Fiche méthode 05 – Inéquations – Etudes de signes

I. Définitions – Propriétés - Méthodes

Définitions :

- Une inégalité est une affirmation qui utilise un des symboles $<$, $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$ et qui peut être vraie ou fausse.
- Une inéquation est une inégalité où figure un nombre inconnu.
- Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'inégalité soit vraie. On appelle ensemble des solutions de l'inéquation l'ensemble de ces valeurs.
- Deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Propriétés :

On transforme une inéquation en une inéquation équivalente :

- En ajoutant un même nombre aux membres de l'inéquation et en conservant le sens de l'inégalité.
- En multipliant par un même réel strictement positif les membres d'une inéquation et en conservant le sens de l'inégalité.
- En multipliant par un même réel strictement négatif les membres d'une inéquation et en changeant le sens de l'inégalité.

II. Inéquations du premier degré – Signe d'une expression du type $ax+b$

Etudier le signe de l'expression $ax+b$, c'est déterminer les valeurs de x pour lesquelles $ax+b>0$, $ax+b=0$ et $ax+b<0$.

On suppose que $a>0$	On suppose que $a<0$
$\begin{cases} ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a} \\ ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a} \\ ax+b<0 \Leftrightarrow ax<-b \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a} \end{cases}$	$\begin{cases} ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a} \\ ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a} \\ ax+b<0 \Leftrightarrow ax<-b \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a} \end{cases}$

On peut résumer ces résultats dans un unique tableau de signes

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	Signe de l'opposé de a	0	Signe de a

III. Signe d'un produit ou d'un quotient – Inéquations produits ou quotients

La règle des signes

- Le produit ou le quotient de deux réels non nuls de même signe est strictement positif.
- Le produit ou le quotient de deux réels non nuls de signes contraires est strictement négatif.

Si $A>0$ et $B>0$ alors $A\times B>0$ et $\frac{A}{B}>0$

Si $A<0$ et $B<0$ alors $A\times B>0$ et $\frac{A}{B}>0$

Si $A>0$ et $B>0$ (ou si $A<0$ et $B>0$) alors $A\times B<0$ et $\frac{A}{B}<0$

Méthode : Lorsqu'on cherche à déterminer le signe d'une expression "complexe" ou à résoudre une inéquation "complexe", on se ramène à une inéquation dont le second membre est nul. On tente ensuite de se ramener à une inéquation produit ou à une inéquation quotient. Un tableau de signes permet alors de conclure.

IV. Exercices

Exercice 1

1. Résoudre les inéquations : $4x-7<8-3(x+1)$ et $10x+6(1-2x)\geqslant 12$
2. Déterminer le signe des expressions : -3x+2 ; $-5x+2$; $0{,}2x+0{,}2$ et $3-4x$.

Exercice 2 – Exercice guidé

A. Le but est d'étudier le signe de l'expression $P(x)=(2x+6)(-3x+2)$ en fonction des valeurs de x.

1. Résoudre $P(x)=0$
2. Recopier puis compléter le tableau de signes ci-contre :
3. Conclure

x	$-\infty$	-3	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$(2x+6)$				
$(-3x+2)$				
$P(x)$				

B. Le but est de résoudre l'inéquation $(x-3)^2>(1-2x)^2$

1- Rendre le second membre nul afin de se ramener à une inéquation du type $A(x)>0$.

2- Utiliser une identité remarquable pour se ramener à une inéquation produit.

3- Résoudre $A(x)=0$ puis dresser le tableau de signes de $A(x)$.

4- Conclure.

C. Le but est d'étudier le signe de l'expression $Q(x)=\dfrac{2x+6}{-x+2}$.

1- Résoudre $Q(x)=0$.

2- Recopier et compléter le tableau de signes ci-contre :

La double barre indique la valeur interdite

3- Conclure.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$(2x+6)$				
$(-x+2)$				
$P(x)$			$\Vert$	

D. Le but est de résoudre l'inéquation $\dfrac{4+x}{x+1}\geqslant x$.

1- Rendre le second membre nul afin de se ramener à une inéquation du type $A(x)\geqslant 0$.

2- Réduire $A(x)$ au même dénominateur et factoriser, si nécessaire, le numérateur ainsi que le dénominateur afin de se ramener à une inéquation quotient.

3- Résoudre $A(x)=0$ puis dresser le tableau de signes de $A(x)$.

4- Conclure.

Exercice 3

Déterminer le signe des expressions suivantes :

$A(x)=(3-2x)(5+x)$

$B(x)=(2x+5)(5x-4)-(2x+1)(5x-4)$

$C(x)=9x^2-16+(3x-4)(6-3x)$

$D(x)=-3(x^2-4x+4)$

$E(x)=\dfrac{4+x}{5-2x}$

$F(x)=\dfrac{(x-2)(3-x)}{2x+1}$

$G(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2}-1$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(9+6x)(2+4x)\leqslant 0$
2. $(2x+3)\geqslant 4$
3. $(x+1)(2-x)<x^2-1$
4. $x^2-2x+1\leqslant 0$
5. $\dfrac{x^2-9}{2x-3}\leqslant 0$
6. $\dfrac{2-x}{3x+1}<\dfrac{2}{5}$