Equations de droites. Coefficient directeur

I) Caractérisation analytique d'une droite

m, p et c désignent des nombres réels.

1) Propriété :

Dans un repère l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tel que $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ ou $x = \mathrm{c}$ est une droite.

2) Propriété réciproque:

Dans un repère, toute droite a une équation soit de la forme $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ soit de la forme $x = \mathrm{c}$

Remarques :

• Ces équations sont des mises en forme particulières des équations de droites. On parle **d'équations réduites**. D'autres écritures des équations de droites seront abordées dans les programmes des années ultérieures.

• Les droites dont une équation est de la forme $x = \mathrm{c}$ sont parallèles à l'axe des ordonnées

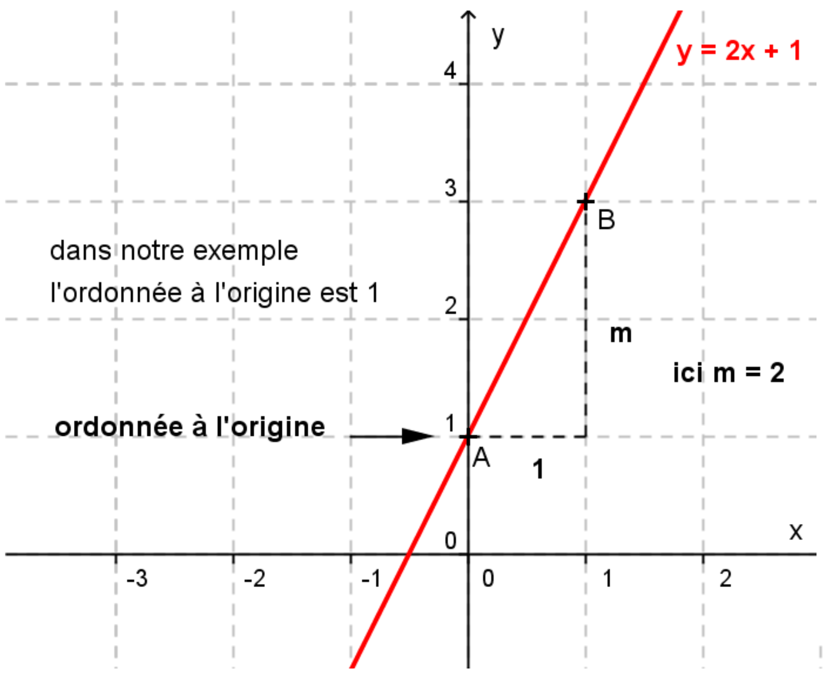
• Toute droite dont une équation est de la forme $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, et donc coupe celui-ci. Le nombre p est l'ordonnée du point, de la droite, d'abscisse 0, intersection avec l'axe des ordonnées :

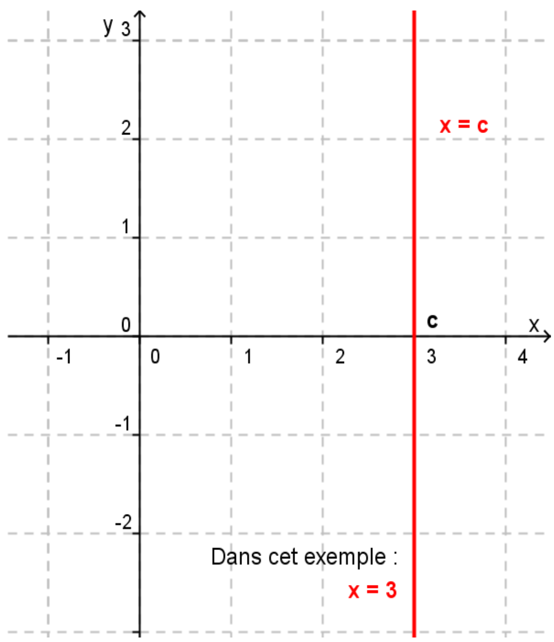
On l'appelle donc ordonnée à l'origine de la droite (d)

• Le nombre m est la pente de la droite (d) . On l'appelle coefficient directeur de (d).

Ce nombre m traduit mathématiquement l'inclinaison de la droite

• Pour déterminer si un point M $(x_M\,;y_M)$ appartient à la droite (d) d'équation $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$, il suffit de vérifier que $y_M = \mathrm{m}\,x_M + \mathrm{p}$





3) Exemples :

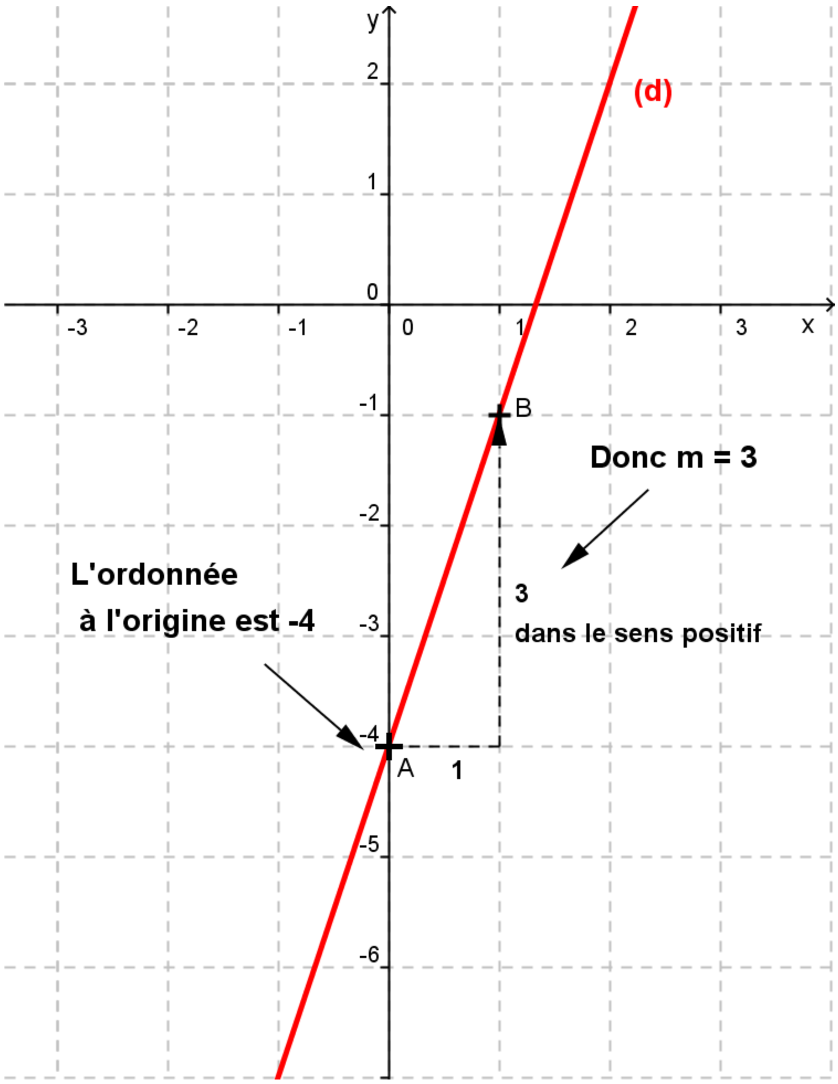
Exemple 1 : Le point M (**2** ; **5**) appartient-il à la droite (d) d'équation : $y = 4x - 3$?

On remplace x par l'abscisse de M qui est **2** dans $4x - 3$ et on vérifie que le résultat donne bien l'ordonnée de M qui est : **5**.
$4 \times 2 - 3 = 8 - 3 = 5$ donc **le point M appartient à la droite (d)**

Exemple 2 : Le point M (**3** ; **7**) appartient-il à la droite (d) d'équation : $y = -2x + 8$?

$-2 \times 3 + 7 = -6 + 7 = 1$. Comme le résultat est différent de **7** alors **le point M n'appartient pas à la droite (d)**

Exemple 3 : Déterminer graphiquement l'équation d'une droite dont le coefficient directeur est positif:

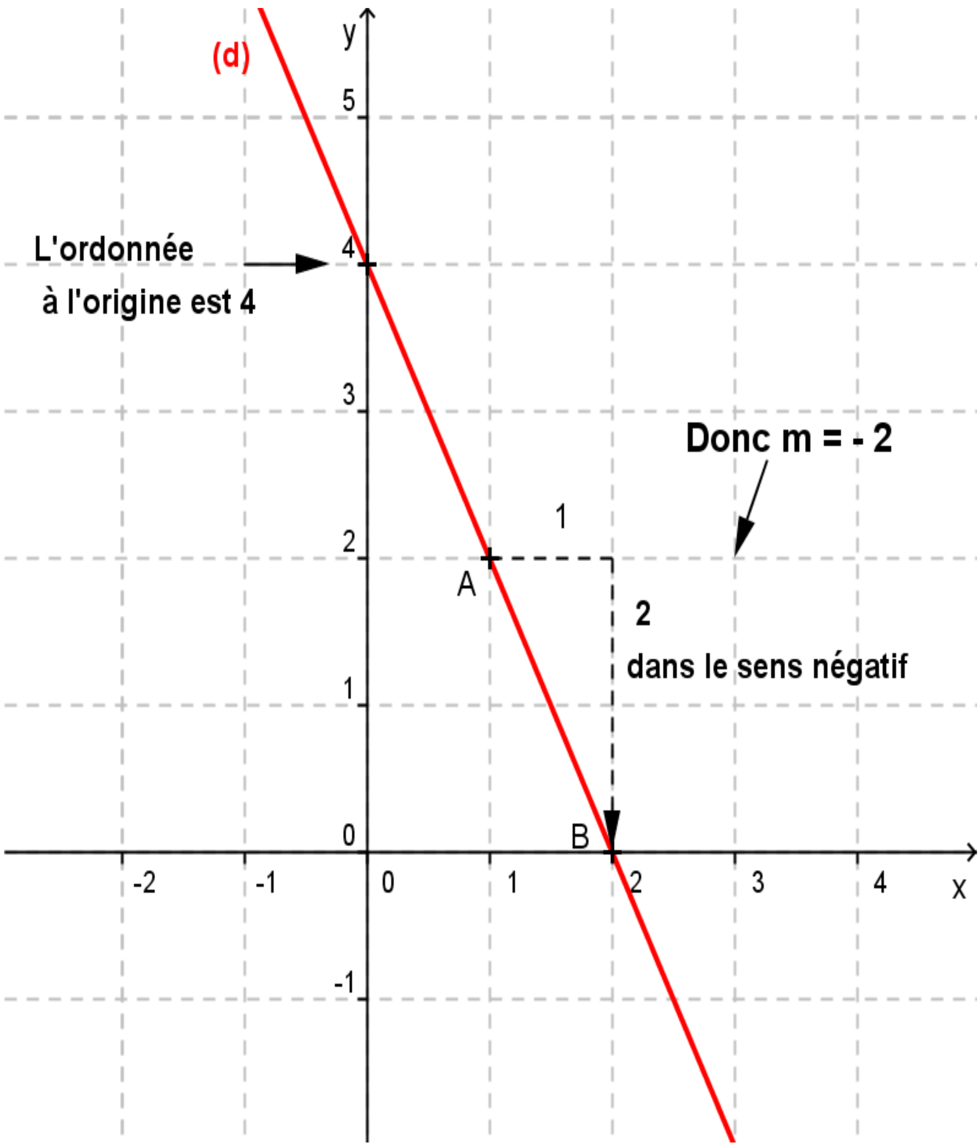


On lit graphiquement l'ordonnée du point de la droite dont l'abscisse est O. Dans notre exemple sa valeur est -4. **L'ordonnée à l'origine est -4 donc p = -4**

On prend deux points de la droite dont la différence des abscisses est 1 : La différence des ordonnées est 3 dans le sens positif donc m = 3

L'équation de la droite (d) est $y = 3x - 4$

Exemple 4 : Déterminer graphiquement l'équation d'une droite dont le coefficient directeur est négatif:



On lit graphiquement l'ordonnée du point de la droite dont l'abscisse est O. Dans notre exemple sa valeur est 4. **L'ordonnée à l'origine est 4 donc $\mathbf{p = 4}$**

On prend deux points de la droite dont la différence des abscisses est 1 : La différence des ordonnées est 2 dans le sens négatif donc $\mathrm{m} = -2$

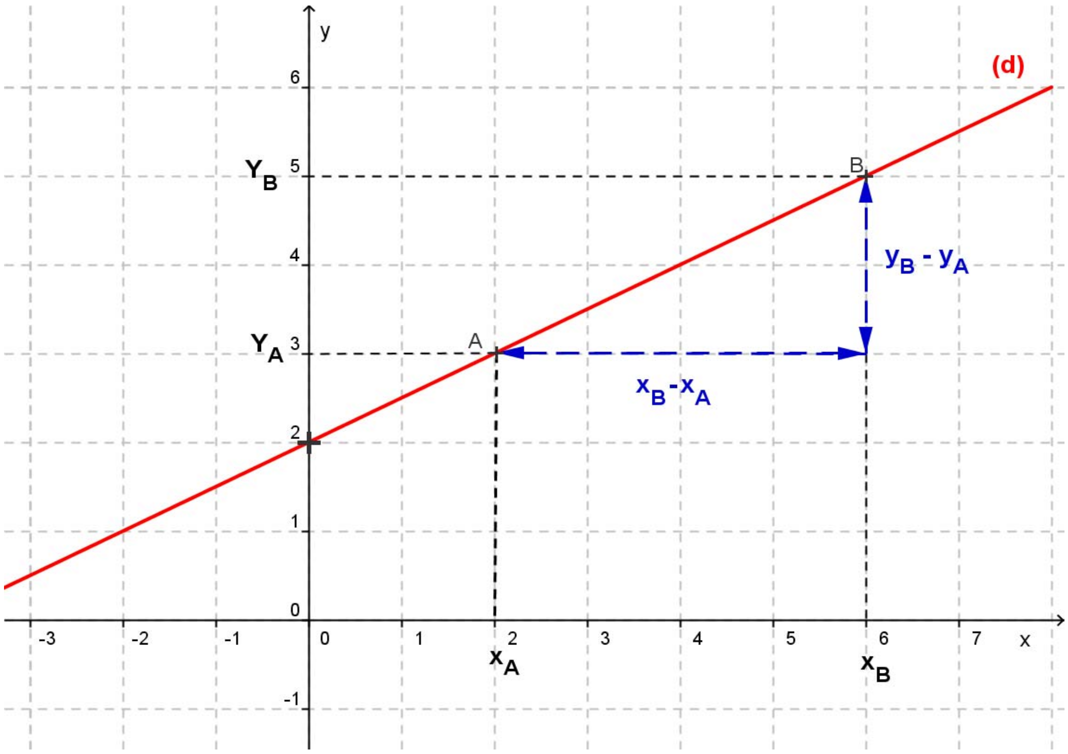
L'équation de la droite (d) est $y = -2x + 4$

II) Calcul du coefficient directeur

1) Formule permettant de calculer le coefficient directeur

Dans un repère, la droite (d) passant par les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) distincts ($x_A \neq x_B$), a pour coefficient directeur le nombre m tel que :

$$\mathrm{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Remarque : si $x_A = x_B$, alors on ne peut pas calculer le coefficient directeur car le dénominateur s'annule dans la formule précédente. Toutefois, ce cas n'est pas inconnu : la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.

2) Exemples

Exemple 1 :

Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par les points A($\underset{x_A}{3}$; $\underset{y_A}{2}$) et B($\underset{x_B}{8}$; $\underset{y_B}{4}$)

Le coefficient directeur est :

$$\mathrm{m} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{8-3} = \frac{2}{5}$$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{2}{5}$

Exemple 2 :

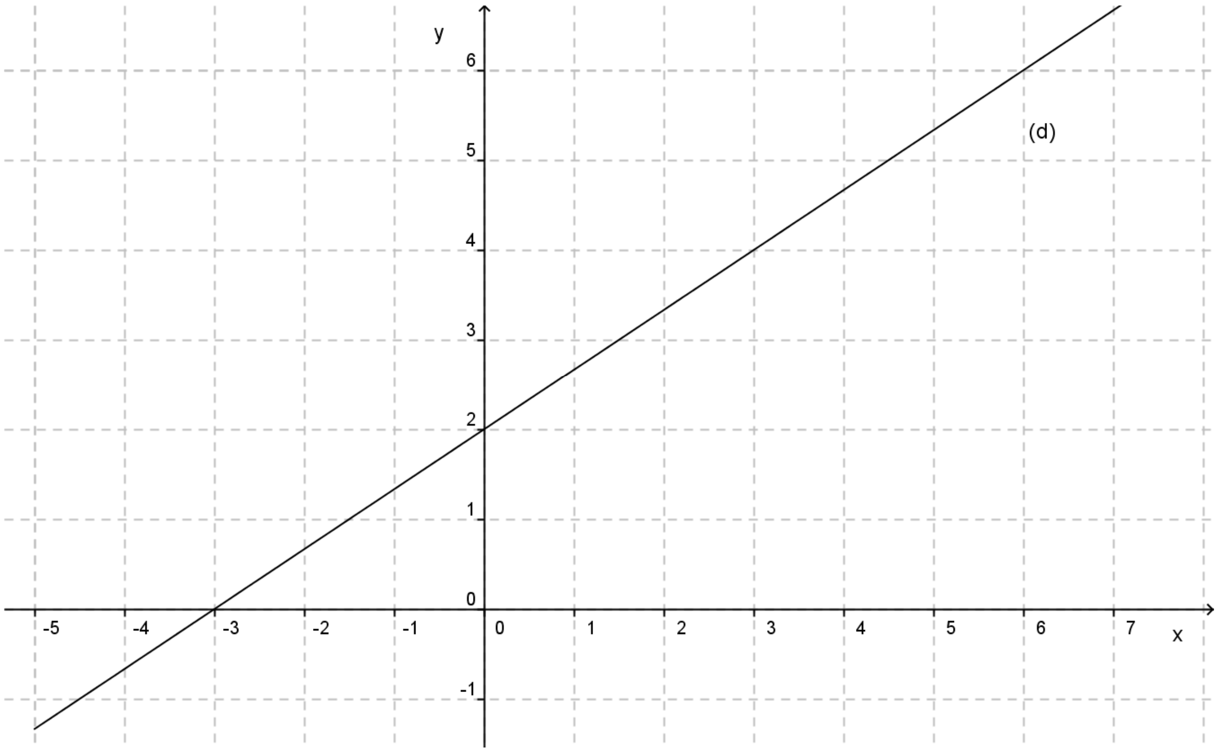
Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par : $A(\underset{x_A}{-7}\ ;\ \underset{y_A}{5})$ et $B(\underset{x_B}{3}\ ;\ \underset{y_B}{-24})$

Le coefficient directeur est : $\mathrm{m} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-24-5}{3-(-7)} = \dfrac{-29}{10}$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $-\dfrac{29}{10}$ ou -2,9

3) Déterminer le coefficient directeur par lecture graphique :

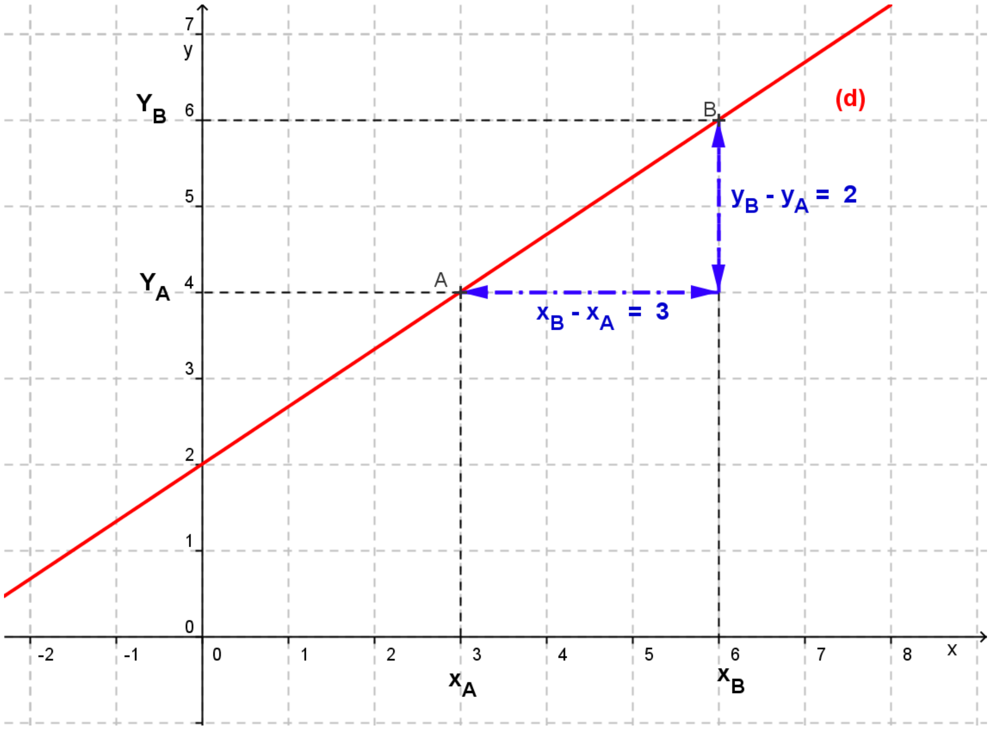
Exemple : A partir du graphique ci-dessous, déterminer le coefficient directeur de la droite (d) :



Méthode :

Pour déterminer le coefficient directeur de la droite (d), nous devons choisir deux points appartenant à (d). Prenons deux points A et B dont les coordonnées peuvent être lues avec **précision**

Par exemple : A(3 ; 4) et B(6 ; 6)



On peut lire graphiquement que y_B - y_A = 2 (dans le sens positif)

Et $x_{B\,-}\,x_A\; = 3$ On a donc $\mathrm{m} = \frac{y_B\,-y_A}{x_{B-}\,x_A} = \frac{2}{3}$

Le coefficient directeur est donc égal à $\frac{2}{3}$

III) Déterminer l'équation d'une droite

1) Par le calcul

Exemple 1 :

Déterminer l'équation de la droite (d) passant par les points A(1 ; 5) et B(4 ;11)

Comme les abscisses sont différentes, l'équation de la droite est de la forme :

$$y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$$

• On Calcule le coefficient directeur m :

$\mathrm{m} \;=\; \frac{y_B\,-y_A}{x_{B-}\,x_A} = \frac{11-5}{4-1} \;=\; \frac{6}{3} \;=\; 2.$ Donc $\mathrm{m} \;=\; 2$

• **Pour calculer p :**

On sait que l'équation de la droite (d) est de la forme est : $y = 2x + \mathrm{p}$

Comme A appartient à la droite (d) alors : $y_A = 2x_A + \mathrm{p}$

$5 = 2 \times 1 + \mathrm{p}$ On obtient : $\mathrm{p} = 5 - 2 = 3.$ Donc $\mathbf{p = 3}$

• **Conclusion :** L'équation de la droite (d) passant par les points A(1 ; 5) et B(4 ;11) est : $\boldsymbol{y = 2x + 3}$

Exemple 2 :

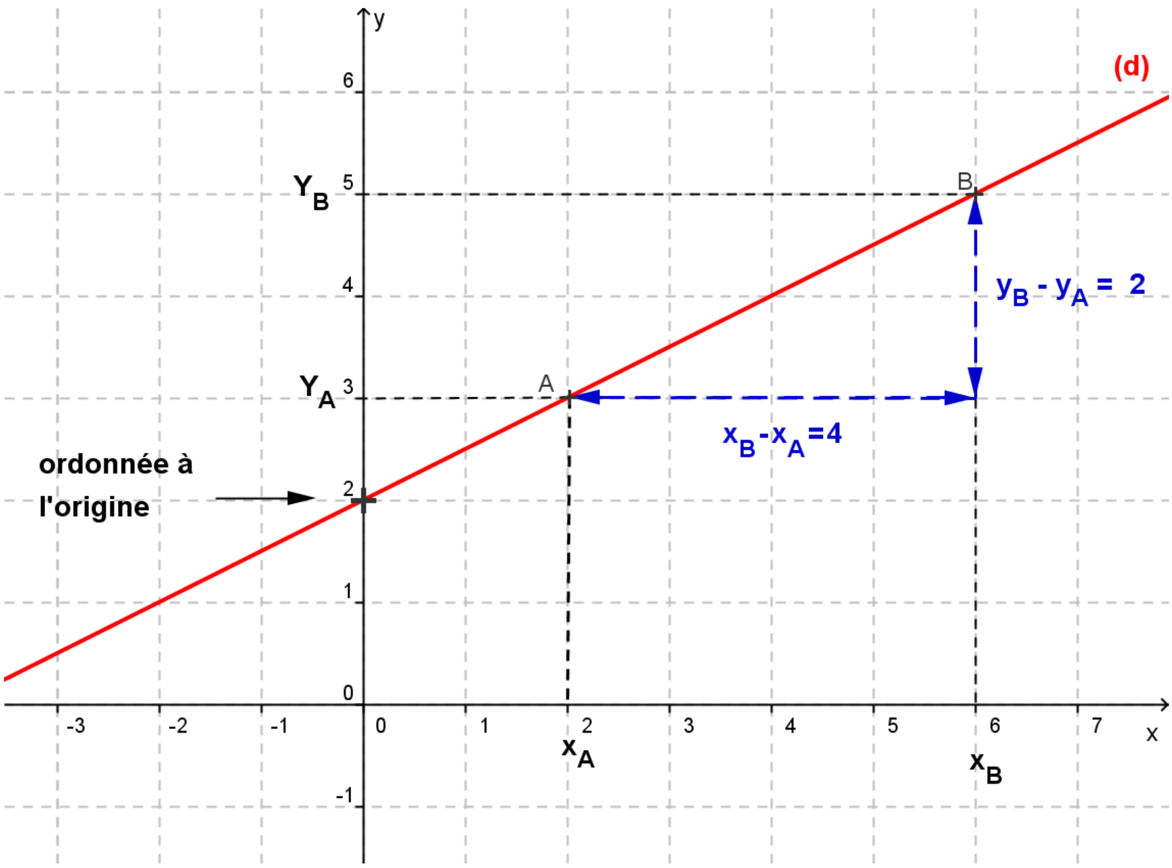
Déterminer l'équation de la droite (d) passant par les points A(5 ; 8) et B(5 ;11)

Comme $x_A = x_B$ et $y_A \neq y_B$

L'équation de la droite (d) est : $\boldsymbol{x = 5}$

2) Graphiquement

Exemple 1 :

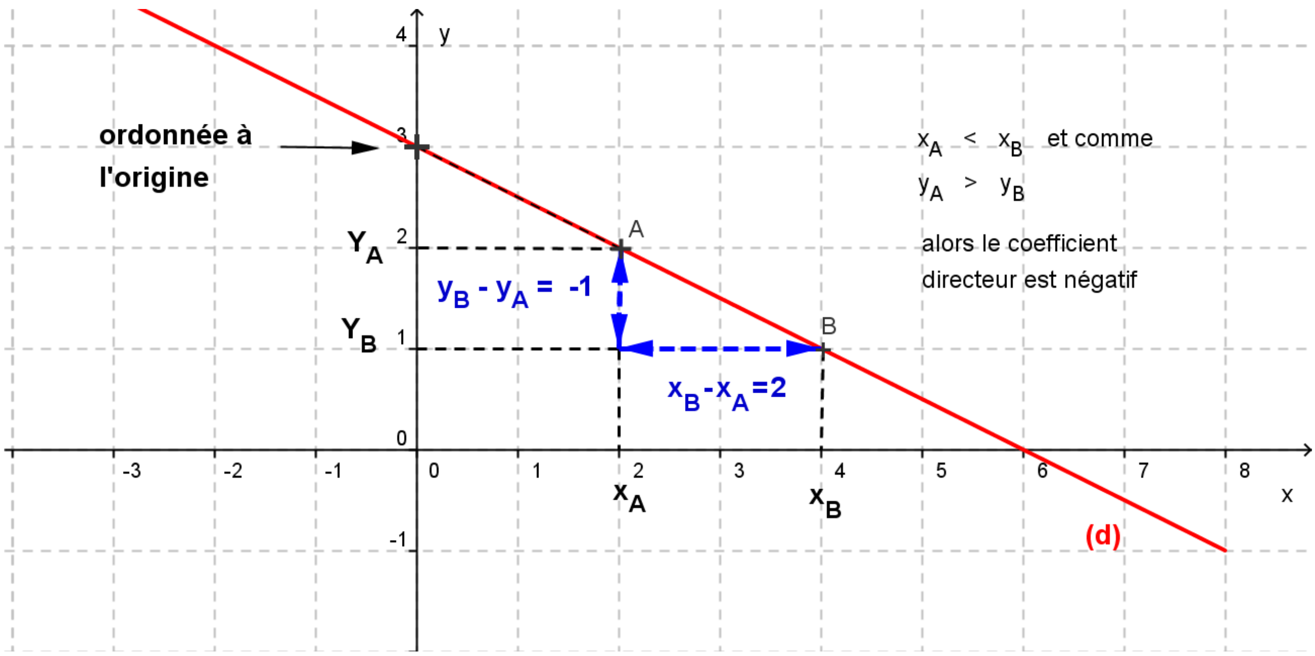


Pour déterminer le coefficient directeur m on fait : $\mathrm{m} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

L'ordonnée à l'origine est 2, donc $\mathrm{p} = 2$

L'équation de la droite (d) est donc : $\boldsymbol{y = 0{,}5\,x + 2}$

Exemple 2 :

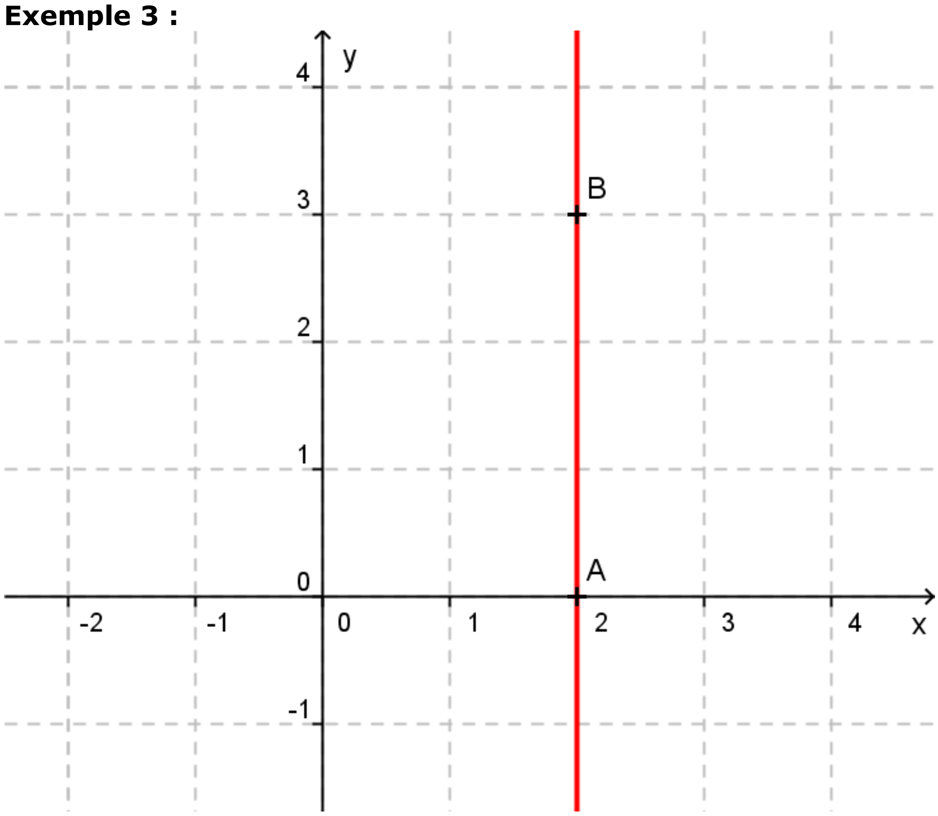


Pour déterminer le coefficient directeur m on fait : $\mathrm{m} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$

L'ordonnée à l'origine est 3, donc $\mathrm{p} = 3$

L'équation de la droite (d) est donc : $\boldsymbol{y = -0{,}5x + 3}$

Exemple 3 :



La droite est parallèle à l'axe des ordonnées elle est donc de la forme $x = \mathrm{c}$

Les abscisses de A et de B sont égales à 5

Donc l'équation de la droite d est : $\boldsymbol{x = 5}$