n = 7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}n = 7 \Leftrightarrow n = 10$. Ainsi 7 correspond à u_{10}, et la somme $S_1 = \dfrac{1}{3} + 1 + \dfrac{5}{3} + ... + \dfrac{19}{3} + 7$ correspond à la somme $S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$ des 11 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\boxed{S_1 = \underbrace{11}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{u_0}^{\substack{\text{premier}\\ \text{terme}}} + \overbrace{u_{10}}^{\substack{\text{dernier}\\ \text{terme}}}}{2} = 11 \times \frac{\frac{1}{3} + 7}{2} = \frac{121}{3}}$$

2) Si on note (u_n) la suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 5, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5-3n$. Résolvons $u_n = -34 \Leftrightarrow 5-3n = -34 \Leftrightarrow n = 13$. Ainsi -34 correspond à u_{13}, et la somme S_2 = 5+2-1-4-7…-34 correspond à la somme $S_2 = u_0 + u_1 + ... + u_{13}$ des 14 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\boxed{S_2 = \underbrace{14}_{\substack{\text{nombre}\\\text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{u_0}^{\substack{\text{premier}\\\text{terme}}} + \overbrace{u_{10}}^{\substack{\text{dernier}\\\text{terme}}}}{2} = 14 \times \frac{5-34}{2} = -203}$$

3) Les multiples de 7 sont les termes de la suite arithmétique de raison 7, et de premier $u_0 = 0$. Ainsi ils sont de la forme $u_n = 7n$. On cherche à dénombrer les termes de la suite tels que $100 \leq u_n \leq 1000 \Leftrightarrow \frac{100}{7} \leq n \leq \frac{1000}{7}$,. Comme $n \in \mathbb{N}$, $15 \leq n \leq 142$. Il y a 142-15+1=128 multiples de 7 entre 100 et 1000.

La somme de ces 128 multiples est donc égale à $\boxed{\underbrace{128}_{\substack{\text{nombre}\\\text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{u_{15}}^{\substack{\text{premier}\\\text{terme}}} + \overbrace{u_{142}}^{\substack{\text{dernier}\\\text{terme}}}}{2} = 128 \times \frac{105+994}{2} = 70336}$

Si on note (u_n) la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + (n-1) = n$, et ainsi la somme $S_n = 1+2+3+4+....+n$ est

celle des *n* premiers termes de la suite (u_n)

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre}\\\text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{1}^{\substack{\text{premier}\\\text{terme}}} + \overbrace{n}^{\substack{\text{dernier}\\\text{terme}}}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>Exercice n°8</u>

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 2$, la somme $\sum_{i=3}^{i=n} u_i$ des *n*-3+1 termes de $u_3 = u_0 + 3r = 2 + 3 \times 5 = 17$ à $u_n = u_0 + nr = 2 + 5n$ s'exprime en fonction de *n* par :

$$\underbrace{(n-2)}_{\substack{\text{nombre}\\\text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{17}^{\substack{\text{premier}\\\text{terme}}} + \overbrace{2+5n}^{\substack{\text{dernier}\\\text{terme}}}}{2} = \frac{(n-2)(19+5n)}{2}.$$

$\sum_{i=3}^{i=n} u_i = 6456$ équivaut alors à $\frac{(n-2)(19+5n)}{2} = 6456 \Leftrightarrow 5n^2 + 9n - 38 = 12912$, c'est-à dire à $5n^2 + 9n - 12950 = 0$.

On résout cette équation du second degré en calculant son discriminant, et on obtient deux solutions distinctes, dont la seule entière positive est $n = 50$

<u>Exercice n°9</u>

Notons (u_n) la suite correspondant au nombre de coups d'horloge, de $u_1 = 1$, à 1 heure du matin, à $u_{24} = 24$, à minuit.

Le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures est égal à la somme $u_1 + u_2 + ...u_{24}$ des 24 premiers termes de cette suite arithmétique de raison 1. Celle somme vaut $\underbrace{24}_{\substack{\text{nombre}\\\text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{1}^{\substack{\text{premier}\\\text{terme}}} + \overbrace{24}^{\substack{\text{dernier}\\\text{terme}}}}{2} = 300$

<u>Remarque :</u>

On pouvait appliquer la formule $1 + 2 + ...n = \frac{n(n+1)}{2}$, démontrée dans l'exercice n°7, en remplaçant *n* par 24

Exercice n°10

1) Les différences 8-(-5)=13 et 21-8=13 étant égales, ces nombres sont les trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3

Comme les quotients $\frac{8}{-5}$ et $\frac{21}{8}$ sont différents, ces nombres ne sont pas les termes consécutifs d'une suite géométrique.

2) Les différences 10-(-5)=15 et -20-10=-30 n'étant pas égales, ces nombres ne sont pas les termes consécutifs d'une suite arithmétique

En revanche, les quotients $\frac{10}{-5}=-2$ et $\frac{-20}{10}=-2$ étant égaux, ces nombres sont les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison -2

Exercice n°11

Les quotients $\frac{3434}{346834}=\frac{1}{101}$ et $\frac{34}{3434}=\frac{1}{101}$ étant égaux, ces nombres sont les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{101}$

Exercice n°12

La suite définie par $\begin{cases} u_0=7 \\ u_{n+1}=u_n^2 \end{cases}$ n'est pas géométrique, car le calcul de $u_1=u_0^2=7^2=49$ et de $u_2=u_1^2=49^2=2401$ montrent que $\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_1}{u_0}$

La suite définie par $\begin{cases} u_0=100 \\ u_{n+1}=u_n+\frac{6}{100}u_n \end{cases}$ se réécrit $\begin{cases} u_0=100 \\ u_{n+1}=1,06u_n \end{cases}$, donc est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme 100

Exercice n°13

1) Si $u_0=32$ et $r=\frac{1}{4}$, on calcule $u_2=u_0\times r^2=32\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=2$, puis $\boxed{u_3=u_2\times r=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}$, $\boxed{u_5=u_3\times r^2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{32}}$ et $\boxed{u_8=u_5\times r^3=\frac{1}{32}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{2048}}$

2) Puisque $u_1=u_0\times r$, on déduit $u_0=\frac{u_1}{r}=\frac{\cancel{1}125}{5}=\frac{1}{625}$, et à partir de la formule $u_n=u_0\times r^n=\frac{5^n}{625}$, on déduit $\boxed{u_5=5}$, $\boxed{u_7=125}$ et $\boxed{u_{20}=\frac{5^{20}}{725}=\frac{5^{20}}{5^4}=5^{16}}$

3) Puisque $u_1=u_0\times r$, on déduit $r=\frac{u_1}{u_0}=\frac{\cancel{1}3}{1}=\frac{1}{3}$, et à partir de la formule $u_n=u_0\times r^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, on déduit successivement $\boxed{u_2=\frac{1}{9}}$ et $\boxed{u_5=\frac{1}{243}}$

4) Puisque $u_1=u_0\times r^2$, on déduit $r^2=\frac{u_2}{u_0}=\frac{12}{3}=4$, ce qui nous fournit deux solutions : r = 2 ou r = -2. Si $r=2$, à partir de la formule $u_n=u_0\times r^n=3\times 2^n$, on déduit successivement $\boxed{u_1=6}$ et $\boxed{u_5=96}$. Si $r=-2$, à partir de la formule $u_n=u_0\times r^n=3\times(-2)^n$, on déduit successivement $\boxed{u_1=-6}$ et $\boxed{u_5=-96}$

5) Puisque $u_{10}=u_1\times r^9$, on déduit $r^9=\frac{u_{10}}{u_1}=\frac{1}{-1}=-1$, ce qui nous fournit deux solutions : r = -1. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_1\times r^{n-1}=(-1)\times(-1)^{n-1}=(-1)^n$. On en déduit successivement $\boxed{u_0=1}$ et $\boxed{u_5=-1}$

Exercice n°14

1) On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}}=\frac{(-4)^{2n+3}}{(-4)^{2n+1}}=(-4)^{2n+3-(2n+1)}=(-4)^2=16$, ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique de raison 16, et de premier terme $u_0=(-4)^{2\times 0+1}=-4$

2) On calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2^{n+1}\times\frac{1}{3^{(n+1)+1}}}{2^n\times\frac{1}{3^{n+1}}}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\times\frac{3^{n+1}}{2^n}=\frac{2}{3}$, ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, et de premier terme $v_0=2^0\times\frac{1}{3^{0+1}}=\frac{1}{3}$

3) On calcule : $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{(-1)^{n+1}\times 2^{3(n+1)+1}}{(-1)^n\times 2^{3n+1}}=\frac{(-1)^{n+1}\times 2^{3n+4}}{(-1)^n\times 2^{3n+1}}=(-1)^{n+1-n}\times 2^{3n+4-(3n+1)}=-2^3=-8$, ce qui prouve que la suite (w_n) est géométrique de raison -8, et de premier terme $w_0=(-1)^0\times 2^{3\times 0+1}=2$

Exercice n°15

1) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison q=3 et de premier terme $u_0=18$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=18\times 3^n$.
Résolvons $u_n=39366\Leftrightarrow 18\times 3^n=39366\Leftrightarrow n=7$. Ainsi 39366 correspond à u_7, et la somme $18+54+162+.....+39366$ correspond à la somme $u_0+u_1+....+u_7$ des 8 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\Big(\overbrace{q}^{\text{raison}}\Big)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}}=18\times\frac{1-3^8}{1-3}=59040$$

2) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison $q=-\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0=\frac{1}{8}$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Résolvons $u_n=-\frac{1}{1048576}\Leftrightarrow\frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{1048576}\Leftrightarrow n=17$. Ainsi $-\frac{1}{1048576}$ correspond à u_{17}, et la somme $\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+......-\frac{1}{1048576}$ correspond à la somme $u_0+u_1+....+u_{17}$ des 18 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\Big(\overbrace{q}^{\text{raison}}\Big)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}}=\frac{1}{8}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{18}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{12}\left[1-\frac{1}{2}^{18}\right]$$

3) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison $q=-\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0=\sqrt{2}$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sqrt{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^n$.

Résolvons $u_n=-128\Leftrightarrow\sqrt{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^n=-128\Leftrightarrow n=13$. Ainsi -128 correspond à u_{13}, et la somme $\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}-4+4\sqrt{2}....-64+64\sqrt{2}-128$ correspond à la somme $u_0+u_1+....+u_{13}$ des 14 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\Big(\overbrace{q}^{\text{raison}}\Big)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}}=\sqrt{2}\times\frac{1-\left(-\sqrt{2}\right)^{14}}{1-\left(-\sqrt{2}\right)}=-\frac{127\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

4) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0=1$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1\times(2)^n=2^n$.

La somme $2^7+2^8+2^9+....+2^{21}$ correspond donc à $u_7+u_8+....+u_{21}$ de 21-7+1=15 termes consécutifs de (u_n).

$$\text{Ainsi } \underbrace{u_7}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\left(\overbrace{q}^{\text{raison}}\right)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}}=2^7\times\frac{1-(2)^{15}}{1-(2)}=2^7\left(2^{15}-1\right)$$

5) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison $q=-x$ et de premier terme, la somme $-x+x^2-x^3+x^4....-x^{17}$ correspond à la somme $u_0+u_1+....+u_{16}$ des 17 premiers termes de (u_n).

$$\text{Ainsi } \underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\left(\overbrace{q}^{\text{raison}}\right)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}}=(-x)\times\frac{1-(-x)^{17}}{1-(-x)}=(-x)\times\frac{1+x^{17}}{1+x}$$

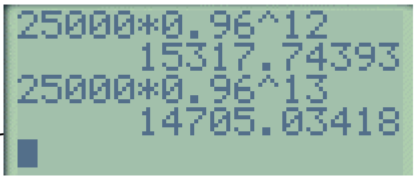
Exercice n°16

a) Une diminution de 4% se traduisant par une multiplication par $1-\frac{4}{100}=0,96$, on a donc $P_{n+1}=0,96P_n$. La suite (P_n) est donc une suite géométrique de raison 0,96.

b) On en déduit ainsi que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_n=25000\times0,96^n$, ce qui permet de calculer $P_5=25000\times0,96^5\approx20384,32$

c) On cherche pour quelle valeur de n on aura $P_n=25000\times0,96^n\leq15000\Leftrightarrow0,96^n\leq\frac{3}{5}$.

Grâce à la calculatrice, on trouve $n\geq13$



Remarque : On peut aussi écrire :

$$0,96^n\leq\frac{3}{5}\Leftrightarrow n\ln(0,96)\leq\ln\left(\frac{3}{5}\right)\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln\left(3/5\right)}{\ln(0,96)}\approx12,51$$

Comme $n\in\mathbb{N}$, on retrouve bien $n\geq13$

Exercice n°17

1) a) Le loyer annuel du contrat n°1 peut être modélisé par une suite (u_n) géométrique de raison 1,05 (une augmentation de 5 % du loyer de l'année précédente se traduit par une multiplication par $1+\frac{5}{100}=1,05$), et de premier terme $u_1=7000$. Pour tout $n\geq1$, le loyer de la nième année vaut $u_n=7000\times1,05^{n-1}$,

b) Le loyer de la 7ème année vaut $u_7=7000\times1,05^6\approx9380,67$ € à 0,01 € près

c) La somme payée au bout de 7 année d'occupation vaut $u_1\times\frac{1-1,05^6}{1-1,05}\approx47613,39$ €

2) a) Le loyer annuel du contrat n°2 peut être modélisé par une suite (v_n) arithmétique de raison 400 € et de premier terme $v_1=7000$. Ainsi, pour tout $n\geq1$, le loyer de la nième année vaut $v_n=7000+400(n-1)$.

b) Le loyer de la 7ème année vaut $v_7=7000+400\times6=9400$ €

c) La somme payée au bout de 7 année d'occupation vaut $u_1+u_2+....u_6=6\times\frac{u_1+u_6}{2}=49200$ €

3) Le contrat le plus avantageux pour le locataire est le contrat n°1

Exercice n°18

1) En notant (u_n) la suite représentant le nombre d'individus à la génération n, on a $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

Le nombre d'ancêtres figurent à la génération 10 vaut alors $u_{10} = 2^9 = 512$

2) Le nombre d'invidus figurant sur l'arbre généalogique de la 1ère à la 40ème génération comprise serait égal à $u_1 + ...u_{40} = u_1 \times \frac{1-2^{40}}{1-2} = 2^{40} - 1 \approx 1{,}1 \times 10^{12}$ individus, soit plus de 1100 milliards d'individus ! Ce chiffre est bien sûr impossible et s'explique par le fait que l'on ne tient pas compte des mariages entre cousins

Exercice n°19

1) En notant (u_n) la suite représentant le nombre de grains de blé sur la nième case. On a $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

Le nombre de grains de blé posés sur l'échiquier vaudra alors :

$u_1 + ...u_{64} = u_1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$.

2) Une règle de trois nous permet de conclure que si 1024 grains de blé pèsent 100 grammes, $1{,}8 \times 10^{19}$ grains de blé pèseront 100 grammes, $\frac{1{,}8 \times 10^{19}}{1024} \times 100 \approx 1{,}8 \times 10^{18}$ grammes, soit environ $1{,}8 \times 10^{12}$ tonnes

3) Une règle de trois nous permet de conclure que si la production française de blé a été de 30 millions de tonnes, il faudra $\frac{1{,}8 \times 10^{12}}{3 \times 10^7} \approx 60048$ ans pour produire la quantité de blé nécessaire !

4) Si on pose un grain par seconde, il faudra la production française de blé a été de 30 millions de tonnes, il faudra environ $1{,}8 \times 10^{19}$ secondes pour remplir l'échiquier, soit environ $5{,}8 \times 10^{11}$ années pour remplir l'échiquier, soit environ 580 000 000 000 années (580 milliards d'années !)

Exercice n°20

En notant (u_n) l'épaisseur en dixièmes de mm obtenu après n superpositions de morceaux de feuille. On a donc $u_1 = 2$, et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 2$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ dixièmes de mm. Au bout de 29 répétitions (c'est-à-dire à la 30ème étape), l'épaisseur de papier atteindrait $u_{30} = 2^{30} = 1073741824$ dixièmes de millimètres, soit environ 107 kilomètres !

Exercice n°21

1) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n) = \ln(e) + \ln(u_n) = \ln(eu_n)$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = eu_n$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } e \text{ et de premier terme } u_0 = 2}$

2) Puisque la raison de cette suite est $e > 1$ et que $u_0 > 0$, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante et que}}$ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

3) Puisque la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e et de premier terme $u_0 = 2$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ vaut donc

$$\boxed{\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}} \times \frac{1 - e^{\overbrace{n+1}^{\text{nombre de termes}}}}{1 - \underbrace{e}_{\text{raison}}} = 2 \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e} = \frac{2-2e^{n+1}}{1-e}}$$

4) Puisque la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e et de premier terme $u_0 = 2$, on établit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times e^n = 2e^n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \ln(2e^n) = \ln 2 + \ln(e^n) = \ln 2 + n\ln(e) = \ln 2 + n$.

La somme $\sum_{k=1}^{n}\ln(u_k)$ vaut donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\ln(u_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln 2+k\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln 2+\sum_{k=1}^{n}k=n\ln 2+\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{n\left(n+1\right)+2n\ln 2}{2}}$$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien, puisque $\ln\left(u_1\times u_2\times\ldots\times u_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(u_k)=\frac{n\left(n+1\right)+2n\ln 2}{2}$ on déduit que $\boxed{u_1\times u_2\times\ldots\times u_n=e^{\frac{n(n+1)+2n\ln 2}{2}}}$