Suites arithmétiques. Suites géométriques

Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition. • (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $$u_{n+1} = u_n + r.$$ • (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si la suite $$(u_{n+1} - u_n) \text{ est constante.}$$	**Définition.** • (u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $$u_{n+1} = u_n \times q.$$ • Si la suite (u_n) ne s'annule pas, la suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si la suite $$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ est constante.}$$
Expression de u_n en fonction de n. • Si la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, pour tout entier naturel n, $$u_n = u_0 + nr.$$ • Les suites arithmétiques sont les suites de la forme $$(an + b)_{n\in\mathbb{N}}$$ où a et b sont deux réels (ou deux complexes). • Pour tous entiers naturels n et p, $$u_n = u_p + (n - p)r.$$	**Expression de u_n en fonction de n.** • Si la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q, pour tout entier naturel n, $$u_n = u_0 \times q^n.$$ • Les suites géométriques sont les suites de la forme $$(a \times b^n)_{n\in\mathbb{N}}$$ où a et b sont deux réels (ou deux complexes). • Pour tous entiers naturels n et p, $$u_n = u_p \times q^{n-p}$$ (pour $q \neq 0$ si $n \geqslant p$).
Suites arithmétiques et moyennes arithmétiques. • Pour tout entier naturel n non nul, $$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n \text{ et } u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}.$$	**Suites géométriques et moyennes géométriques.** • Pour tout entier naturel n non nul, $$u_{n-1} \times u_{n+1} = u_n^2 \text{ et } u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}},$$ (si (u_n) est une suite positive).
Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique. • Pour tout entier naturel non nul n, $$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ • Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, $$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}$$ $$= \frac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}.$$	**Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique.** • Pour tout entier naturel n et tout nombre réel (ou complexe) q, $$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1 \\ n + 1 \text{ si } q = 1 \end{cases}$$ • Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, $$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ (si } q \neq 1)$$ $$= (\text{1er terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$