

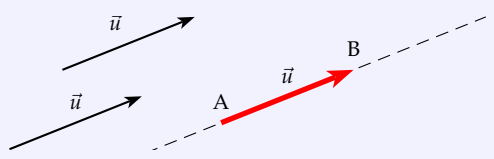
Les vecteurs

Le point de vue géométrique

Définition

Un vecteur \vec{u} dont un représentant est le vecteur \overrightarrow{AB} , est une classe d'équivalence définie par :

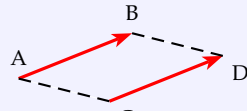
- une direction : celle de la droite (AB)
- un sens : de A vers B
- une longueur appelé **norme du vecteur \vec{u}** et notée $||\vec{u}||$ ou $||\overrightarrow{AB}||$. Il s'agit de la distance $AB \geq 0$



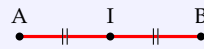
Remarque : Par abus de langage, on dira indistinctement le vecteur \vec{u} ou le vecteur \overrightarrow{AB}

Égalité de deux vecteurs – Milieu d'un segment

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$
 ABDC parallélogramme



I milieu du segment [AB]



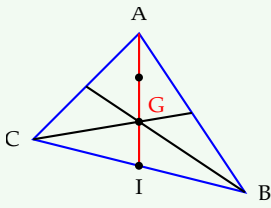
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle alors ses trois médianes sont concourantes au centre de gravité G.
 Soit I le milieu de [BC], on a alors :

G **centre de gravité** \Leftrightarrow

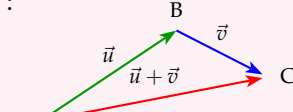
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$
 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



Somme de deux vecteurs – Relation de Chasles

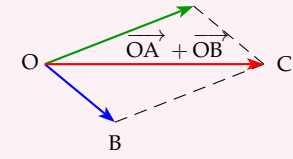
Pour additionner deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ on utilise la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Règle du parallélogramme

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$



L'addition de deux vecteurs est :

- **commutative** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- **associative** : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- possède un **élément neutre** : $\vec{0}$
- tout vecteur \overrightarrow{AB} possède un **opposé** $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Application de la relation de Chasles

La relation de Chasles permet :

- d'« éclater » un vecteur en introduisant un point :
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- de réduire une somme :
 $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP}$

La relation de Chasles est un outil fondamental pour montrer que des vecteurs sont colinéaires par exemple.

Milieu d'un segment

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$
 $= 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}}$
 $= 2\overrightarrow{AI}$

On retient : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Multiplication par un scalaire

Soit k un réel, le vecteur $k\vec{u}$ correspond :

- à un vecteur de longueur $|k| \times ||\vec{u}||$
- de même sens que \vec{u} si $k > 0$
- de sens contraire à \vec{u} si $k < 0$

La multiplication par un réel est bilinéaire :

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ et $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

Application du produit par un scalaire

On dit que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaire ssi $\vec{v} = k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$

A, B, C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} colinéaires
 $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{CD} colinéaires

Ces deux équivalences sont fondamentales en géométrie car elles s'utilisent très souvent !

Un exemple d'application de la colinéarité

Soit ABC un triangle, E, I et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que I, E et F sont alignés

Exprimons \overrightarrow{EI} et \overrightarrow{EF} en fonction de \overrightarrow{AB} .

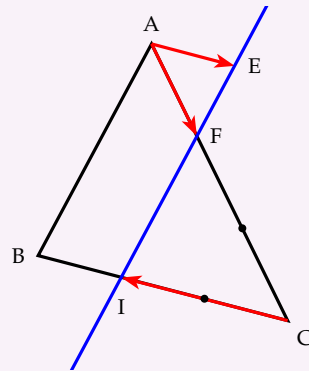
- $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BI}$ donc que AEIB est un parallélogramme.

On a alors : $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$
 $= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 $= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On en déduit alors : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EI}$. Les vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EI} sont colinéaires et donc les points E, F et I sont alignés.



Pour aller plus loin - Notion de barycentre

On appelle **barycentre** de deux points A et B associés aux coefficients α et β , le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta \neq 0 \quad (1)$$

On note alors G barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β)

Remarque : Lorsque $\alpha = \beta$, on dit que G est l'**isobarycentre** des points A et B. Le point G est alors le **milieu** du segment [AB].

De cette définition (1), on montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ (2)

Exemple : Soient A et B deux points.

Placer le barycentre G_1 des points pondérés respectifs (A, 2), (B, 1).

D'après (2), on a :

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$



Formule de réduction : Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors $\forall M$:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

Cette formule de réduction permet de déterminer les lignes de niveau c'est à dire de déterminer puis tracer l'ensemble des points M qui vérifient une relation vectorielle.

Exemple : Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient : $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$

Soit G barycentre de (A, 2) et (B, 3), on a alors : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

L'égalité devient : $\|5\overrightarrow{MG}\| = 10 \Leftrightarrow MG = 2$

L'ensemble demandé est donc le cercle de centre G est de rayon 2.

De même, on définit le **barycentre G de 3 points pondérés** (A, α), (B, β) et (C, γ) :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

Remarque : L'isobarycentre ($\alpha = \beta = \gamma$) de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

On généralise avec n points pondérés :

Le barycentre G de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ est défini par :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$$