ORDRE DANS $\mathbb{R}$

Dans tout le chapitre a, b, c, d et x désignent des réels.
Les inégalités sont présentées avec le signe "<" ; sauf contre-indication, elles sont aussi vraies avec le signe "≤"

1) ORDRE ET COMPARAISON

Rappel :

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Ainsi, comparer a et b revient à étudier le signe de $a - b$

A) ORDRE ET ADDITION

Si $a < b$ alors, $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant ou en retranchant un même nombre aux deux membres d'une inégalité.

Conséquences :

Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

Preuve :
Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.
De plus, si $c < d$, alors $b + c < b + d$. On en déduit $a + c < b + d$.

B) ORDRE ET MULTIPLICATION

- Si $a < b$ et $\mathbf{c > 0}$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

*On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement **positif** les deux membres d'une inégalité.*

- Si $a < b$ et $\mathbf{c < 0}$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

*On change le sens d'une inégalité en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement **négatif** les deux membres d'une inégalité.*

Conséquences :

Soit a, b, c et d des réels **positifs.**

Si $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$

Preuve :
Si $a < b$, alors $ac < bc$ car $c > 0$.
De plus, si $c < d$, alors $bc < bd$ car $b > 0$. On en déduit : $ac < bd$.

C) ENCADREMENT

On dit que a et b encadrent x lorsque $a < x < b$

Ex : Soit x un réel tel que $-1 < x < 2$
On pose $B = -3x - 1$. Trouver un encadrement de B.
$-1 < x < 2 \Leftrightarrow -3 \times 2 < -3x < -3 \times (-1) \Leftrightarrow -6 < -3x < 3 \Leftrightarrow -6 - 1 < -3x - 1 < 3 - 1 \Leftrightarrow -7 < B < 2$

2) CARRES, RACINES CARREES ET INVERSES

A) PASSAGE AU CARRE

Soit a et b deux nombres positifs.

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Preuve :
On sait que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Comme a et b sont positifs, $a + b$ est aussi positif et on en déduit que $a - b$ et $a^2 - b^2$ sont de même signe.
D'où
- si $a < b$, alors $a - b < 0$ donc $a^2 - b^2 < 0$ et $a^2 < b^2$.
- si $a^2 < b^2$, alors $a^2 - b^2 < 0$ donc $a - b < 0$ et $a < b$.

Conséquence :
Deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b$$

B) PASSAGE A L'INVERSE

Soit a et b deux nombres strictement positifs.

$$a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Preuve :
$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$

Or $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$ et $ab > 0$, car $a > 0$ et $b > 0$

On en déduit que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ et $b - a$ sont de même signe . Ainsi,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$$

Ex : Soit x un réel tel que $2 < x < 5$. Donner un encadrement de $A = x + \frac{1}{x}$

On a $2 < x < 5$ et $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

En ajoutant membre à membre, on obtient : $2 + \frac{1}{5} < x + \frac{1}{x} < 5 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{11}{5} < x + \frac{1}{x} < \frac{11}{2}$

3) COMPARAISON DE a, a^2 et a^3 lorsque a > 0

Soit a un nombre strictement positif.

- Si $a > 1$, alors $a^3 > a^2 > a$
- Si $a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a$

Preuve :
On a $a > 1$, donc (en multipliant les deux membres par $a > 0$), on obtient : $a^2 > a$, puis (en multipliant les deux membres par $a^2 > 0$), on obtient $a^3 > a^2$

On en déduit que $a^3 > a^2 > a$.

De la même façon, lorsque $0 < a < 1$, on démontre que $a^3 < a^2 < a$.

Rem : Si $a = 0$ ou $a = 1$,alors $a = a^2 = a^3$

Ex : Soit x un réel tel que $5 < x < 6$
On pose $A = 6 - x$. Comparer les nombres A, A^2 et A^3.
On a : $-6 < -x < -5 \Leftrightarrow 0 < 6 - x < 1 \Leftrightarrow 0 < A < 1$
On en déduit que $A^3 < A^2 < A$

4) INTERVALLES DE IR

A) NOTATION

Remarque préliminaire :
Vous savez que sur une droite munie d'un repère (O , I) , à tout point M de cette droite, on peut associer un réel , appelé abscisse de M dans le repère (O , I).
Dans la suite , pour représenter les réels , on se contentera d'utiliser cette droite sans marquer le nom des points. (cette droite est appelée droite des réels)

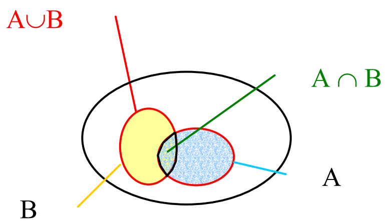
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
l'ensemble des nombres réels vérifiant la double inégalité $a \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** a, b de IR noté [a ; b] .
Les nombres a et b sont les **bornes** de l'intervalle [a ; b] .
b – a est **l'amplitude** de l'intervalle [a ; b] . (c'est à dire sa " largeur ")

Les différents cas sont représentés dans le tableau ci -dessous .

REPRESENTATION	INEGALITE *ensemble des réels x vérifiant :*	INTERVALLE	
a b --[------------]-->	$a \leq x \leq b$	[a ; b]	Intervalle fermé
a b --]------------ [-->	$a < x < b$	] a ; b [	Intervalle ouvert
a b -- [------------ [-->	$a \leq x < b$	[a ; b [	Intervalle semi fermé à gauche (ou semi ouvert à droite)
a b --]------------]-->	$a < x \leq b$	] a ; b]	Intervalle semi fermé à droite (ou semi ouvert à gauche)
a -- [------------>	$x \geq a$	[a ; $+\infty$ [	Intervalle fermé ($+\infty$, *plus l'infini,* n'est pas un nombre)
a --]------------>	$x > a$	] a ; $+\infty$ [	Intervalle ouvert
a ------------]-->	$x \leq a$	]$-\infty$; a]	Intervalle fermé ($-\infty$, *moins l'infini,* n'est pas un nombre)
a ------------ [-->	$x < a$	]$-\infty$; a [	Intervalle ouvert

Rem : L'intervalle]$-\infty$; $+\infty$ [n'est rien d'autre que IR

B) INTERSECTION ET REUNION



Soit A et B deux ensembles.

- **L'intersection** de ces deux ensembles, noté $A \cap B$ *(A inter B)* , est l'ensemble de tous les éléments communs à A **et** à B .
- **La réunion** de ces deux ensembles , noté $A \cup B$ *(A union B)* , est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A **ou** à B .

Rem : Si deux ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs, alors on dit que leur intersection est vide.
On note : $A \cap B = \varnothing$

Ex:

- $[-5 ; 3] \cap] 1 ; 5] =] 1 ; 3]$
- $] -3 ; 2 [\cup [1 ; 3{,}5] =] -3 ; 3{,}5]$
- $[-5 ; 2] \cap [3 ; 7{,}5 [= \varnothing$

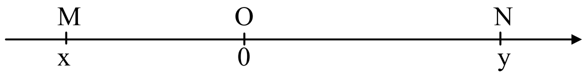
5) VALEUR ABSOLUE

A) DISTANCE ENTRE DEUX REELS

La **distance** entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit.
Cette distance est notée $|x - y|$ ou encore $|y - x|$.

$|x - y|$ se lit " valeur absolue de x moins y ".

Interprétation graphique de $|x - y|$
Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y.
$|x - y|$ est la distance entre les points M et N, c'est à dire MN.



Ex :

- $|4 - 5|$ est la distance entre les réels 4 et 5. Cette distance est égale à $5 - 4 = 1$
- $|-1 - 4|$ est la distance entre les réels -1 et 4. Cette distance est égale à $4 - (-1) = 5$

B) VALEUR ABSOLUE D'UN REEL

Lorsque $y = 0$, $|x - y| = |x|$. Le réel $|x|$ est alors la distance entre x et 0.

Donc : $|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque } x \leq 0 \end{cases}$

Quelques propriétés :

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

Ex :

- $|4 - \sqrt{17}| = \sqrt{17} - 4$ car $4 - \sqrt{17}$ est un nombre négatif
- $|6 - \sqrt{31}| = 6 - \sqrt{31}$ car $6 - \sqrt{31}$ est un nombre positif

Rem :

- Pour tout réel x on a, $|x^2| = x^2$ (car $x^2 \geq 0$)
- Pour tout réel x on a, $\sqrt{x^2} = |x|$