Chapitre 1 : Nombres réels

FICHES DE COURS

1. Rappels du collège

a. Ensemble des entiers naturels ℕ

L'ensemble des entiers naturels se note ℕ. Il s'agit des valeurs entières positives.

On utilise la notation suivante : ℕ = {0 ; 1 ; 2 ; 3… }

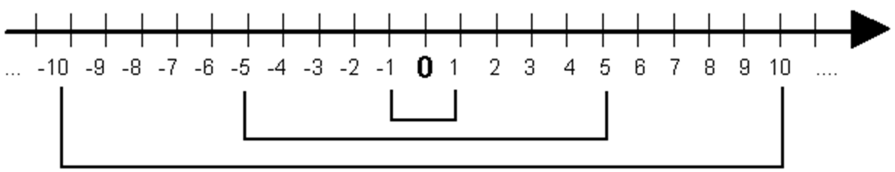
b. Ensemble des entiers relatifs ℤ

L'ensemble des entiers relatifs se note ℤ. Il s'agit des valeurs entières positives et négatives. On utilise la notation suivante : ℤ = {… -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 …}

2. Ensemble des nombres réels ℝ

a. La droite numérique

La droite numérique représente un ensemble continu et dense de points. Chacun de ses points a une abscisse ou adresse correspondant à un nombre réel.



b. Notations +∞ et -∞

L'infini est une notion ou un concept qui n'a pas d'équivalent dans le monde physique. Il est noté ∞**.**

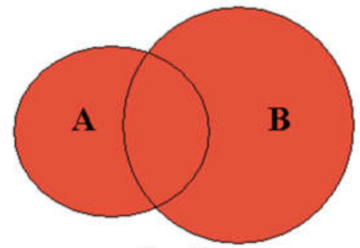
c. Les intervalles de ℝ

L'intervalle noté …	est l'ensemble des réels x tels que …	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a\,;\,b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a\,;\,b[$	$a < x < b$	
$]a\,;\,b]$	$a < x \leq b$	
$[a\,;\,b[$	$a \leq x < b$	
$[a\,;\,+\infty[$	$a \leq x$	
$]a\,;\,+\infty[$	$a < x$	
$]-\infty\,;\,b]$	$x \leq b$	
$]-\infty\,;\,b[$	$x < b$	

d. La réunion d'intervalles

Soit A et B deux intervalles. La réunion des intervalles A et B est définie par :

- L'ensemble des nombres réels qui appartiennent à « A ***ou*** *à B* ».
- La notation A∪B.

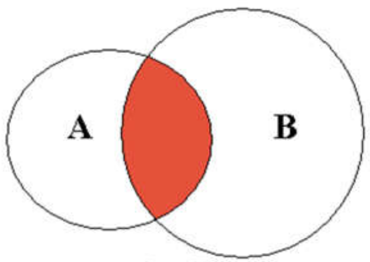


A∪B

e. L'intersection d'intervalles

Soit A et B deux intervalles. L'intersection des intervalles A et B est définie par :

- L'ensemble des nombres réels qui appartiennent à « A ***et*** *à B* ».
- La notation A∩B.



A∩B

3. Les valeurs absolues

a. La notation | |

- **|x| = x si x≥0**
- **|x| =-x si x<0**

b. Propriétés

Soit x et y deux nombres réels

$|x| \geq 0$ $|-x| = |x|$

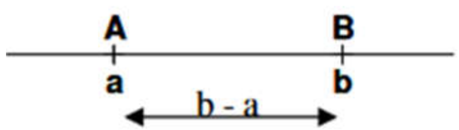
$\sqrt{x^2} = |x|$ $|x| = |y|$ équivaut à x=y ou x=-y

$|x \times y| = |x| \times |y|$ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ssi y≠0

c. Distance et valeur absolue

Soit a et b deux nombres réels. Sur la droite graduée, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives a et b est le nombre :

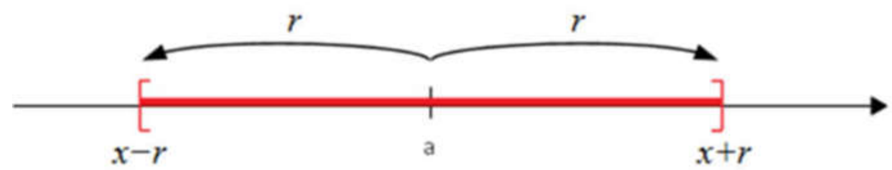
$$AB = d(a;b) = |b-a|$$



Propriété :

Soit a ∈ ℝ

Dire que x est tel que $|x-a| \leq r$ signifie que x appartient à l'intervalle [a-r ; a+r]



4. Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$, rationnels $\mathbb{Q}$, et réels $\mathbb{R}$

a. Les nombres décimaux

Les nombres décimaux $\mathbb{D}$ sont définis par :

$$\frac{a}{10^n} \quad avec\ a \in \mathbb{Z}$$

b. Les nombres rationnels

Les nombres rationnels sont définis par :

$$\frac{a}{b} \quad fraction\ irréductible \quad avec\ a \in \mathbb{Z} \quad b \in \mathbb{N}^*$$

c. Les nombres réels

- <u>nombres irrationnels</u>

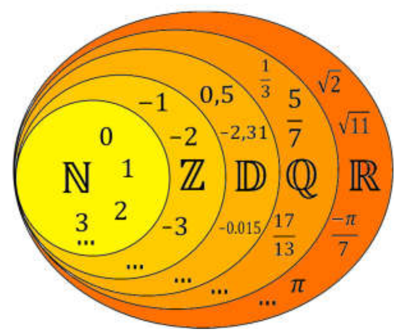
Les nombres réels ℝ qui ne sont pas rationnels sont irrationnels

Exemple : $\sqrt{2}$; π

- <u>classification des nombres</u>

Les ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



5. Multiples et diviseurs

Soient *a* et *b* deux nombres entiers non nuls.

Si l'on a : a$= k \times b$ avec k nombre entier

On dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a

Vocabulaire :

PGCD : plus grand commun diviseur

PPCM : plus petit commun multiple

Méthode : Déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier N

On teste la division entière avec tous les nombres entiers compris entre 1 et $\sqrt{N}$

6. Critères de divisibilité

- divisibilité par 2 : le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair)
- divisibilité par 3 : la somme des chiffres est un multiple de 3
- divisibilité par 4 : les deux derniers chiffres sont multiples de 4
- divisibilité par 5 : le chiffre des unités est 0 ou 5
- divisibilité par 9 : la somme des chiffres est un multiple de 9
- divisibilité par 10 : le chiffre des unités est 0

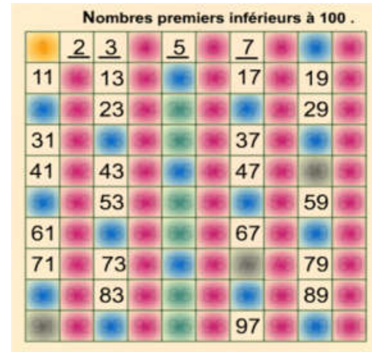
7. Les nombres premiers

Définition : Un nombre est premier s'il a 2diviseurs 1 et lui-même.

Premiers nombres premiers : 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

Crible d'Euratostène : Le crible d'Euratostène indique les nombres premiers inférieurs à 100

- on écrit la liste de tous les nombres jusqu'à 100
- on élimine 1, - on souligne 2 et on élimine tous les multiples de 2
- puis on fait de même avec 3, 5 et 7



Décomposition en facteurs premiers :

Tout nombre entier *n* peut s'écrire comme un produit de nombres premiers

8. Parité des nombres

Nombres pairs : - Les nombres pairs positifs sont définis par n=2k $k \in \mathbb{N}$
- Le carré d'un nombre pair est un nombre pair et réciproquement

Nombres impairs : - Les nombres impairs positifs sont définis par n=2k+1 $k \in \mathbb{N}$
- Le carré d'un nombre impair est un nombre impair et réciproquement

Propriétés :
- la somme de 2 nombres pairs est un nombre pair
- la somme de 2 nombres impairs est un nombre pair
- la somme d'un nombre pair et d'un nombre pair est un nombre impair
- la puissance d'un nombre conserve la parité

9. Fractions irréductibles

Une fraction est dite irréductible, lorsque le diviseur commun au numérateur et au dénominateur est 1.

Méthode : Pour écrire une fraction sous forme irréductible on décompose le numérateur et le dénominateur sous la forme d'un produit de nombres premiers et on simplifie.

EXERCICES - DEVOIRS

Exercice 1

Compléter le tableau suivant, et pour chaque nombre, cocher la case correspondant aux ensembles auxquels ce nombre appartient.

x	N	Z	D	Q	R
-13					
59					
$-\frac{7}{4}$					
$\sqrt{4}$					
$\frac{23}{7}$					
$4-\pi$					
-3,5					
$\sqrt{2}$					
$\frac{3}{5}$					
$\frac{1}{9}$					

Exercice 2

a. Donner un rationnel non décimal.
b. Donner un réel non rationnel.
c. Donner un décimal non entier et non rationnel.
d. Donner un entier non naturel.
e. Donner un irrationnel compris entre et .
f . Donner un entier relatif mais non naturel supérieur à l'inverse de : -1 .

Exercice 3

Compléter le tableau suivant :

Notation d'intervalle	Inégalité(s) correspondante(s)	Représentation sur une droite graduée	Phrase
[-3 ; 5]			
	x < 3		
			Intervalle de 4 à 6 fermé en 4 et ouvert en 6.
[2 ; +∞ [			
	-3 < x ≤ - 1		
			Intervalle de - ∞ à 5 , fermé en 5.
			Intervalle de – 2 à 5 ouvert.

Exercice 4

Compléter avec les symboles ∈ ou ∉ :

1. $\sqrt{2}\cdots\cdots\left]0\ ;\ 1{,}414\right]$

2. $\sqrt{3}\cdots\cdots\left[1{,}732\ ;\ 5\right]$

3. $0{,}99\cdots\cdots\left]0\ ;\ 1\right[$

4. $10{,}01\cdots\cdots\left]10^{-1}\ ;\ 10^{1}\right]$

5. $\pi\cdots\cdots\left]0\ ;\ 3{,}14\right]$

6. $-2\cdots\cdots\left]-2{,}1\ ;\ 2\right]$

Exercice 5

Compléter le tableau suivant :

Intervalle I	Intervalle J	I ∩ J	I ∪ J	Représentation sur la droite des réels
[- 10 ; 2 [	[- 5 ; 3]			
] -∞ ; 2 [	[0 ; 5 [			
[3 ; + ∞ [	] -∞ ; 6 [			
] -∞ ; - 1 [	] – 4 ; - 3 [			
] – 4 ; 1]	[1 ; 5]			
] – 4 ; 3]	] 3 ; 5]			

Exercice 6

Déterminez et simplifiez les ensembles suivants :

1. $]-\infty\,;8]\cup]-3\,;10]=$ ....
2. $]-\infty\,;8]\cap]-3\,;10]=$ ....
3. $]-\infty\,;8]\cup[1\,;+\infty[=$ ....
4. $]-\infty\,;8]\cap[1\,;+\infty[=$ ....
5. A est l'ensemble des réels x tels que : $x>2$ et $x\leq 5$ alors
   $A=\cdots\cdots$
6. B est l'ensemble des réels x tels que : $x<0$ et $x\geq -5$ alors
   $B=\cdots\cdots$

Exercice 7

Précisez le plus petit ensemble, au sens de l'inclusion, auquel appartiennent les nombres suivants :

1. $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$;
2. $B=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$;
3. $C=-\sqrt{2}\times\sqrt{8}$;
4. $D=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$;
5. $E=\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{8}$;

Exercice 8

$\boxed{\text{I}}$ **(4 points)** Pour chacune des affirmation suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, indiquer pourquoi.

Affirmation 1 : $\left\{-2;3;\dfrac{10}{3}\right\}\subset\mathbb{Z}$. ....

....

Affirmation 2 : $\left\{-2;3;\dfrac{12}{3}\right\}\subset\mathbb{Z}$ ....

....

Affirmation 3 : $\{-2;\sqrt{2};\sqrt{9}\}\subset\mathbb{Z}$. ....

....

Affirmation 4 : $\{3;-5;10^{-5}\}\subset\mathbb{Z}$. ....

....

Affirmation 5 : $\{-3;\sqrt{25};\pi\}\subset\mathbb{Q}$. ....

....

Affirmation 6 : $\left\{2;\dfrac{7}{8};\sqrt{9}\right\}\subset\mathbb{D}$. ....

....

Affirmation 7 : $\{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1);\sqrt{25};2^{12}\}\subset\mathbb{N}$. ....

....

Affirmation 8 : $\{2; \sqrt{8}; \sqrt{16}\} \subset \mathbb{N}$ ....

....

(II) **(6 points)**

1. Compléter le tableau.

L'ensemble	des réels vérifiant	se note
I	$-3 \leqslant x \leqslant 7$	
J	$-5 \leqslant x < -2$	
K		$]2\ ;\ 13]$
L	$x \leqslant 7$	
M	$1 < x$	

2. Ecrire les ensembles suivants de manière plus simple.
   a) $I \cap J =$ ....
   b) $I \cup J =$ ....
   c) $J \cap K =$ ....
   d) $K \cup L =$ ....
   e) $I \cap L =$ ....
   f) $K \cup M =$ ....

Exercice 9

x est l'abscisse d'un point M d'une droite graduée. Les points A, B et C de cette droite ont pour abscisses respectives 3, -3 et 5.
Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'une valeur absolue et placer sur la droite les points M correspondants (une droite par question) :
1. La distance OM vaut 5.
2. La distance OM est inférieure ou égale à 1.
3. La distance AM vaut 7.
4. La distance CM vaut 3 et la distance AM est strictement inférieure à 3.

Exercice 10

Ecrire plus simplement :

$G =]-10; 3[\cap \mathbb{N} =$

$H =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[=$

Exercice 11

Sur un axe gradué, on place les point A d'abscisse 1, B d'abscisse 2 et M d'abscisse x. Résoudre graphiquement puis par le calcul :

1. $|x-1| = 1$
2. $|x-2| = 3$
3. $|x-5| \leq 3$
4. $|x+4| \leq 1$
5. $|x+5| = |x+1|$

Exercice 12

1.a. Représenter les points A, B, C, D, E, F sur une droite graduée, ayant pour abscisses respectives :

$$-\frac{1}{4} \quad ; \quad -\frac{2}{3} \quad ; -3 \quad ; \ 10 \ ; 5 \ ; 1$$

b. Calculer les distances AB, BC, EA, FC
c. Pour les segments [AB] [DF] [AE]
- calculer l'abscisse du milieu et la longueur de l'intervalle
- exprimer l'abscisse x de tout point M appartenant à cet intervalle sous la forme :

$$|x-a| \leq r$$

- Répondre par vrai ou faux en justifiant :

D$\in$ [AE] F$\in$ [AB] E$\in$ [DF]

2. Effectuer les calculs suivants comportant des valeurs absolues :

a. $|5-3| + |4-7|$
b. $|-3-10| - |7-10|$
c. $5|0{,}2-1| - 2|3-2{,}6|$
d. $5|0{,}9-1.8| - 3{,}5$

Exercice 13

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Donner la réponse exacte en justifiant toutes les étapes du calcul.

1. La quantité $\left|2\sqrt{2}-5\right|+\left|3-\sqrt{2}\right|$ est égale à :

   a. $3\sqrt{2}+8$ b. $\sqrt{2}-2$ c. $8-3\sqrt{2}$ d. $2-\sqrt{2}$ e. $2+\sqrt{2}$

2. Soit x un nombre réel. Alors $|-x|$ est égale à :

   a. x b. –x c. $|x|$ d. Aucune de ces réponses

3. L'intervalle [-1 ;3] est représenté par l'inéquation :

   a. $|x+1|\leq 2$ b. $|x-1|\leq 2$ c. $1\leq |x|\leq 3$ d. A

4. L'équation $|x+3|=5$ a pour solution :

   a. 2 b. 2 et -2 c. 2 et -8 d. 5 et 2 e. Aucune de ces réponses

Exercice 14

. - Simplifier :

$A=|-5+10|$

$B=|-3-(-2)|$

$C=|-2\sqrt{2}+\sqrt{12}|$

$D=|-3\pi+9|$

$E=|-2-10^{-2}|$

$F=|(3-\sqrt{2})^2|$

$G=\left|-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\right|$

$H=\left|-0.5+\frac{1}{5}\right|$

$I=|5\sqrt{5}-7\sqrt{7}|$

$J=|-2\sqrt{2}+1|$

Exercice 15

2 - Recopier le tableau ci-dessous puis comparer $|x|\times|y|$ et $|x\times y|$:

x	y	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert x\rvert\times\lvert y\rvert$	$\lvert x\times y\rvert$
2	– 3				
– 4	5				
3	6				
– 4	– 6				

Exercice 16

3 - Recopier le tableau ci-dessous puis comparer $|x|+|y|$ et $|x+y|$:

x	y	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$	$\lvert x+y\rvert$
1	– 5				
– 6	2				
2	6				
– 3	– 3				

Exercice 17

4 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en vous aidant d'une représentation graphique :

$(E_1):|x|=3$

$(E_2):|x-4|=1$

$(E_3):|x+2|=5$

$(E_4):|-x+1|=4$

$(E_5):|x-7|=2$

$(E_6):|x+7|=3$

$(E_7):|5-x|=-2$

$(E_8):|5-x|=|5-7|$

Exercice 17

8 - Compléter le tableau ci-dessous :

Encadrement	Intervalle	Centre	Rayon	Distance	Valeur absolue
$3<x<9$	$x\in\,]3\,;9[$	6	3	$d(x\,;6)<3$	$\lvert x-6\rvert<3$
$-3<x<7$					
				$d(x\,;-1)\leqslant 0{,}1$	
					$\lvert x+2\rvert<\frac{1}{2}$
				$d(x\,;2)>4$	
	$x\in[-1\,;5]$				
$x\leqslant -2$ ou $x>6$					
					$\lvert -x-1\rvert>2$

Exercice 18

1. a. Décomposer en produits de facteurs premiers 3600.
   b. Donner tous les diviseurs de 3600.
   c. Démontrer que le produit de trois nombres entiers pairs consécutifs est un multiple de 8.
2. a. Décomposer 1512 et 784 en produits de facteurs premiers.
   b. Utiliser la décomposition ci dessus pour donner le PGCD et le PPCM 1512 et 784.
   c. En déduire rapidement le résultat du calcul suivant :
   $$\frac{1}{1512}+\frac{1}{784}$$
3. a. Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers : 225 et 144.
   b. En déduire le PGCD (225 ; 144) et le PPCM (225 ; 144).
   c. Simplifier au maximum le nombre suivant : $\frac{114}{225}$
4. Démontrer la proposition suivante :
   « *Quels que soient a et b deux entiers naturels non nuls,*
   si a divise b et si b divise a alors a =b »

Exercice 19

Soient a, b et d des entiers avec d non nul.

On suppose que d est un diviseur de a et que d est un diviseur de b également.

0) Traduire, en terme de multiples, les phrases :" *d est un diviseur de a*" ; "*d est un diviseur de b*".

1a Démontrer que $a - b$ est un multiple de d. Qu'en déduisez-vous concernant le nombre d.

1b) En déduire que deux entiers consécutifs quelconques sont premiers entre eux.

1c) Que peut-on dire des fractions de forme $\frac{a}{a+1}$ où a est un entier naturel quelconque ?

Exercice 20

On appelle *triplet Pythagoricien* la donnée de trois nombres entiers a, b et c tels que : $a^2 + b^2 = c^2$: on notera (a, b, c) un tel triplet.

1) Trouver quelques exemples de *triplets Pythagoriciens.*

2) Un *triplet Pythagoricien* peut-il être constitué de trois nombres impairs ? Justifier.

Exercice 21

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant chacune de vos réponses.

<u>Remarque</u> : pour justifier qu'une réponse est fausse, on cherche en général un contrexemple, pour justifier qu'une réponse est vraie on argumente, on démontre.

Affirmation 1 : la somme de deux diviseurs d'un entier divise cet entier.

Affirmation 2 : a, b et c étant des entiers, si a est un diviseur du produit bc, alors a divise au moins l'un des deux facteurs b ou c.

Affirmation 3 : $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ est un nombre décimal.

Affirmation 4: pour tout entier n, l'entier $4n+7$ est impair.

Affirmation 5 : pour tout entier naturel n pair, l'entier $n^2(n+4)$ est un multiple de 8.

Exercice 22

1) On donne l'algorithme suivant :

$A \leftarrow 3$
$B \leftarrow 5$
$C \leftarrow 2A+3B$
Afficher C

Quel est l'affichage obtenu en sortie ?

2) Voici un nouvel algorithme :

Demander à l'utilisateur l'entier relatif A de son choix.
$B \leftarrow A+5$
$C \leftarrow B-2$
Afficher C

i) Donner l'affichage en sortie de l'algorithme lorsque l'utilisateur choisit -1 comme valeur de A.

ii) Trouver l'entier A choisi par l'utilisateur au départ si l'algorithme affiche en sortie la valeur 43.

Exercice 23

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

Affirmation 1

La somme de deux nombres impairs est un nombre impair.

Affirmation 2

La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

Exercice 24

Démontrer que pour tout nombre entier impair naturel $n \geq 5$, n^2-1 est un multiple de 4

Exercice 25

1. Le nombre 588 peut se décomposer sous la forme $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.
   Quels sont ses diviseurs premiers, c'est-à-dire les nombres qui sont à la fois des nombres premiers et des diviseurs de 588 ?
2.
   2. a. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 27 000 000.
   2. b. Quels sont ses diviseurs premiers?
3. Déterminer le plus petit nombre entier positif impair qui admet trois diviseurs premiers différents. Expliquer votre raisonnement.
4. Démontrer que la différence des carrés de deux entiers consécutifs quelconques est impaire

Exercice 26

Soit n un entier naturel.

Développer $(n^2+2)^2$, puis en déduire une factorisation de n^4+4.

Le nombre 2019^4+4 est-il un nombre premier ? Justifier.

Exercice 27

Trouver deux naturels pairs consécutifs dont la somme est 206 ?