Ex 28 page 374

1°) Soit (C) le cercle de diamètre [OA] avec A(0 ; 2)

$M \in (C)$ si et seulement si OMA est un triangle rectangle en M

si et seulement si $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

si et seulement si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

si et seulement si $x^2 + y(y-2) = 0$

si et seulement si $x^2 + y^2 - 2y = 0$

une équation du cercle (C) est donc : $\boxed{x^2 + y^2 - 2y = 0}$

2°) Soit (C') le cercle de diamètre [AB] avec A(0 ; 1) et B(3 ; 0)

$M \in (C')$ si et seulement si AMB est un triangle rectangle en M

si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

si et seulement si $x(x-3) + y(y-1) = 0$

si et seulement si $x^2 + y^2 - 3x - y = 0$

une équation du cercle (C) est donc : $\boxed{x^2 + y^2 - 3x - y = 0}$

3°) En procédant de la même manière, on trouve comme équation du cercle : $\boxed{x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0}$

Ex 29 page 374

2°) a) $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$

$x^2 - 3x + y^2 - 4y + 4 = 0$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y-2)^2 = 0$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{4}$

donc c'est un cercle de centre $I\left(\frac{3}{2} ; 2\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$

c) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 3y + \frac{1}{2} = 0$

$x^2 - 2x + y^2 - 3y + \frac{1}{2} = 0$

$(x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = 0$

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$

c'est un cercle de centre $I\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{11}}{2}$

Ex 30 page 374

c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$

$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 7 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 7 = 0$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = -2$

Or, on ne peut pas avoir – 2 dans le 2ème membre de l'équation puisque c'est le rayon au carré donc forcément un nombre positif.

Ex 35 page 375

1°) le cercle (C) a pour équation $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$

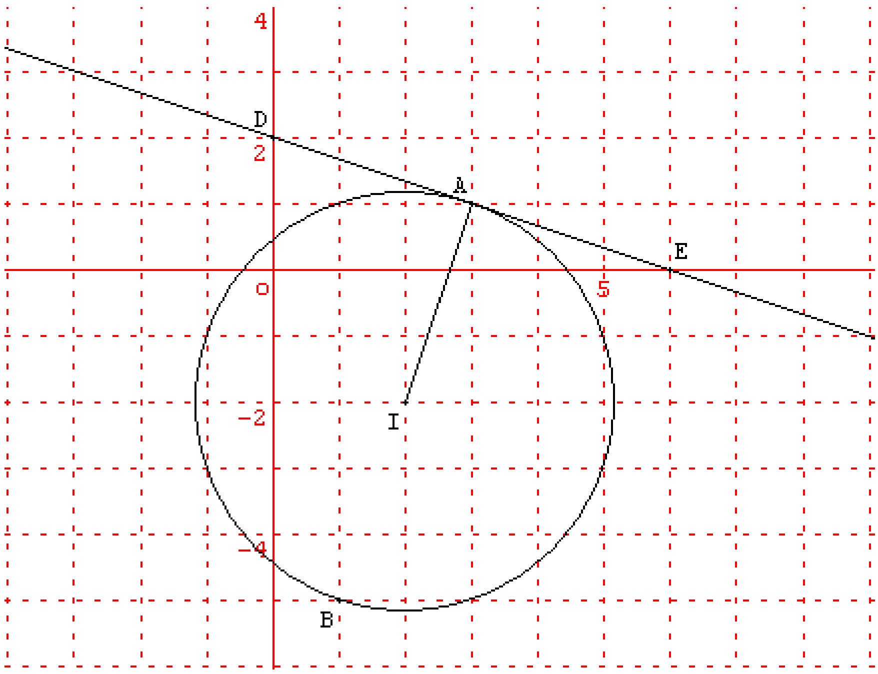
soit $x^2 - 4x + y^2 + 4y - 2 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 - 2 = 0$

$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$

donc (C) est le cercle de centre I $(2 ; -2)$ et de rayon $\sqrt{10}$

la droite d a pour équation : $x + 3y - 6 = 0$ donc les points D(0 ; 2) et E(6 ; 0) sont sur d



2°) $3^2 + 1^2 - 4 \times 3 + 4 \times 1 - 2 = 9 + 1 - 12 + 4 - 2 = 0$ donc A (3 ; 1) est sur le cercle (C)

$1^2 + (-5)^2 - 4 \times 1 + 4 \times (-5) - 2 = 1 + 25 - 4 - 20 - 2 = 0$ donc B (1 ; – 5) est sur le cercle (C)

3°) a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d (d'après l'équation de d)

de plus A (3 ; 1) et I (2 ; – 2) donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

or $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AI} = 3 \times (-1) + (-1) \times (-3) = -3 + 3 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux

donc la droite d est perpendiculaire au rayon [AI] du cercle (C) donc d est bien la tangente à (C) en A.

b) soit t la tangente au cercle (C) en B

I (2 ; – 2) et B (1 ; – 5) donc $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ c'est-à-dire que I est le milieu de [AB]

donc A, B et I sont alignés.

Comme la droite (AI), qui est aussi (BI), est perpendiculaire à d, et que (BI) est perpendiculaire par t, par définition d'une tangente, alors les droites d et t sont parallèles entre elles.