2^de^

MATHÉMATIQUES

Le polycopié regroupe les documents distribués aux élèves de 2de 10 en cours d'année.

Janson de Sailly (année 2017-2018)

A. YALLOUZ

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

CALCUL NUMÉRIQUE

I ENSEMBLES DE NOMBRES

1 NOMBRES ENTIERS NATURELS

DÉFINITION

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;\ldots\}$. C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de compter une collection d'objets.
On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

EXEMPLES

$$245 \in \mathbb{N}; \qquad -5 \notin \mathbb{N}; \qquad 2^5 \in \mathbb{N}; \qquad \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}; \qquad 0 \in \mathbb{N}; \qquad 0 \notin \mathbb{N}^*$$

La notation « $x \in E$ » signifie que l'élément x *appartient* à l'ensemble E.
La notation « $x \notin E$ » signifie que l'élément x *n'appartient pas* à l'ensemble E.

NOTIONS D'ARITHMÉTIQUE

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

— on dit que b *divise* a lorsqu'il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$. (on dit encore que b est un *diviseur* de a ou que a est un *multiple* de b)

— Un entier naturel $p \geqslant 2$ est un *nombre premier* lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et p.

2 NOMBRES ENTIERS RELATIFS

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\ldots;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$. Il est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.
En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est *contenu* (ou inclus) dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

La proposition « Si $n \in \mathbb{N}$ alors $n \in \mathbb{Z}$ et $-n \in \mathbb{Z}$ » est vraie.
Par contre, la réciproque « Si $n \in \mathbb{Z}$ et $-n \in \mathbb{Z}$ alors $n \in \mathbb{N}$ » est fausse. (Il suffit de choisir $n = -1$)

3 NOMBRES DÉCIMAUX

Les nombres décimaux sont les nombres de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, où a est un entier et n un entier naturel.
Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.
L'ensemble des *nombres décimaux* est noté $\mathbb{D}$.

EXEMPLES

$$-13 \in \mathbb{D}; \qquad 0{,}3333 \in \mathbb{D}; \qquad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}; \qquad \frac{3}{4} \in \mathbb{D}; \qquad 3{,}1416 \in \mathbb{D}; \qquad \pi \notin \mathbb{D}.$$

4 NOMBRES RATIONNELS

L'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.
C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme le quotient d'un entier par un entier non nul.

— La fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autres que 1 ou -1).

— La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique à partir d'un certain rang.

— La division par 0 est **interdite** : l'écriture $\dfrac{a}{0}$ n'a aucun sens.

EXEMPLES

$-13 \in \mathbb{Q}$; $0{,}5 \in \mathbb{Q}$; $-\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\dfrac{22}{7} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$.

5 NOMBRES RÉELS

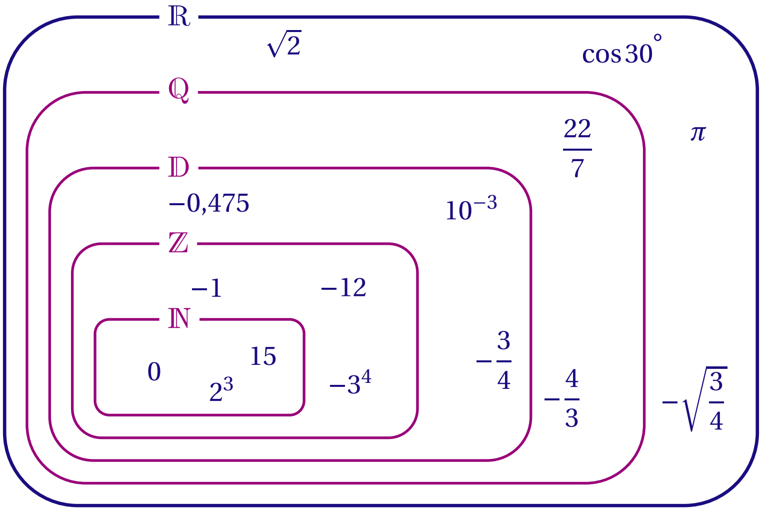
Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels.
Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

L'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$

Chaque nombre réel correspond à un unique point de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé *abscisse* de ce point.

INCLUSIONS

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



II DÉVELOPPER, FACTORISER

1 DÉFINITION

— Développer un produit, c'est écrire ce produit sous la forme d'une somme.
— Factoriser une somme, c'est écrire cette somme sous la forme d'un produit.

2 PROPRIÉTÉS

DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION SUR L'ADDITION

Pour tous nombres réels a, b et k on a :

Développer

$$k(a+b) = ka + kb$$

Factoriser

DOUBLE DISTRIBUTIVITÉ

Pour tous nombres réels a, b , c et d on a :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

EXEMPLES

1. Développer, réduire et ordonner

$$\begin{aligned}(2x+3)(5-4x) &= 10x - 8x^2 + 15 - 12x \\ &= -8x^2 - 2x + 15\end{aligned}$$

2. Factoriser

$$6x^2 - 8x = 2x(3x-4)$$

IDENTITÉS REMARQUABLES

Pour tous nombres réels a et b on a :

Développer

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Factoriser

EXEMPLES

1. Développer

$$\begin{aligned}\left(2x+\frac{3}{2}\right)^2 &= (2x)^2 + 2\times(2x)\times\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 4x^2 + 6x + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3x-2)^2 &= (3x)^2 - 2\times(3x)\times 2 + 2^2 \\ &= 9x^2 - 12x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5x+4)(5x-4) &= (5x)^2 - 4^2 \\ &= 25x^2 - 16\end{aligned}$$

2. Factoriser

$$\begin{aligned}4x^2 + 12x + 9 &= (2x)^2 + 2\times(2x)\times 3 + 3^2 \\ &= (2x+3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x^2 - 2x + \frac{1}{4} &= (2x)^2 - 2\times(2x)\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16x^2 - 121 &= (4x)^2 - 11^2 \\ &= (4x+11)(4x-11)\end{aligned}$$

III INTERVALLES ET INÉQUATIONS

1 INTERVALLES

Soient $a < b$ deux nombres réels :

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a;b[$

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a;b[$

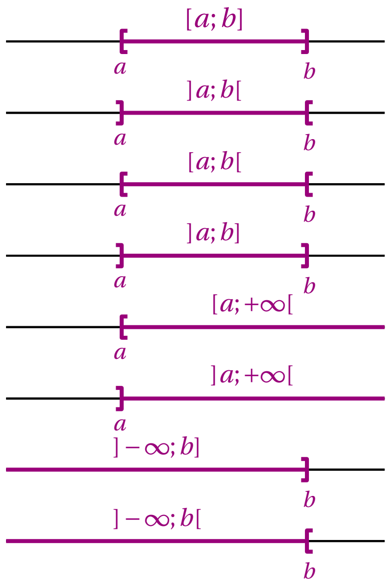
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $]a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est l'intervalle $[a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est l'intervalle $]a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant b$ est l'intervalle $]-\infty;b]$

L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est l'intervalle $]-\infty;b[$



EXEMPLES

Écrire sous forme d'intervalle les ensembles de nombres réels suivants :

1. $x \leqslant \dfrac{3}{4}$.

   L'ensemble cherché est constitué de tous les nombres réels x inférieurs ou égaux à $\dfrac{3}{4}$. Il s'agit de l'intervalle $\left]-\infty;\dfrac{3}{4}\right]$.

2. $-3 < x \leqslant \sqrt{2}$.

   L'ensemble cherché est constitué de tous les nombres réels x strictement supérieurs à -3 et inférieurs ou égaux à $\sqrt{2}$. Il s'agit de l'intervalle $\left]-3;\sqrt{2}\right]$.

2 INTERSECTION ET RÉUNION D'INTERVALLES

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

— **L'intersection** des intervalles I et J, notée $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle I **et** à l'intervalle J :

Si $x \in I$ et $x \in J$, alors $x \in I \cap J$ ($\cap$ se lit *inter*)

— **La réunion** des intervalles I et J, notée $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'intervalle I **ou** à l'intervalle J :

Si $x \in I$ ou $x \in J$, alors $x \in I \cup J$ ($\cup$ se lit *union*)

EXEMPLES

1. Soient les intervalles $I =]-\infty;3]$ et $J =]-3;5]$.

   a) L'intersection des deux intervalles $I \cap J$ est l'ensemble des réels x tels que : $x \leqslant 3$ et $-3 < x \leqslant 5$ soit $I \cap J =]-3;3]$.

   b) La réunion des deux intervalles $I \cup J$ est l'ensemble des réels x tels que : $x \leqslant 3$ ou $-3 < x \leqslant 5$ soit $I \cup J =]-\infty;5]$.

2. L'ensemble des réels non nuls $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

EXERCICE 1

1. Quelle est la différence entre le carré de 7 et la somme des sept premiers nombres impairs ?
2. Les nombres 152, 224 et 376 sont-ils divisibles par 8 ?
   La conjecture « Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par huit alors ce nombre est divisible par huit » est-elle vraie ou fausse ?
3. a et b sont deux nombres premiers tels que $a < b$ et $a + b$ est un nombre premier. Déterminer a.
4. Quel est le plus petit nombre de cubes que contient une boîte de dimensions 63 cm, 45 et 18 cm ?
5. La somme de trois entiers consécutifs est-elle divisible par 3 ?
6. Le produit de trois entiers consécutifs est-il divisible par 8 ?
7. a) Soit n un entier naturel, développer le produit $(n+1)(n+2)$.
   En déduire une factorisation de $E(n) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$
   b) Lorsque l'on augmente de 1 le produit de quatre nombres entiers consécutifs, obtient-on un carré parfait ?

EXERCICE 2

Avant d'effectuer sa tournée un représentant fait le plein d'essence. Au cours de ses déplacements, il rajoute dans son réservoir une première fois 24,7 litres d'essence et une deuxième fois 18,9 litres.
À son retour, il constate qu'il manque 11,5 litres pour refaire le plein du réservoir d'une capacité de 60 litres.
Sachant que la consommation moyenne du véhicule est de 5,8 litres pour 100 kilomètres, quelle est la distance parcourue par ce représentant au cours de sa tournée ?

EXERCICE 3

1. Donner trois nombres rationnels compris entre $\dfrac{6}{11}$ et $\dfrac{7}{11}$
2. Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{6}{7}$ pour obtenir l'inverse de $\dfrac{6}{7}$?

EXERCICE 4

Soit $E = 2x^3 - x^2 - 5x - 1$.
Calculer E pour $x = -1$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = 2$. Peut-on conclure que pour tout réel x, $E = 1$?

EXERCICE 5

Les nombres de Mersenne sont les nombres entiers de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul.

1. Calculer les nombres de Mersenne M_3 et M_4.
2. La propriété « si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est premier » a été démontrée.
   À l'aide d'un contre exemple, montrer que la réciproque de cette propriété est fausse.

EXERCICE 6

PARTIE A

On donne $a = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi}{3}}$ et $b = 1 - \dfrac{1}{2 + \dfrac{\pi}{3}}$.

1. À l'aide de la calculatrice :
   a) donner les troncatures d'ordre 3 des réels a et b ;

b) donner les arrondis à 10^{-3} de a et de b, en déduire le produit des deux valeurs approchées.

2. Calculer la valeur exacte du produit des réels a et b. Commenter.

PARTIE B

On donne $A = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{3}}$ et $B = 1 - \dfrac{1}{2 + \dfrac{x}{3}}$ où x est un réel strictement positif.
Le réel A est-il l'inverse du réel B ?

EXERCICE 7

Les égalités suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. $(x-2)^2\left(x^2+2x+2\right) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6$
2. $(x+2)\left(x^2-2x-1\right) = x^3 - 4x - 2$
3. $(x-3)\left(x^2+2x+1\right) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

EXERCICE 8

Développer et réduire les expressions suivantes :
$A = 15x - (2x+3)^2$; $B = (x+2)(x-2) - (x+1)^2$; $C = (2-a)^2 - (2+a)^2$

EXERCICE 9

Factoriser les expressions suivantes :
$A = 49x^2 - 14x + 1$; $B = (x+3)^2 - 16$; $C = x^2 - 25 - (x+5)(1-2x)$

EXERCICE 10

Montrer que, si $a^2 - b^2$ est premier, alors les entiers a et b sont consécutifs.

EXERCICE 11

1. $x = \dfrac{a+b}{2}$ et $y = \dfrac{a-b}{2}$, exprimer $x^2 - y^2$ en fonction de a et b.
2. $x + y = a$ et $xy = b$. Exprimer $\left(x-y\right)^2$ en fonction de a et b.

EXERCICE 12

Compléter par l'un des symboles : $\in$, $\notin$.

$\pi \ldots \left[\dfrac{333}{106};\dfrac{22}{7}\right]$; $-\dfrac{2}{3} \ldots \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$; $0{,}2 \ldots \left]\dfrac{1}{5};+\infty\right[$; $\sqrt{2} \ldots \left[\dfrac{7}{5};1{,}414\right[$

EXERCICE 13

1. Dans chacun des cas suivants, écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels vérifiant la condition donnée.
   a) $x \geqslant -\dfrac{3}{7}$; b) $-\dfrac{2}{3} < x$; c) $\sqrt{2} < x \leqslant 3$; d) $-\dfrac{3}{4} \geqslant x > -2$
2. Traduire chacune des informations ci-dessous par une ou des inégalités.
   a) $x \in \left]-\infty;-\dfrac{5}{6}\right]$; b) $x \in \left]-2;+\infty\right[$; c) $x \in \left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$; d) $x \in \left]-10^{-1};\dfrac{1}{10^{-2}}\right]$

EXERCICE 14

1. Déterminer l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation $2x - 3 > 0$
2. Déterminer l'ensemble S_2 des solutions de l'inéquation $1 - 2x \geqslant 0$.
3. Déterminer l'ensemble S_3 des solutions de l'inéquation $2x + 3 \leqslant 5x + 1$.

Chapitre 2

FONCTIONS GÉNÉRALITÉS

I NOTION DE FONCTION

1 FONCTION

Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

— $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f. x est la variable.
— Le nombre $f(x)$ est l'image du réel x par la fonction f.
— Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

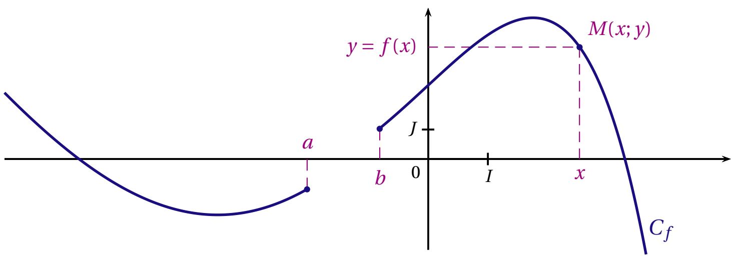
EXEMPLE

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

— L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[0;+\infty[$.
— L'image de 9 par la fonction f est $f(9) = \sqrt{9} = 3$.
— 9 est l'antécédent de 3 par la fonction f.

2 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases} x \in \mathscr{D} \\ y = f(x) \end{cases}$.

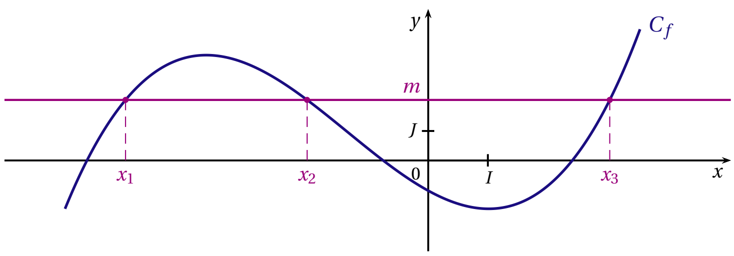


C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;a] \cup [b;+\infty[$

RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATION ET D'INÉQUATION

Soient C_f la courbe représentative d'une fonction f et m un réel.

— Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points de la courbe C_f d'ordonnée m.
— Les solutions de l'inéquation $f(x) < m$ (respectivement $f(x) > m$) sont les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est inférieure à m (respectivement supérieure à m)



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = m$ est $\mathscr{S} = \{x_1; x_2; x_3\}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant m$ est $\mathscr{S} =]-\infty; x_1] \cup [x_2; x_3]$

II VARIATIONS

FONCTION CROISSANTE

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

On dit que la fonction f conserve l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

FONCTION DÉCROISSANTE

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

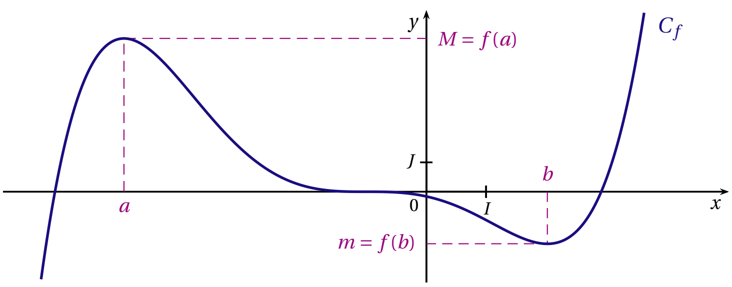
On dit que la fonction f change l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

FONCTION CONSTANTE

Dire que la fonction f est constante sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I.

$$f(x) = k \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

TABLEAU DE VARIATION



On résume les variations de la fonction f à l'aide du tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	

EXTREMUM

— Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \leqslant f(a)$.

— Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \geqslant f(a)$.

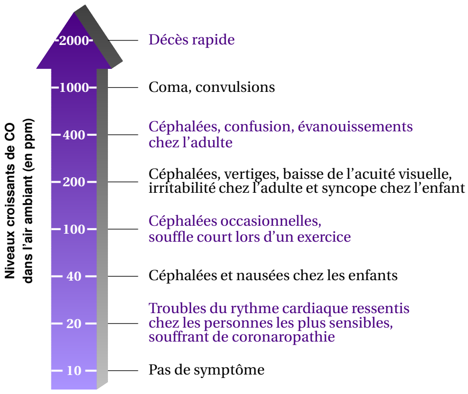
Dans l'exemple précédent : M est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;b]$ atteint pour $x = a$; m est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[a;+\infty[$ atteint pour $x = b$.

EXERCICE 1

« Avec une centaine de décès en moyenne par an, le monoxyde de carbone (CO) est la première cause de mortalité accidentelle par intoxication en France. »

DOCUMENT 1

Symptômes et effets sur la santé du monoxyde de carbone



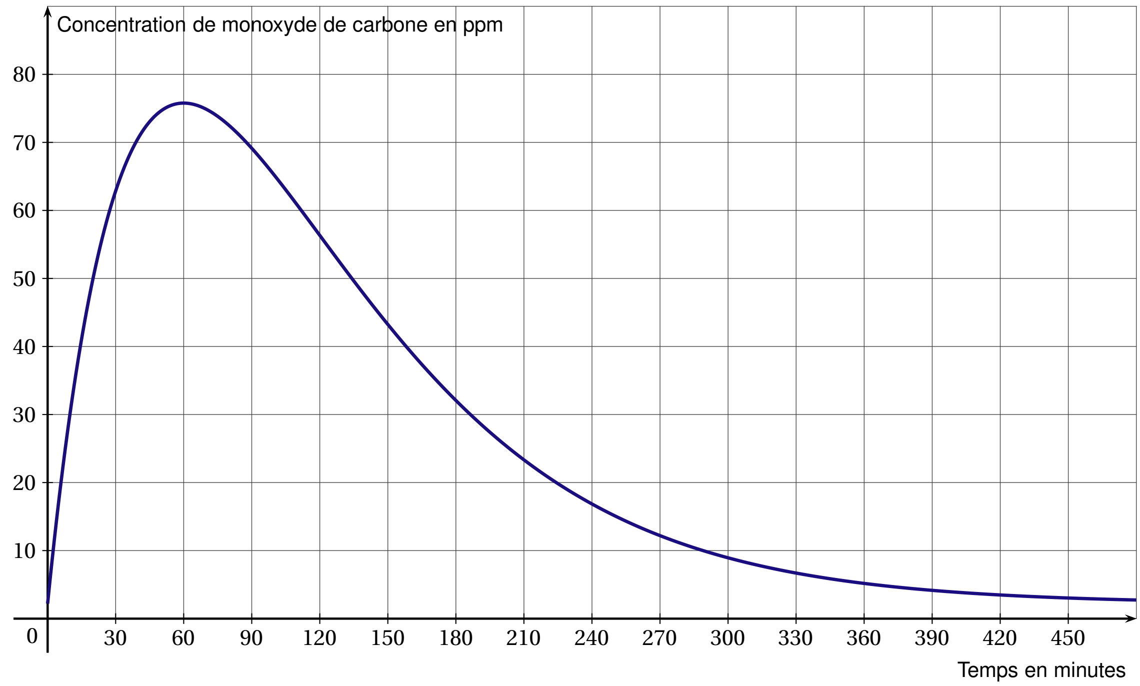
Source : Commission européenne 2014.

DOCUMENT 2

La société COalerte fabrique un modèle de détecteurs qui enregistre en temps réel la concentration de monoxyde de carbone en parties par million (ppm). Un tel détecteur produit un signal d'alarme respectant les modalités fixées par la norme européenne EN 50 291 ci-dessous.
Il déclenche un signal d'alarme :

— si la concentration est supérieure à 30 ppm pendant au moins 120 minutes;
— si la concentration est supérieure à 50 ppm pendant au moins 60 minutes;
— si la concentration est supérieure à 100 ppm pendant au moins 10 minutes;
— si la concentration est supérieure à 300 ppm pendant au moins 3 minutes.

Un laboratoire d'essais procède à des tests sur un détecteur produit par la société COalerte en simulant un accident qui provoque une concentration anormale de monoxyde de carbone dans une pièce. Le laboratoire relève la concentration de monoxyde de carbone en fonction du temps, exprimé en minutes.
Les enregistrements effectués sur une période de 8 heures se traduisent par la représentation graphique ci-dessous.



À partir du graphique et des documents précédents :

1. Estimer au bout de combien de temps devrait retentir un signal d'alarme.
2. Une personne présente dans la pièce depuis le début d'un tel accident risquerait-elle de présenter des symptômes? Si oui, lesquels?

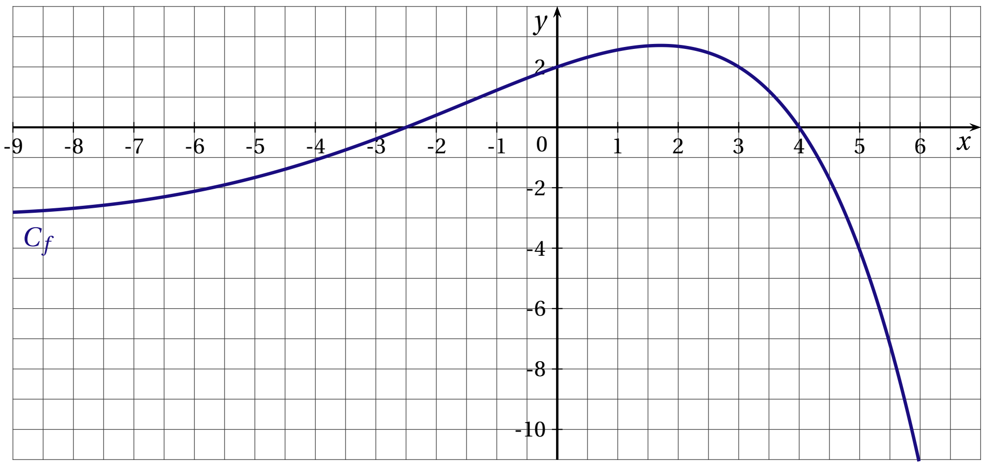
EXERCICE 2

f et g sont deux fonctions

1. Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'égalités :
   a) L'image de -3 par la fonction f est 1.
   b) L'antécédent de $\sqrt{3}$ par la fonction f est 2.
   c) -5 a pour image 2 par la fonction g.
   d) 3 a pour antécédents -2 et 2 par la fonction g.
2. On sait que $f(-2) = 1$ et $g(1) = -2$
   a) Traduire chacune des deux égalités par une phrase contenant le mot « image ».
   b) Traduire chacune des deux égalités par une phrase contenant le mot « antécédent ».

EXERCICE 3

La courbe C_f tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique :

1. Quelle est l'image de 5 par la fonction f ?
2. Quels sont les antécédents de 2 ?
3. Résoudre $f(x) = 0$.
4. Résoudre $f(x) > 2$.

EXERCICE 4

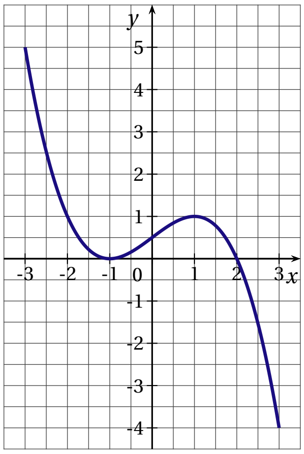
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3;3]$. On sait que :

— les images de -3 ; 0 et 3 par la fonction f sont respectivement 5 ; 0,5 et -4

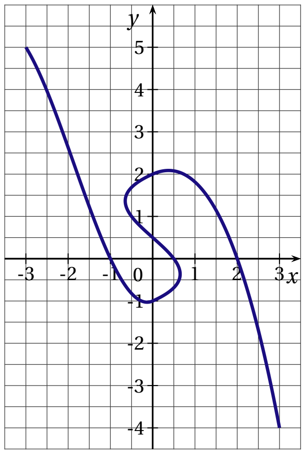
— 0 a exactement deux antécédents -1 et 2.

1. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
   a) L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
   b) Le point $M(-1;0)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.
   c) La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des ordonnées en deux points.

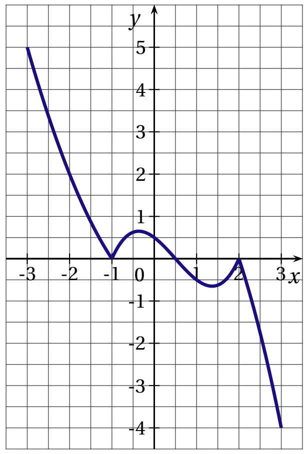
2. Parmi les quatre courbes représentées ci-dessous, quelles sont celles qui peuvent représenter la fonction f ? (*Justifier*)



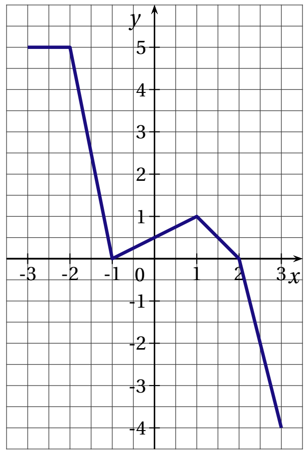
courbe $\mathscr{C}_1$



courbe $\mathscr{C}_2$



courbe $\mathscr{C}_3$



courbe $\mathscr{C}_4$

EXERCICE 5

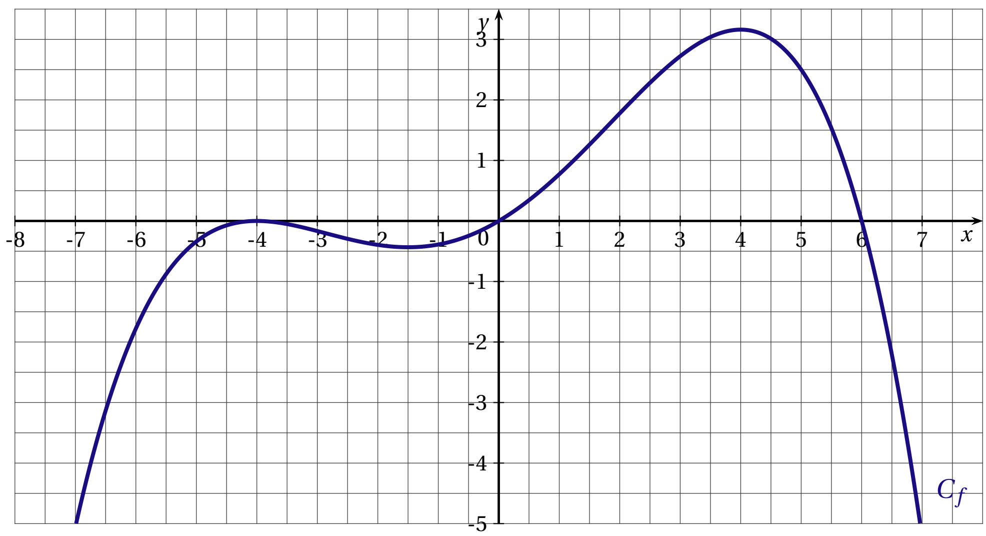
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-10;10]$. Son tableau de variations est le suivant :

x	-10	-5	1	3	5	10
$f(x)$	-3 ↘	-5 ↗	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-1

1. Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.
2. Comparer $f(-1)$ et $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$
3. Le tableau permet-il de comparer les images de 2 et 4 ?

EXERCICE 6

La courbe C_f tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?
2. Pour chacune des solutions de l'équation $f(x) = -2$, déterminer un intervalle d'amplitude 0,5 auquel appartient cette solution.
3. Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.
4. Établir le tableau des variations de la fonction f.

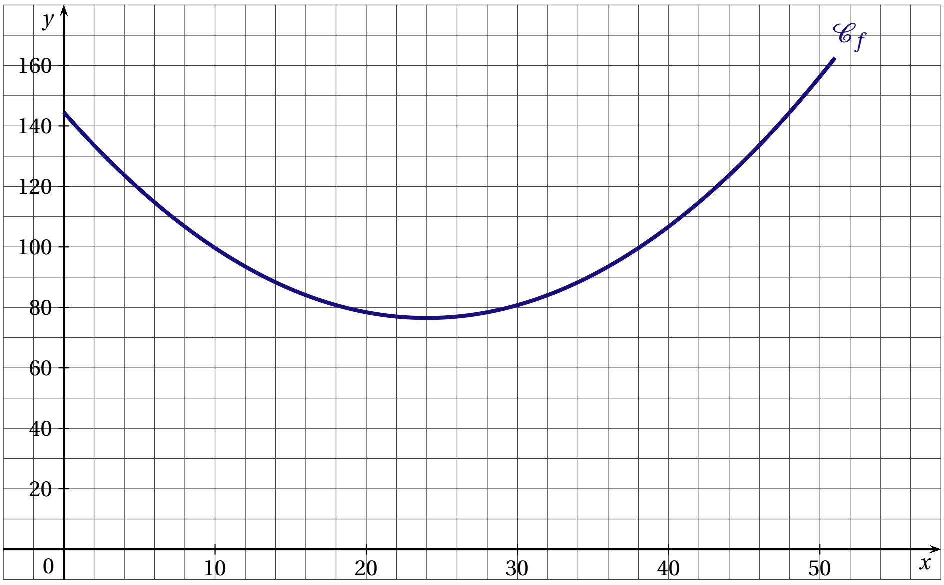
EXERCICE 7

On dispose d'une ficelle de longueur 51 cm que l'on coupe en deux. Avec un des morceaux on forme un carré, et avec l'autre on forme un rectangle dont la longueur est le double de sa largeur.

Peut-on couper la ficelle de telle sorte que la somme des aires du carré et du rectangle soit minimale ?

On note x la longueur de ficelle utilisée pour le carré.

1. a) Exprimer en fonction de x l'aire du carré.
   b) Exprimer en fonction de x la longueur de ficelle utilisée pour le rectangle.
   En déduire que l'aire du rectangle vaut $\dfrac{(51-x)^2}{18}$
2. On note f la fonction qui à x associe la somme des aires du carré et du rectangle.
   a) Quel est l'ensemble de valeurs possibles pour le réel x ?
   b) Donner une expression de $f(x)$.
3. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f



À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

a) Établir le tableau des variations de la fonction f.
b) Pour quelle valeur de x, la somme des aires du carré et du rectangle est minimale ?
c) On suppose qu'on ne coupe pas la ficelle et qu'on forme avec cette ficelle soit un carré soit un rectangle dont la longueur est le double de sa largeur.
L'aire du rectangle est-elle supérieure à celle du carré ?

4. Calculer $f(24)$ et interpréter le résultat.

EXERCICE 8

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-5;5]$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	-5		-1		1		5
$f(x)$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

1. Comparer $f\left(-\dfrac{5}{3}\right)$ et $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$
2. Peut-on comparer les images de 0 et de 3 ?
3. Pour chacune des propositions suivantes, justifier si elle est vraie ou fausse :
   a) Si a et b sont deux réels tels que $2 \leqslant a < b \leqslant 4$ alors $f(a) < f(b)$.
   b) Tous les réels de l'intervalle $[-5;0]$ ont une image supérieure ou égale à 1.
   c) Il existe un seul réel de l'intervalle $[-5;5]$ qui a une image négative.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.
1. Calculer les images de 0 ; de $\left(1+\sqrt{2}\right)$ et de $\left(1-\sqrt{2}\right)$.
2. Peut-on conclure que pour tout réel x, $f(x)$ est un entier relatif?

EXERCICE 10

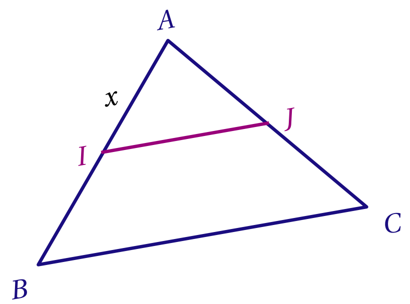
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2 - 9x^2$. On note C_f sa courbe représentative.
1. Factoriser l'expression de $f(x)$.
2. Développer l'expression de $f(x)$.
3. Calculer l'image par la fonction f de $-\dfrac{1}{2}$?
4. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère?
5. Quelles sont les abscisses des points de la courbe C_f qui ont pour ordonnée 4 ?

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^2 - (3x+2)^2$. On note C_f sa courbe représentative.
1. a) Factoriser l'expression de $f(x)$.
   b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
2. Développer l'expression de $f(x)$.
3. Calculer l'image par la fonction f de 0.
4. Quelles sont les antécédents par la fonction f de (-3) ?

EXERCICE 12

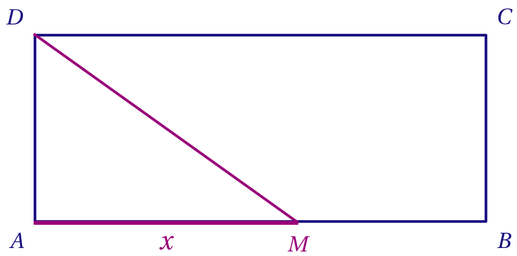
ABC est un triangle isocèle en A avec $AB = 7$ et $BC = 9$.
Soit I un point du segment $[AB]$, la parallèle à la droite (BC) coupe le segment $[AC]$ au point J.
On pose $AI = x$.

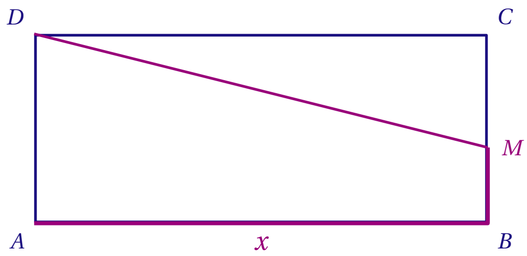


1. Exprimer la distance IJ en fonction de x.
2. On note f la fonction qui à x associe le périmètre du triangle AIJ.
   a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
   b) Donner une expression de $f(x)$.
3. On note g la fonction qui à x associe le périmètre du quadrilatère $IJCB$.
   Donner une expression de $g(x)$.
4. Déterminer la position du point I telle que $IJCB$ et AIJ aient le même périmètre.

EXERCICE 13

$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 10$ et de largeur $AD = 4$.
M est un point mobile le long de la ligne brisée ABC.
Si $M \in [AB]$, on pose $x = AM$; si $M \in [BC]$, on pose $x = AB + BM$.





1. $\mathscr{A}(x)$ est selon la position du point M l'aire du triangle ADM ou du trapèze $ADMB$.
   Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.
2. Représenter la fonction $\mathscr{A}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Déterminer la position du point M telle que l'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale au tiers de l'aire du rectangle.

EXERCICE 14

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;4)$, $B(-3;0)$ et $C(7{,}5;0)$.
$M(x;0)$ est un point du segment $[BC]$. Soit f la fonction qui à x associe la distance AM.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. a) Établir le tableau des variations de la fonction f.
   b) En déduire le nombre de solutions de chacune des équations suivantes $f(x) = 3$; $f(x) = 4$; $f(x) = 5$ et $f(x) = 9$.
3. Résoudre les équations $f(x) = 4{,}1$ et $f(x) = 5{,}8$.

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[-3;4]$ par $f(x) = 2x^2 - 3x$.

1. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
2. Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$								

3. Pourquoi peut-on affirmer que la fonction f n'est pas monotone sur $[-3;4]$?
4. Calculer l'image de 0,8. Le tableau permet-il de trouver le minimum de la fonction f ?
5. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-3;4]$, $f(x) - f\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2$.
   b) En déduire l'existence d'un extremum pour la fonction f.

Chapitre 3

FONCTIONS AFFINES

I FONCTION AFFINE

1 DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

EXEMPLES

— La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} - 3$ est une fonction affine avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -3$.

— La fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ n'est pas une fonction affine.

CAS PARTICULIERS

— Dans le cas où $b = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ est appelée fonction linéaire.

— Dans le cas où $a = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = b$ est une fonction constante.

2 PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

✻ DÉMONSTRATION

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Alors pour tous réels $x_1 \neq x_2$ on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels $x_1 \neq x_2$, on a $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.
Alors, en particulier pour tout réel $x \neq 0$ on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = a$$

D'où $f(x) - f(0) = ax$. Soit en notant l'image de 0 $f(0) = b$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.
Ainsi, f est une fonction affine.

EXEMPLE

Déterminer la fonction affine f telle que $f(-6) = 5$ et $f(3) = -1$.
f est une fonction affine d'où pour tout réel x, $f(x) = ax + b$ avec

$$a = \frac{f(3) - f(-6)}{3 - (-6)} \qquad \text{Soit} \qquad a = \frac{-1 - 5}{3 + 6} = -\frac{2}{3}$$

Ainsi, $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + b$. Or $f(3) = -1$ d'où

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \times 3 + b = -1 &\Leftrightarrow -2 + b = -1 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \end{aligned}$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$.

3 VARIATION

Soit a et b deux réels.

— Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est croissante.

— Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est décroissante.

DÉMONSTRATION

Si a est positif :
Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$
Comme $a \geqslant 0$, $ax_1 \leqslant ax_2$. D'où $ax_1+b \leqslant ax_2+b$
Soit $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
Donc f est croissante

Si a est négatif :
Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$
Comme $a \leqslant 0$, $ax_1 \geqslant ax_2$. D'où $ax_1+b \geqslant ax_2+b$
Soit $f(x_1) \geqslant f(x_2)$
Donc f est décroissante

4 SIGNE DE $ax+b$ AVEC $a \neq 0$

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ avec $a \neq 0$.
$f(x)$ est du signe de a pour les valeurs de x supérieures à $-\dfrac{b}{a}$.

DÉMONSTRATION

Si $a \neq 0$ alors l'équation $ax+b=0$ admet pour solution $x=-\dfrac{b}{a}$.

Si $a>0$ alors f est strictement croissante :
donc pour tout réel $x<-\dfrac{b}{a}$, $f(x)<f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$
soit pour tout réel $x<-\dfrac{b}{a}$, $f(x)<0$
D'où le tableau du signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a<0$ alors f est strictement décroissante :
donc pour tout réel $x<-\dfrac{b}{a}$, $f(x)>f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$
soit pour tout réel $x<-\dfrac{b}{a}$, $f(x)>0$
D'où le tableau du signe de $f(x)$

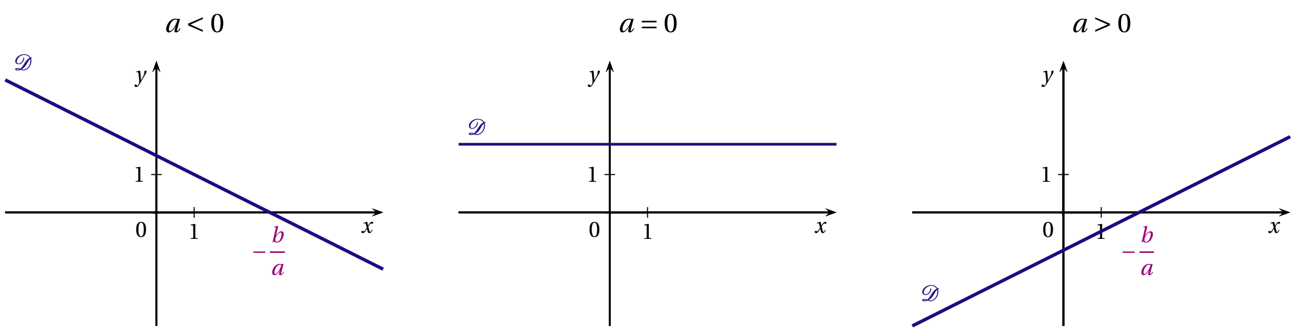
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, si $a \neq 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

5 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=ax+b$.



II INÉQUATIONS

Pour résoudre une inéquation à une inconnue on peut être amené à étudier le signe d'une expression.

Résoudre $A(x) \leqslant B(x)$ équivaut à résoudre $A(x) - B(x) \leqslant 0$.

1 ÉTUDE DU SIGNE D'UN PRODUIT

RÈGLE DES SIGNES D'UN PRODUIT

Le produit de deux nombres de même signe est positif. Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

TABLEAU DE SIGNES D'UN PRODUIT

Pour étudier le signe d'un produit :

— On étudie le signe de chaque facteur.

— On regroupe dans un tableau le signe de chaque facteur. La première ligne du tableau contenant les valeurs, rangées dans l'ordre croissant, qui annulent chacun des facteurs.

— On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2$
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2 &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - (3x-1)^2 \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow [(2x+3)+(3x-1)] \times [(2x+3)-(3x-1)] \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (2x+3+3x-1)\,(2x+3-3x+1) \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (5x+2)\,(4-x) \leqslant 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du produit $(5x+2)\,(4-x)$ à l'aide d'un tableau de signe.
On étudie les signe de chacun des facteurs du produit :

$$5x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad 4-x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des facteurs et, on en déduit le signe du produit en utilisant la règle des signes d'un produit :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		4		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(5x+2)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(5x+2)(4-x) \leqslant 0$ est $S = \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[4; +\infty\right[$.

2 ÉTUDE DU SIGNE D'UN QUOTIENT

RÈGLE DES SIGNES D'UN QUOTIENT

Le quotient de deux nombres de même signe est positif. Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

TABLEAU DE SIGNES D'UN QUOTIENT

Pour étudier le signe d'un quotient :

— On cherche les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites).

— On regroupe dans un tableau le signe de chaque terme.

— On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2$

Le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel x tel que le dénominateur $3x+2 \neq 0$.

Comme $3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{2}{3}$, le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel $x \neq -\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2 &\Leftrightarrow \frac{2x+7}{3x+2} - 2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(2x+7)-2\times(3x+2)}{3x+2} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2x+7-6x-4}{3x+2} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du quotient $\dfrac{3-4x}{3x+2}$ à l'aide d'un tableau de signe.
On étudie les signe de chacun des termes du quotient :

$$3-4x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad 3x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{3}$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des termes et, on en déduit le signe du quotient en utilisant la règle des signes d'un quotient.

La double barre dans le tableau indique que $-\dfrac{2}{3}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$3-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3-4x}{3x+2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

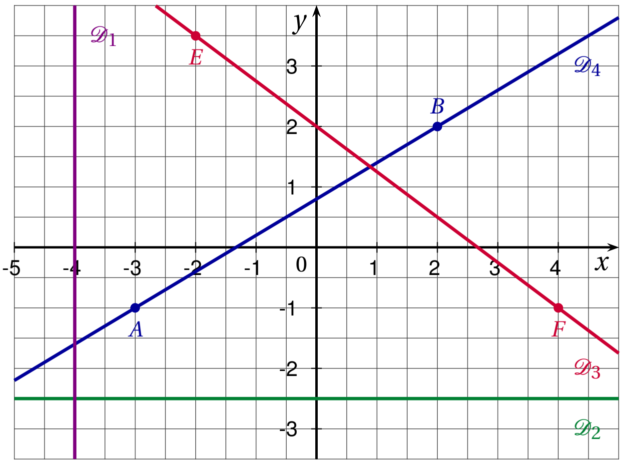
L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0$ est $S = \left]-\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}\right]$.

EXERCICE 1

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} - 1$.

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

EXERCICE 2



Dans chaque cas où la droite représentée ci-dessus, est la courbe représentative d'une fonction, déterminer la fonction affine associée.

EXERCICE 3

Le tableau ci-dessous, donne le signe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

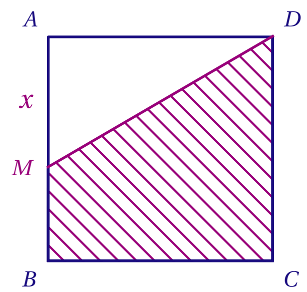
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\Gamma(x)$		$+$	0	$-$	

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui admettent le même tableau de signes?

$f(x) = -x + 2$; $g(x) = -1 - \dfrac{x}{2}$; $h(x) = x^2 + 4$; $k(x) = 2x + 4$; $l(x) = -\dfrac{2x}{3} - \dfrac{4}{3}$

EXERCICE 4

$ABCD$ est un carré de côté 6.
À tout point M du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.

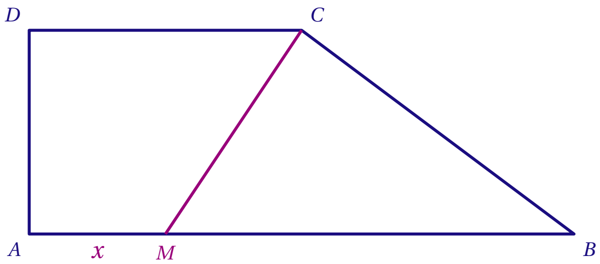


Le nombre $f(x)$ est égal à l'aire du trapèze $BCDM$.

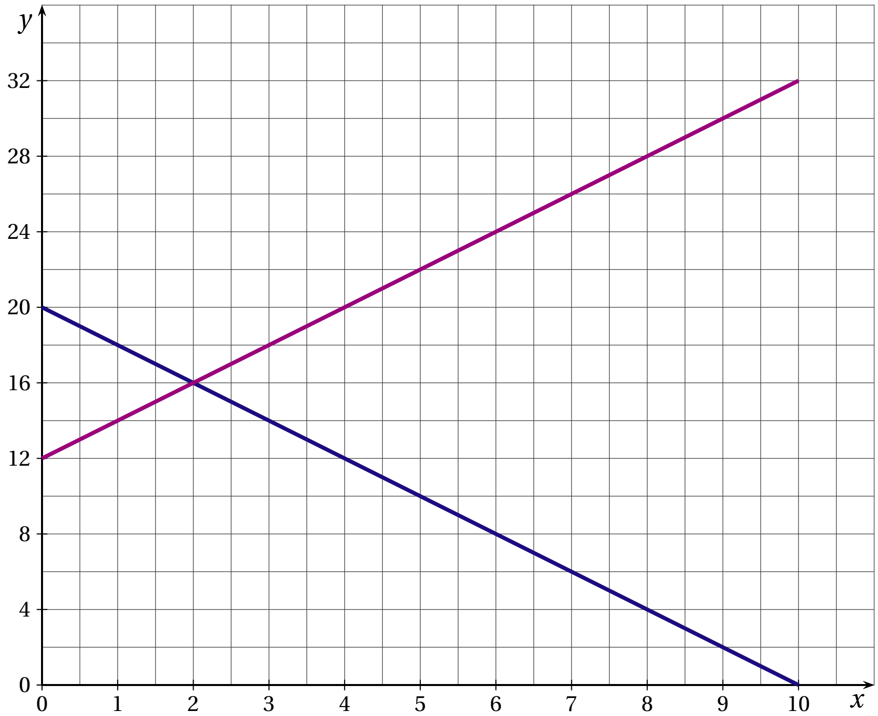
1. Donner une expression de $f(x)$.
2. Résoudre $f(x) \leqslant 24$.

EXERCICE 5

$ABCD$ est un trapèze rectangle. À tout point M du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.
Le réel $f(x)$ est égal à l'aire du triangle BMC.
Le réel $g(x)$ est égal à l'aire du trapèze $AMCD$.



Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous :



À l'aide du graphique, déterminer les distances AB, AD et CD.

EXERCICE 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction affine f puis donner son sens de variation

1. $f(-2) = 3$ et $f(3) = -1$
2. La droite représentant la fonction f passe par les points de coordonnées $(-2;-1)$ et $(1;3)$.

EXERCICE 7

1. f est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $f(-1{,}5) = -2$ et $f(3) = 1$.
   Donner une expression de $f(x)$.
2. g est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $g(2) = -1$ et $g(4) - g(-2) = -9$.
   Donner une expression de $g(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 8

— Augmenter une grandeur de $t\%$ revient à multiplier cette grandeur par $1 + \dfrac{t}{100}$

— Diminuer une grandeur de $t\%$ revient à multiplier cette grandeur par $1 - \dfrac{t}{100}$

1. Quel est le pourcentage d'évolution d'un article qui baisse successivement de 8% puis de 5% ?
2. Après une hausse de 6,25% le prix d'un article est de 272€. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
3. Après une baisse de 5,6% le prix d'un article est de 236€. Quel était le prix de cet article avant la baisse ?
4. Le cours d'une action a baissé de 20%. Quel devra être le taux du pourcentage d'augmentation pour que cette action retrouve son cours initial ?

EXERCICE 9

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)^2$ et $g(x) = (5x+1)^2$.

1. Factoriser l'expression de $f(x) - g(x)$.
2. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

EXERCICE 10

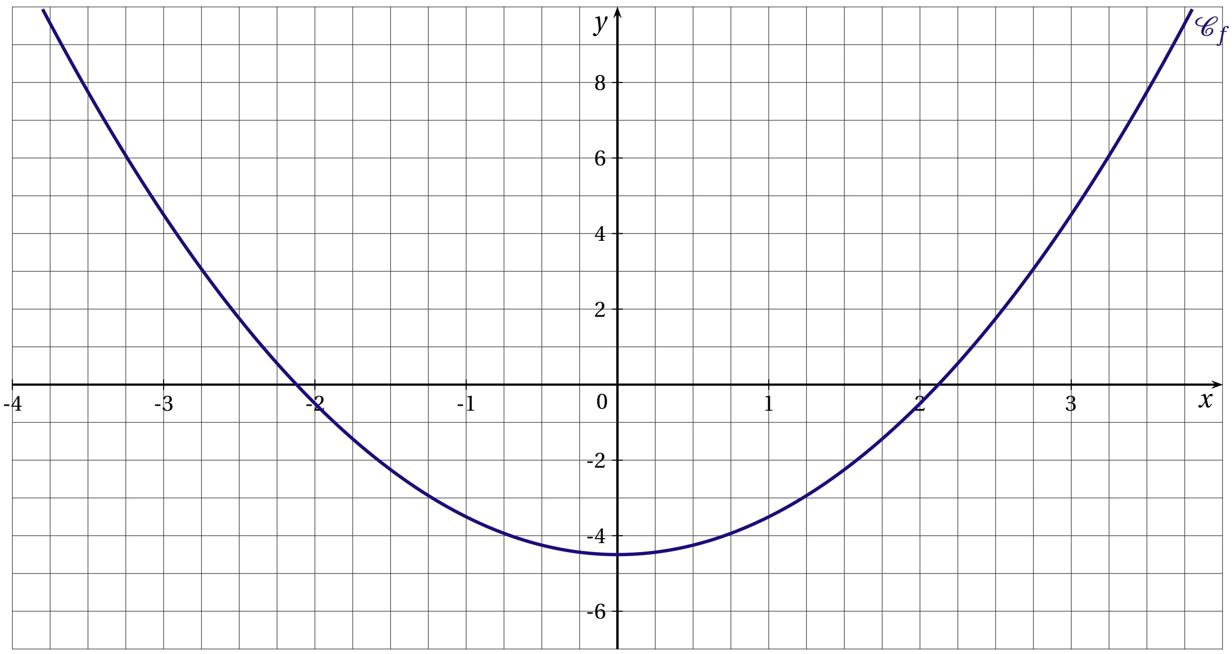
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x-2)^2 - (x+1)^2 \geqslant 0$
2. $(2-3x)^2 \leqslant (2-3x)(3-5x)$
3. $\dfrac{3x+4}{1-2x} \geqslant 0$
4. $\dfrac{2x}{3x+2} < 1$

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{9}{2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La courbe C_f est tracée ci dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

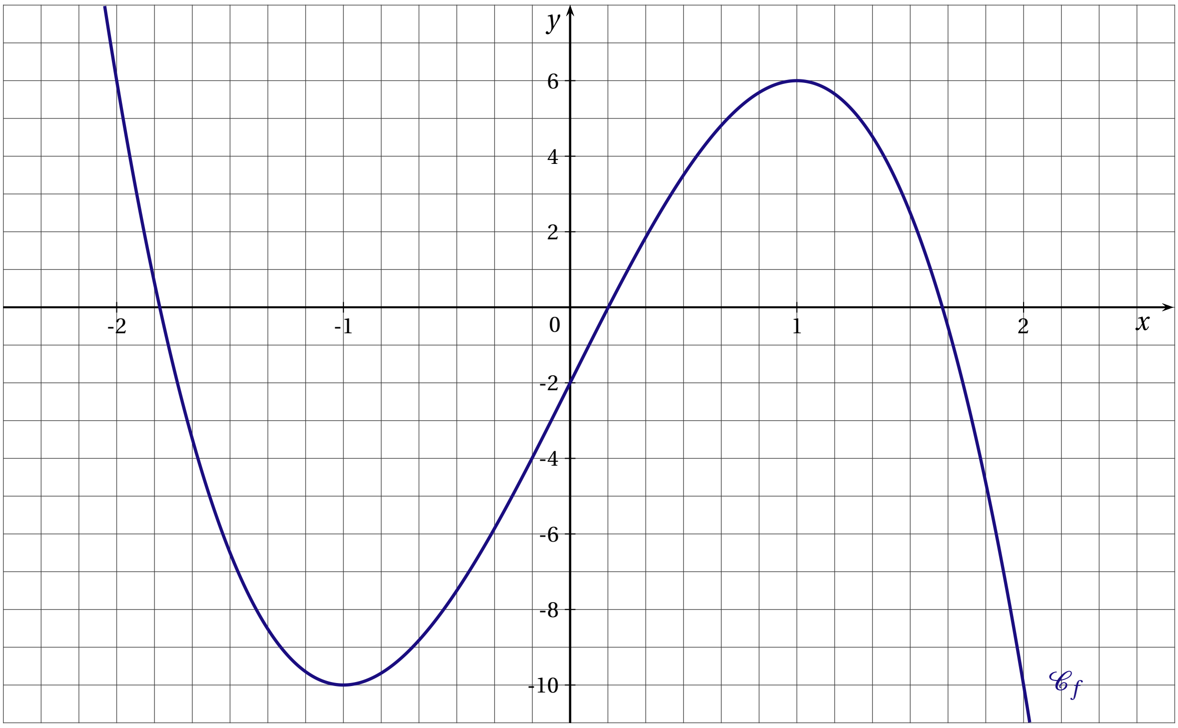
1. Soit g la fonction affine telle que $g\left(-\dfrac{9}{4}\right) = -6$ et $g\left(\dfrac{13}{4}\right) = 5$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné ci dessous.



2. a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)-g(x)=(x-3)(x+1)$.
   b) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4x^3+12x-2$.
Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le repère orthogonal ci-dessous.



1. Soit g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(3)-g(-1)=12$ et $g(2)=4$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère précédent.
2. a) Factoriser $f(x)-g(x)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$.
   c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite D avec la courbe C_f.

EXERCICE 13

Deux offres de location de vacances sont proposées dans deux résidences similaires.

— **OFFRE A :** 50 € par nuit pour les trois premières nuits puis, 44 € par nuit supplémentaire.

— **OFFRE B :** Un forfait de 350 € pour sept nuits consécutives puis, 32 € par nuit supplémentaire.

1. On appelle f la fonction qui à tout séjour de x nuits fait correspondre le montant en euros à payer pour un client qui a choisi l'offre A.
   a) Calculer $f(3)$ et $f(5)$.
   b) Donner une expression de $f(x)$.
2. On appelle g la fonction qui à tout séjour de x nuits fait correspondre le montant en euros à payer pour un client qui a choisi l'offre B.
   a) Calculer $g(5)$ et $g(12)$.
   b) Donner une expression de $g(x)$.
3. a) Représenter dans un même repère les fonctions f et g.
   b) Par lecture graphique, déterminer le nombre de nuits à partir duquel l'offre B est plus avantageuse que l'offre A.

Chapitre 4

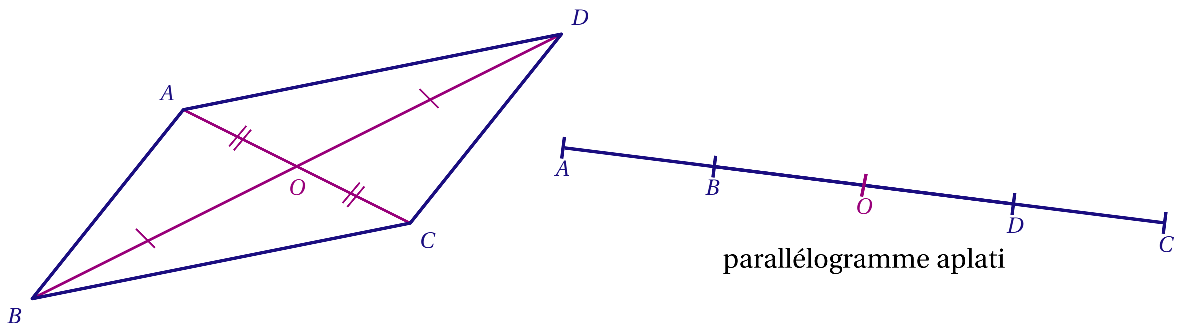
VECTEURS DU PLAN

I NOTION DE VECTEUR

1 PARALLÉLOGRAMME

DÉFINITION

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si ses diagonales ont le même milieu



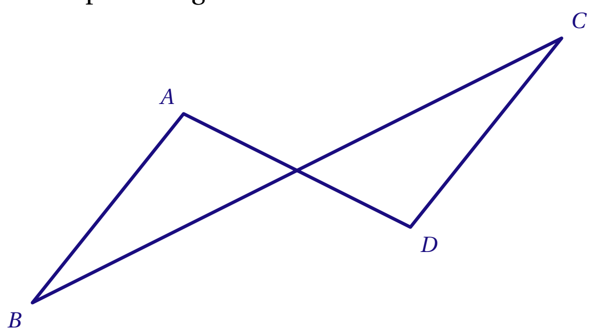
PROPRIÉTÉS

— Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si $(AB)//(DC)$ et $(AD)//(BC)$.

— Dans un parallélogramme les côtés opposés ont la même longueur.

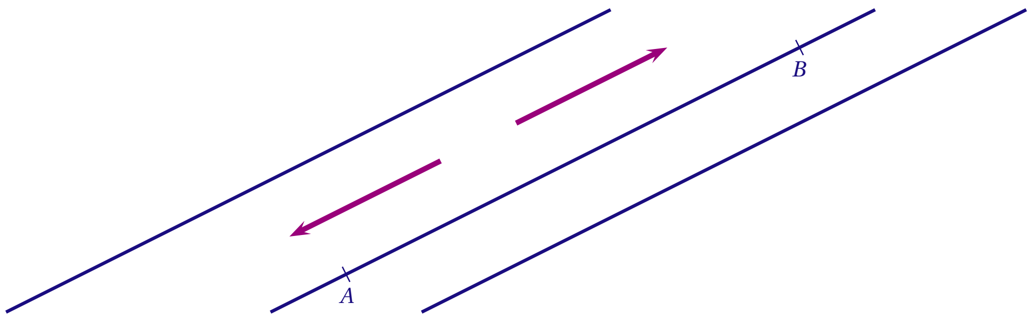
REMARQUE

Dire que dans un quadrilatère, il y a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ne suffit pas pour conclure que ce quadrilatère est un parallélogramme.



Dans le quadrilatère $ABCD$ nous avons $(AB)//(CD)$ et $AB = CD$, pourtant $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

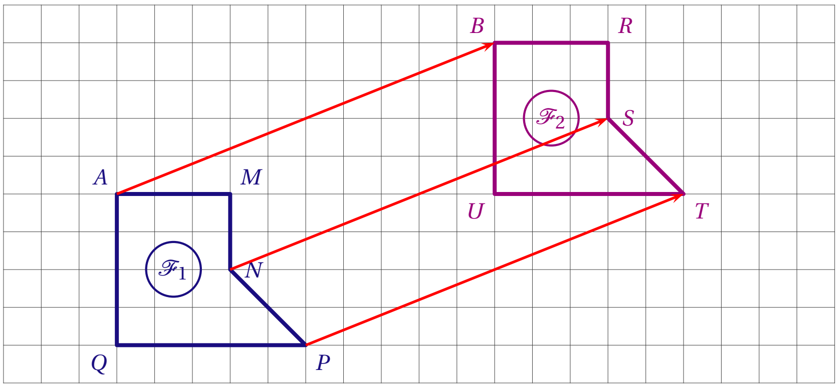
2 SENS ET DIRECTION



— Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont même direction.

— Une direction étant indiquée par la donnée d'une droite (AB), il y a deux sens de parcours dans cette direction : soit de A vers B, soit de B vers A.

3 TRANSLATION



Le glissement qui permet d'obtenir la figure $\mathscr{F}_2$ à partir de la figure $\mathscr{F}_1$ peut être décrit de façon précise par trois caractères :

— la *direction* du glissement est donnée par la droite (AB) ;

— le *sens* du glissement est celui de A vers B ;

— la *distance* du glissement est égale à la longueur du segment $[AB]$.

On dit que la figure $\mathscr{F}_2$ est l'image de la figure $\mathscr{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

REMARQUE

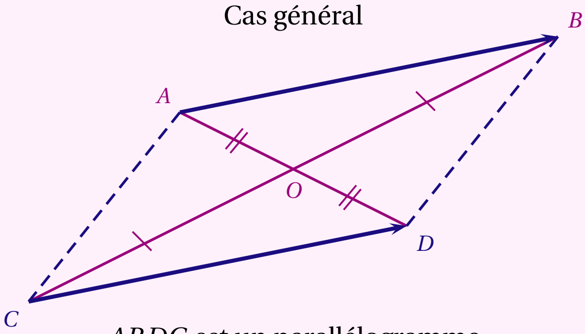
Les vecteur $\overrightarrow{NS}$ et $\overrightarrow{PT}$ sont aussi des vecteurs de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on dit qu'ils sont égaux. On note alors :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NS}=\overrightarrow{PT}$$

DÉFINITION

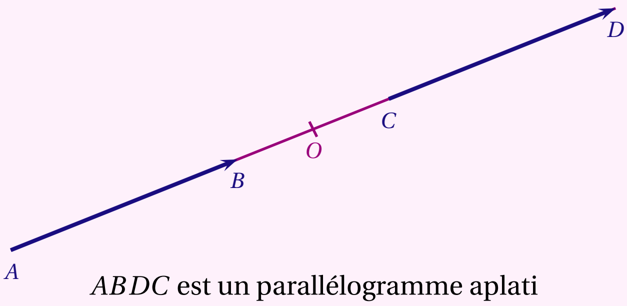
Soient A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.
Cette translation est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Cas général



$ABDC$ est un parallélogramme

Cas particulier où A, B et C sont alignés



$ABDC$ est un parallélogramme aplati

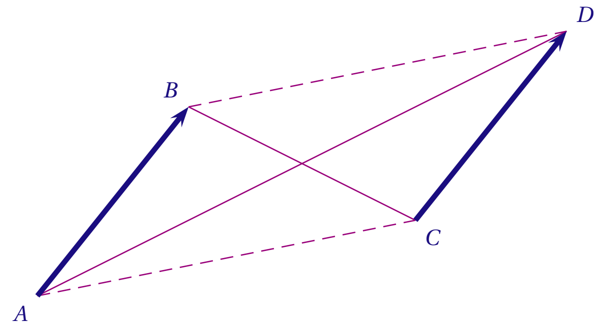
II VECTEURS

Un couple (A,B) de points du plan détermine un vecteur. A est l'origine du vecteur et B est son extrémité.
On le note $\overrightarrow{AB}$.

1 ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation.

DÉFINITION



A, B, C et D sont quatre points du plan. Les définitions suivantes sont équivalentes :

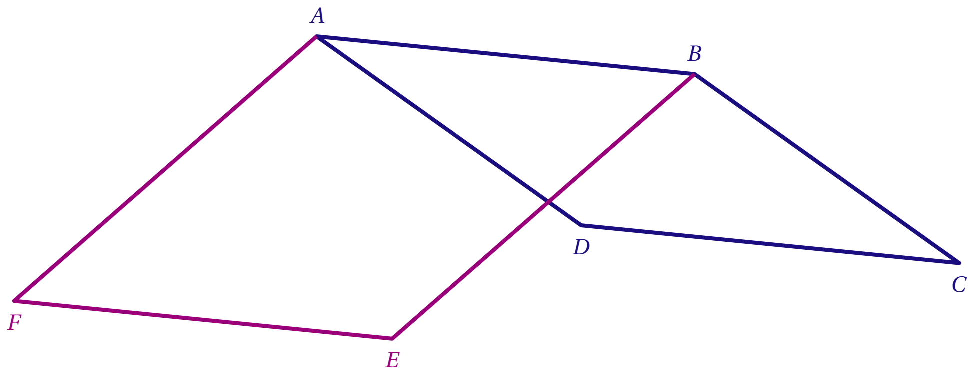
— $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

— $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

— $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

EXEMPLE : LES TROIS PARALLÉLOGRAMMES

$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrons que $DCEF$ est un parallélogramme.



— $ABCD$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

— $ABEF$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}$ donc le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.

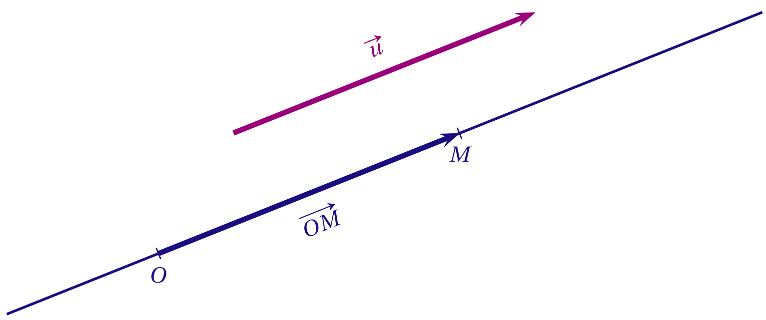
2 REPRÉSENTATION D'UN VECTEUR

Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\cdots$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FE}$, …sont des représentants du vecteur $\vec{u}$:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\cdots$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\cdots$ est appelé le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un un point M unique tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.



Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, les points O et M sont distincts. Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :

— Sa direction : c'est celle de la droite (OM).

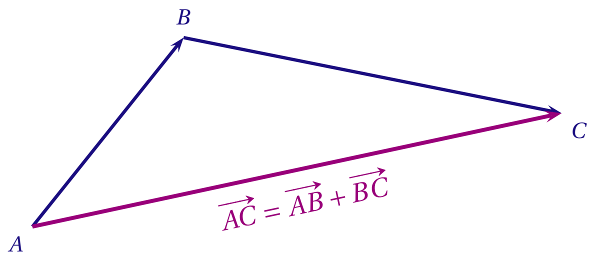
— Son sens : c'est le sens de O vers M.

— Sa norme notée $\|\vec{u}\|$: c'est la distance OM.

III ADDITION VECTORIELLE

1 SOMME DE DEUX VECTEURS

Soit trois points A, B et C.
Si on applique la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, on obtient la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$



RELATION DE CHASLES

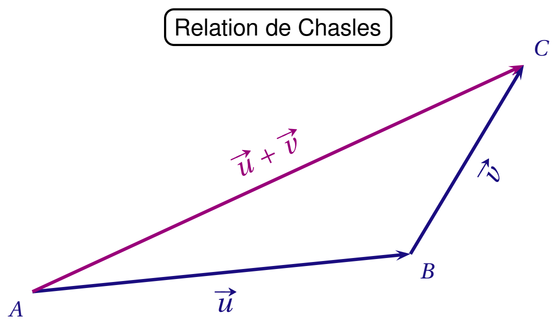
Quels que soient les points A, B et C on a :

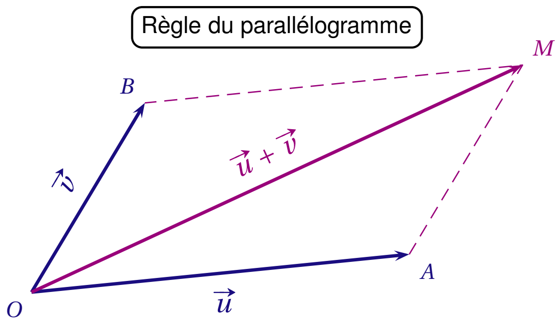
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

La somme $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $OAMB$ est un parallélogramme.

CONSTRUCTION DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS





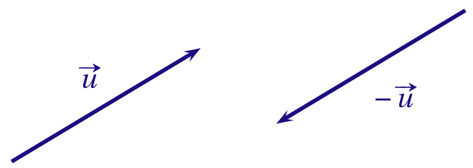
PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$; $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{u}+\vec{w})$

2 DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

OPPOSÉ D'UN VECTEUR

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $\left(-\vec{u}\right)$ tel que $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$.



CONSÉQUENCE

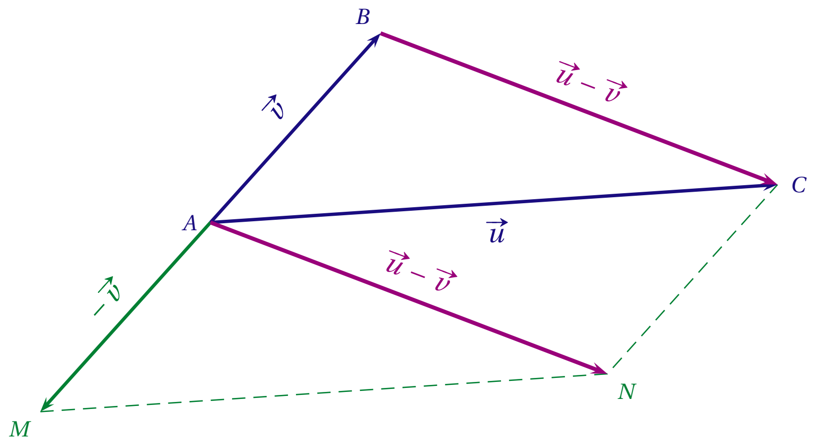
L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

✻ PREUVE

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

DÉFINITION

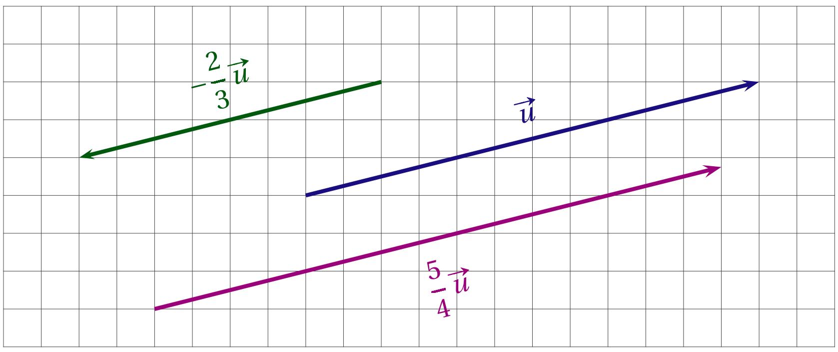
Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la différence $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$.



Quels que soient les points A, B et C, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

IV MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

1 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL k

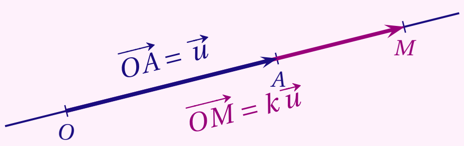


DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, noté $k\vec{u}$ est le vecteur caractérisé par :

— sa direction : $k\vec{u}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$;

$\boxed{\text{Cas où } k > 0}$

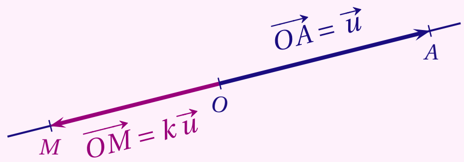


— son sens : le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$;

— sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par le réel k

$$\left\| k\vec{u} \right\| = k \times \left\| \vec{u} \right\|$$

$\boxed{\text{Cas où } k < 0}$



— son sens : le vecteur $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur $\vec{u}$;

— sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par l'opposé du réel k

$$\left\| k\vec{u} \right\| = -k \times \left\| \vec{u} \right\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale $\left\| k\vec{u} \right\| = |k| \times \left\| \vec{u} \right\|$ et se lit :
« la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par la valeur absolue du réel k »

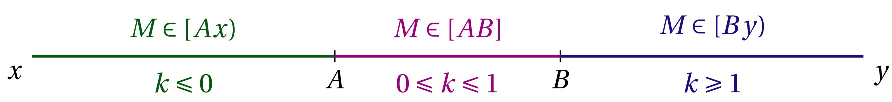
Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on convient que $k\vec{u} = \vec{0}$: ainsi, l'égalité $k\vec{u} = \vec{0}$ ne peut se produire que lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$.

REMARQUE

Soit A et B deux points distincts, et k un réel donné. Il existe un unique point M défini par la relation $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$:

— M est un point de la droite (AB)

— M a pour abscisse k dans le repère $(A;B)$ d'origine A



2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' :
$k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$; $\quad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$; $\quad k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$

3 VECTEURS COLINÉAIRES

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

REMARQUES

— Comme $\vec{0} = 0\vec{u}$, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

— Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

4 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC LES MILIEUX

MILIEU D'UN SEGMENT

Étant donné un segment $[AB]$. Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu I du segment $[AB]$:

1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou 2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou 3) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

4) Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

✲ DÉMONSTRATION

1. L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ caractérise le milieu I du segment $[AB]$ (conséquence de la définition de l'égalité de deux vecteurs).
2. I milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
3. I milieu du segment $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \iff 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$
4. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}} = 2\overrightarrow{MI}$$

Réciproquement, la propriété $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ étant vraie pour tout point M on peut l'appliquer au point I. Soit :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{II} = \vec{0}$$

Ce qui prouve que I est le milieu du segment $[AB]$

THÉORÈME

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ alors $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

✲ DÉMONSTRATION

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$$

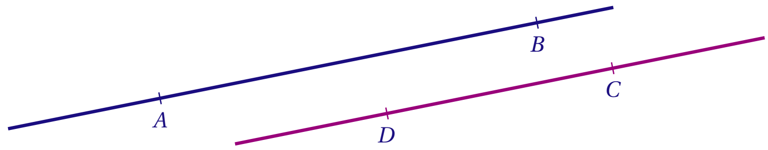
PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

— Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

✲ DÉMONSTRATION

— Si $(AB)//(CD)$ alors, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction donc ils sont colinéaires.



Réciproquement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors, ils ont la même direction donc $(AB)//(CD)$

— $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires signifie donc $(AB)//(AC)$. Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

EXEMPLES

EXEMPLE 1 : CONSTRUCTION DE POINTS

La méthode pour construire un point M défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

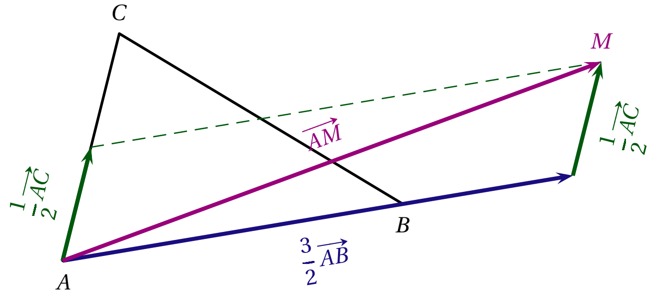
$$\underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\text{origine connue}} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

Soit trois points non alignés A, B et C. Construire le point M défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$

— Choisissons par exemple A comme « *origine connue* »

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} &\iff \overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \\
&\iff -2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{MA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&\iff \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

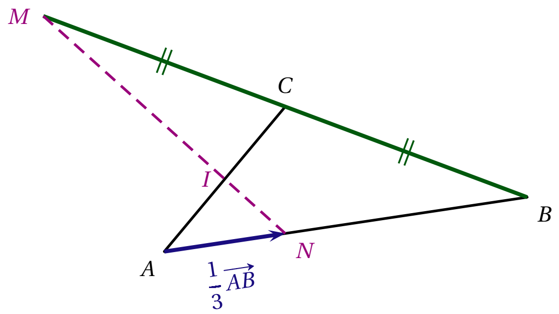
— Nous pouvons construire le point M :



EXEMPLE 2 : PARALLÉLISME, ALIGNEMENT

Montrer que des points sont aligné, ou sont sur des droites parallèles, revient à montrer que des vecteurs sont colinéaires.

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AC]$*, M est le symétrique de B par rapport à C et le point N est tel que* $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *. Les points M, I et N sont-ils alignés ?*



— I est le milieu du segment $[AC]$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

— M est le symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu du segment $[BM]$ d'où $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$.

Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

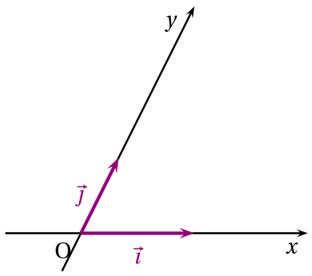
Ainsi, $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IN}$.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont colinéaires donc les points M, I et N sont alignés.

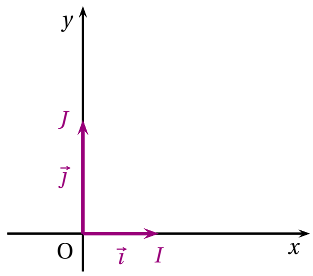
V COORDONNÉES

1 REPÈRE DU PLAN

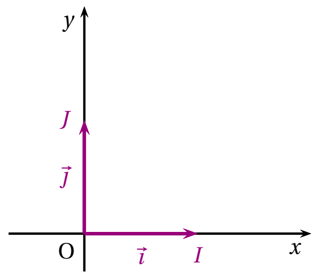
On appelle base tout couple $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires.
Un repère du plan est un triplet $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où O est un point du plan (appelé origine du repère) et $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base.



Repère quelconque



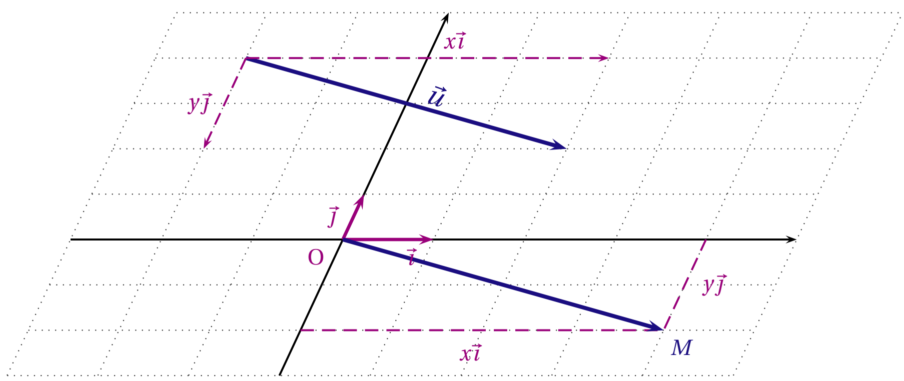
Repère orthogonal
$(OI) \perp (OJ)$



Repère orthonormé
$(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

2 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point $M(x;y)$ dans le repère $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \vec{u}$.
On note indifféremment $\vec{u}(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



— $(x;y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

— $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ signifie que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

REMARQUE

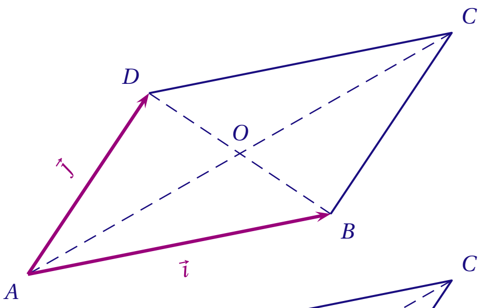
Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix du repère.

EXEMPLE

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

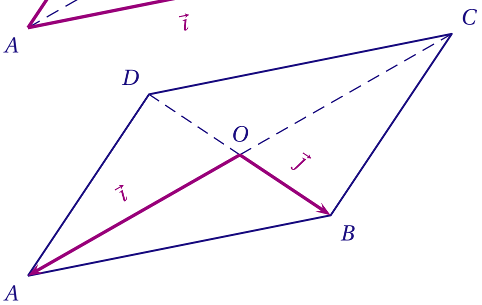
— Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$:

$A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$



— Dans le repère $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$:

$A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$



PROPRIÉTÉS DES COORDONNÉES

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs :

— $\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.

— $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

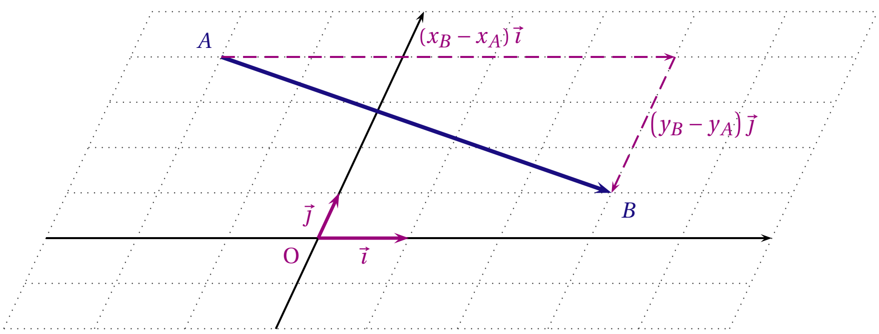
— Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

— pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

3 COORDONNÉES DU VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.



✼ DÉMONSTRATION

D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

4 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soit $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A; y_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B\right)$.
Les coordonnées du milieu $I\left(x_I; y_I\right)$ du segment $[AB]$ sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

✼ DÉMONSTRATION

I est le milieu du segment $[AB]$ d'où $2\overrightarrow{\text{O}I} = \overrightarrow{\text{O}A} + \overrightarrow{\text{O}B}$ soit $\overrightarrow{\text{O}I} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{O}A} + \overrightarrow{\text{O}B}\right)$

5 CONDITION DE COLINÉARITÉ

Soit $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0$$

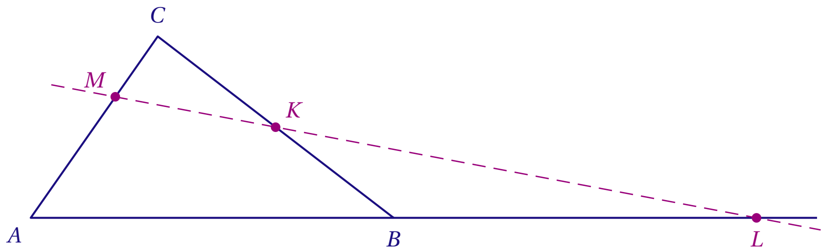
✼ DÉMONSTRATION

— Dans le cas où l'un des deux vecteurs est nul, les vecteurs sont colinéaires et la relation $xy' - x'y = 0$ est vérifiée car $x = y = 0$ ou $x' = y' = 0$.

— Dans le cas où les deux vecteurs sont non nuls, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{v}$. Soit $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ ce qui équivaut à $xy' - x'y = 0$.

EXEMPLE

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, K est le milieu de $[BC]$, L est le symétrique du point A par rapport à B.
Déterminer la position du point M sur la droite (AC) pour que les points K, L et M soient alignés.



Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

— Les coordonnées du point K milieu du segment $[BC]$ sont $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

— L est le symétrique du point A par rapport à B donc $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du point L sont $L(2;0)$.

— M est un point de la droite (AC) donc $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC}$ d'où M a pour coordonnées $M(0; y)$.

Les points K, L et M sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}x_K - x_L\\ y_K - y_L\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2\\ \frac{1}{2}-0\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}x_M - x_L\\ y_M - y_L\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}0-2\\ y-0\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}-2\\ y\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires pour y solution de l'équation :

$$-\frac{3}{2}\times y-(-2)\times\frac{1}{2}=0 \iff -\frac{3}{2}\times y=-1 \iff y=\frac{2}{3}$$

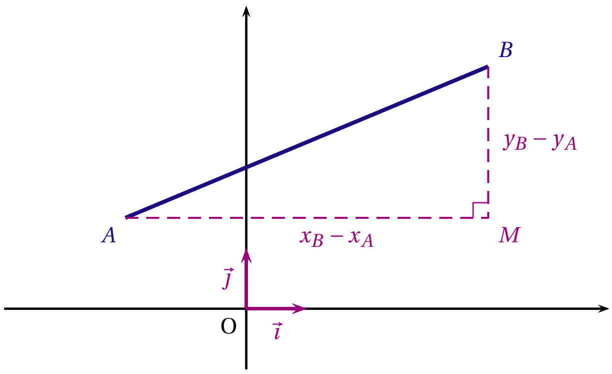
Ainsi, M est le point de la droite (AC) tel que $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

6 DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan muni d'un repère *orthonormal* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la distance AB est donné par

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

✻ DÉMONSTRATION



Comme $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormal, le triangle AMB est un triangle rectangle en M.
D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2=AM^2+MB^2$$
$$\text{Soit } AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$
$$\text{d'où } AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

EXEMPLE

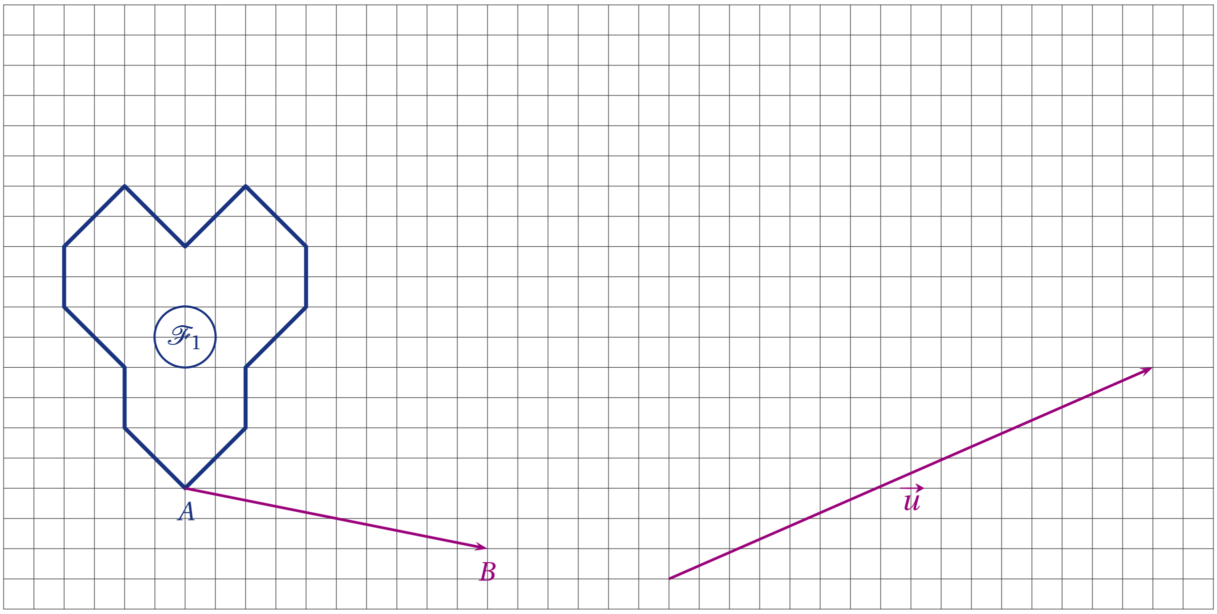
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les points $A(-1;-2)$, $B(2;2)$ et $C(-2;5)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Calculons les longueurs des trois côtés du triangle ABC :

— $AB=\sqrt{(2-(-1))^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
— $AC=\sqrt{(-2-(-1))^2+(5-(-2))^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
— $BC=\sqrt{(-2-2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

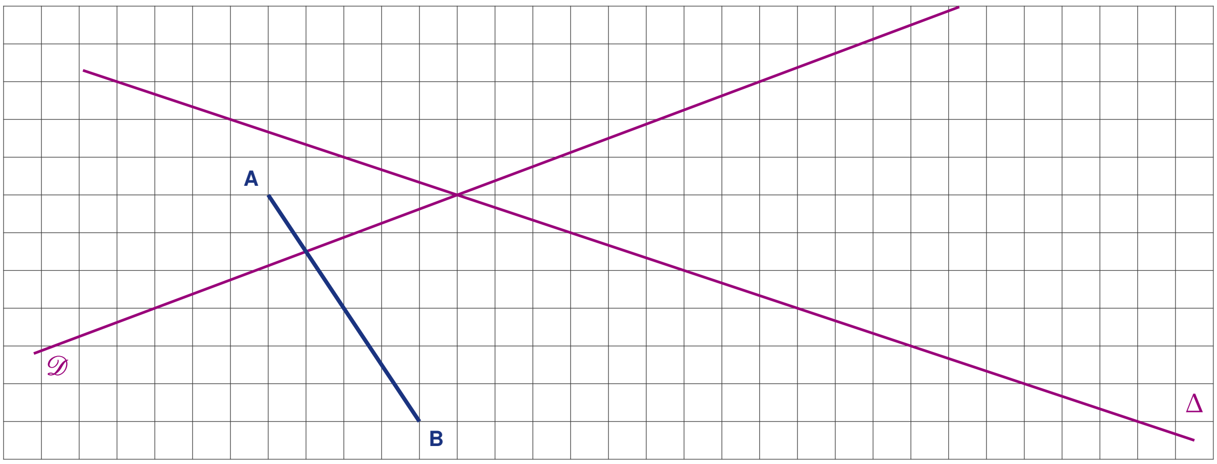
Nous avons $AC^2=AB^2+BC^2$ alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
En outre $AB=BC$ donc ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

EXERCICE 1



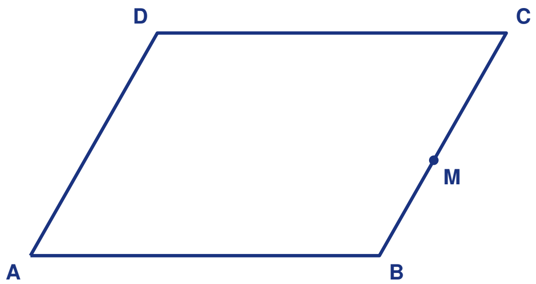
1. Tracer la figure $\mathscr{F}_2$ image de la figure $\mathscr{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Tracer la figure $\mathscr{F}_3$ image de la figure $\mathscr{F}_2$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

EXERCICE 2



Construire un point E sur la droite Δ et un point F sur la droite $\mathscr{D}$ de façon que $ABEF$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 3



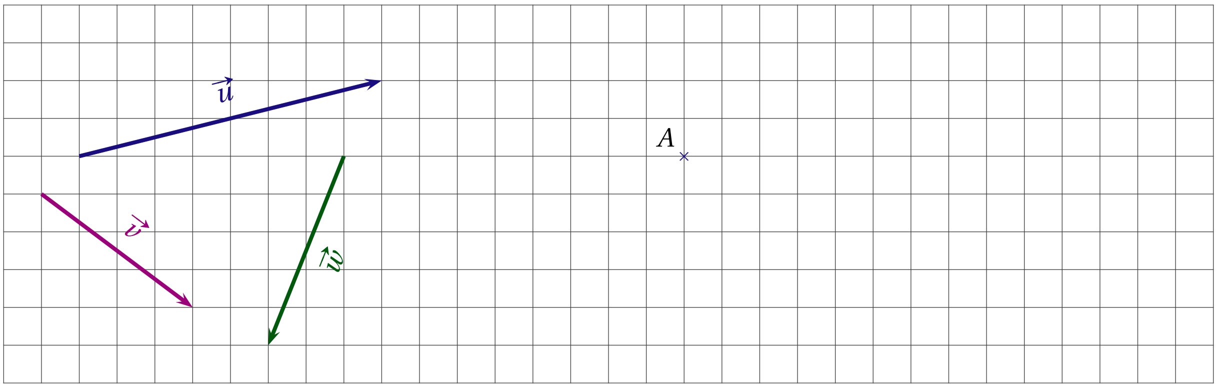
$ABCD$ est un parallélogramme. M est un point du segment $[BC]$.

1. Construire le point N tel que le quadrilatère $AMNB$ soit un parallélogramme.

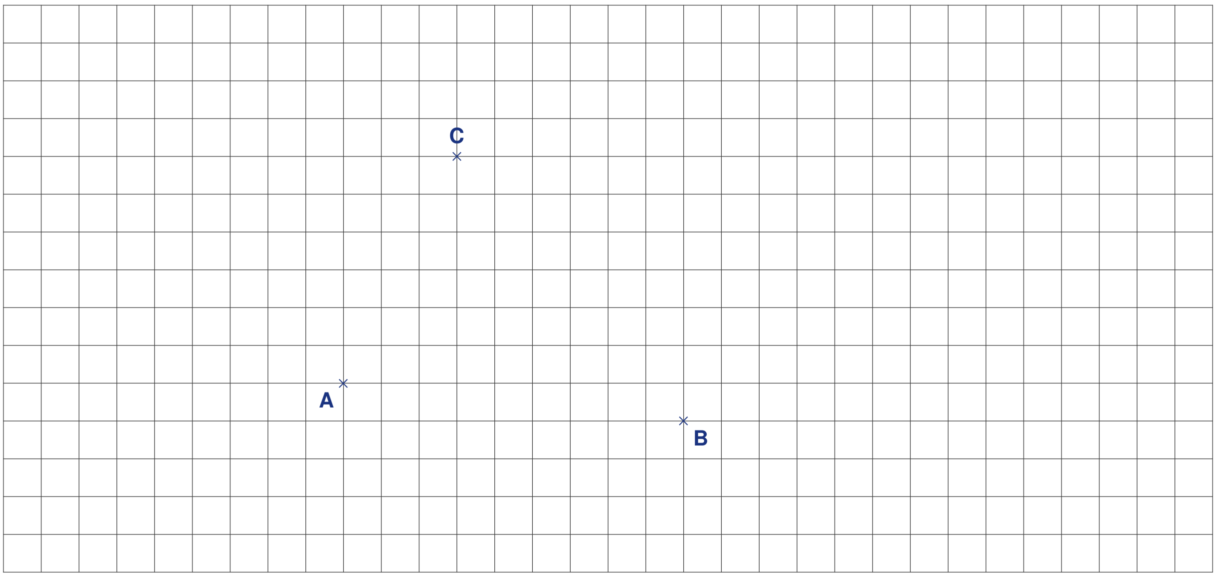
2. Montrer que les segments $[CM]$ et $[DN]$ ont le même milieu.

EXERCICE 4

Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{w} - \vec{v}$



EXERCICE 5



1. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que B est le milieu du segment $[AN]$.

EXERCICE 6

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
2. En déduire que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

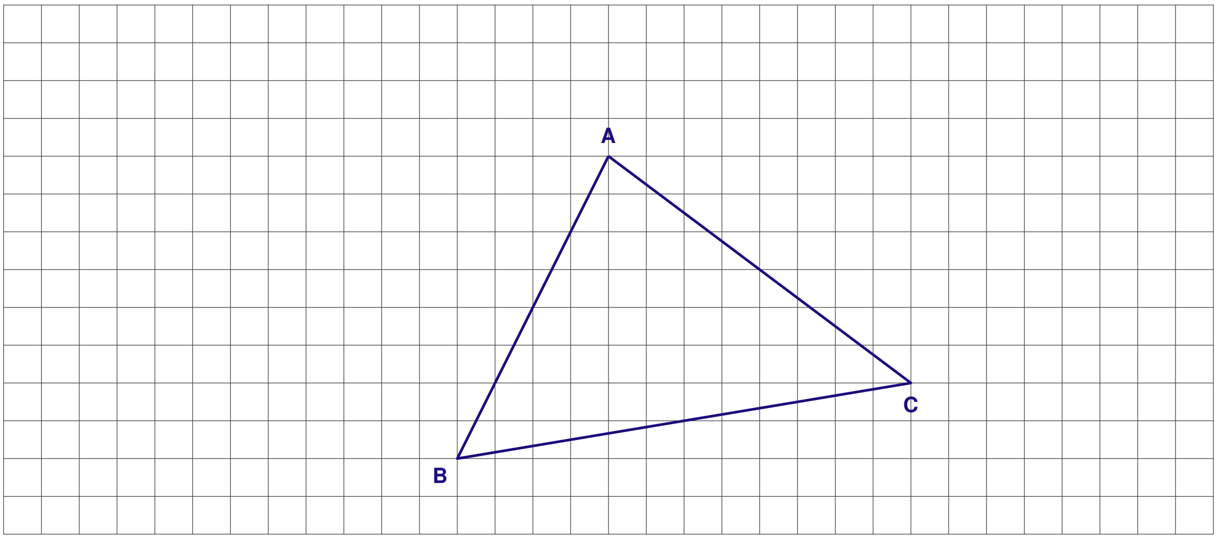
EXERCICE 7

Soit un triangle ABC. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 8

1. Soit M le point du plan tel que $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Construire le point M dans la figure ci-dessous.

2. Construire le point N tel que $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{CN}$.
3. Les points A, M et N sont-ils alignés ?



EXERCICE 9

Soit un triangle ABC et les milieux I, J, et K des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

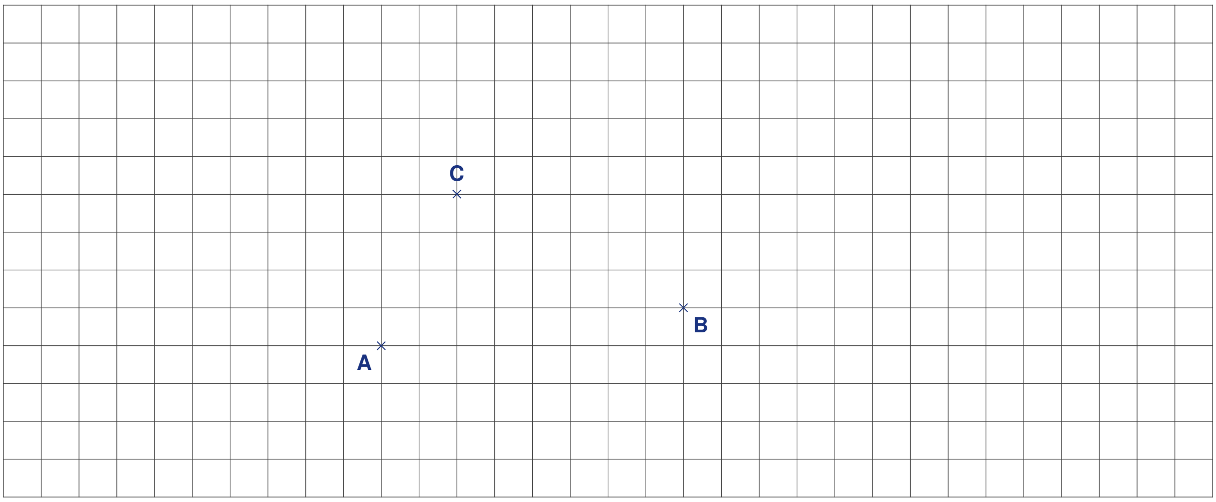
1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AB}$.
2. Les droites (MN) et (IJ) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 10

$ABCD$ est un parallélogramme.

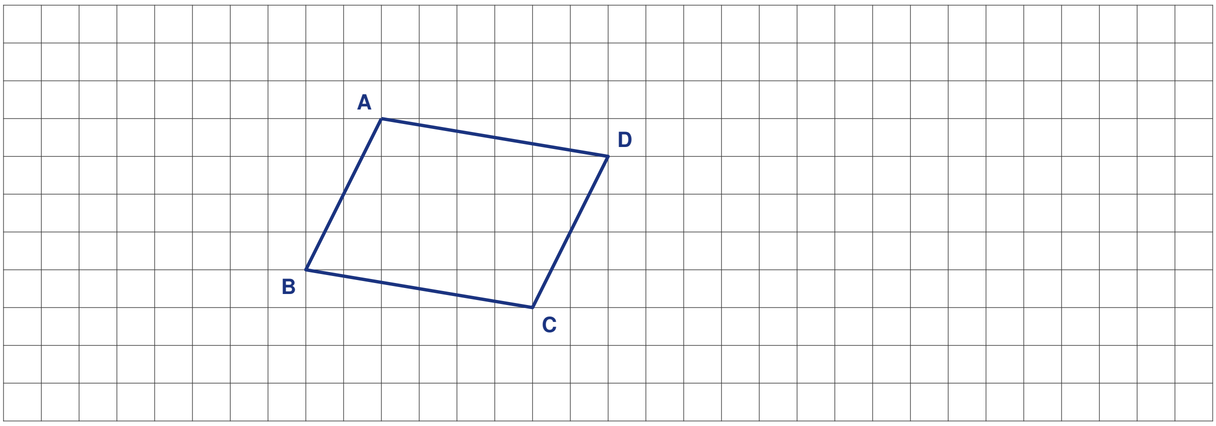
1. Placer les points E et F définis par les égalités : $\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}$
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

EXERCICE 11



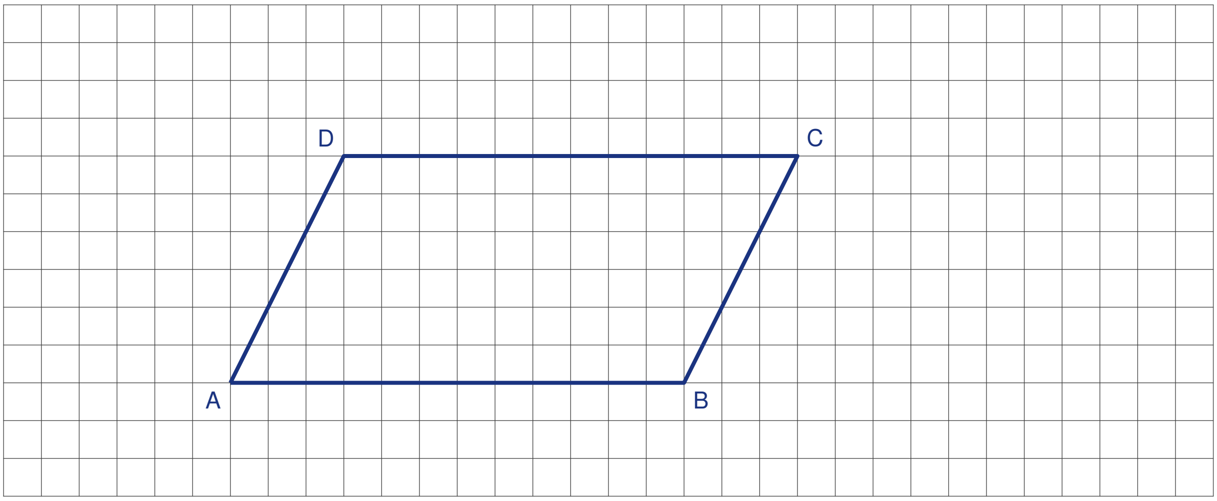
1. Placer les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que les droites (MN) et (AP) sont parallèles.

EXERCICE 12



1. $ABCD$ est un parallélogramme. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire que les points E, C et F sont alignés.

EXERCICE 13



$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Placer les points E, F et G tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Les points E, F et G sont-ils alignés ?

EXERCICE 14

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Les droites (AM) et (BN) sont-elles parallèles ?

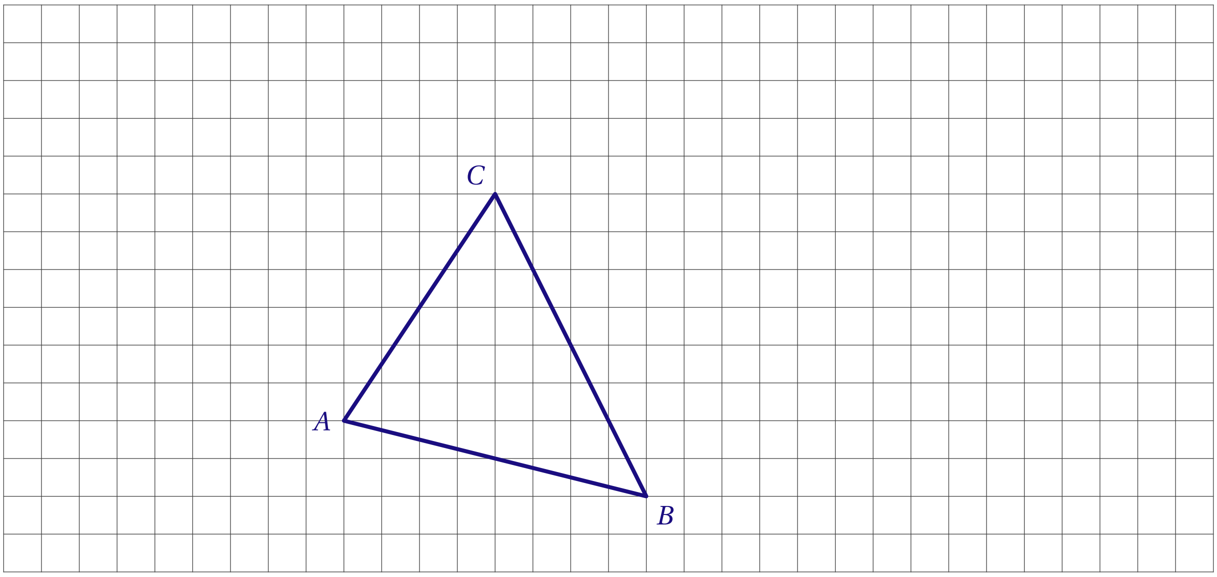
EXERCICE 15

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Placer les points E et F définis par les égalités : $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$
2. Les droites (AE) et (BF) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 16

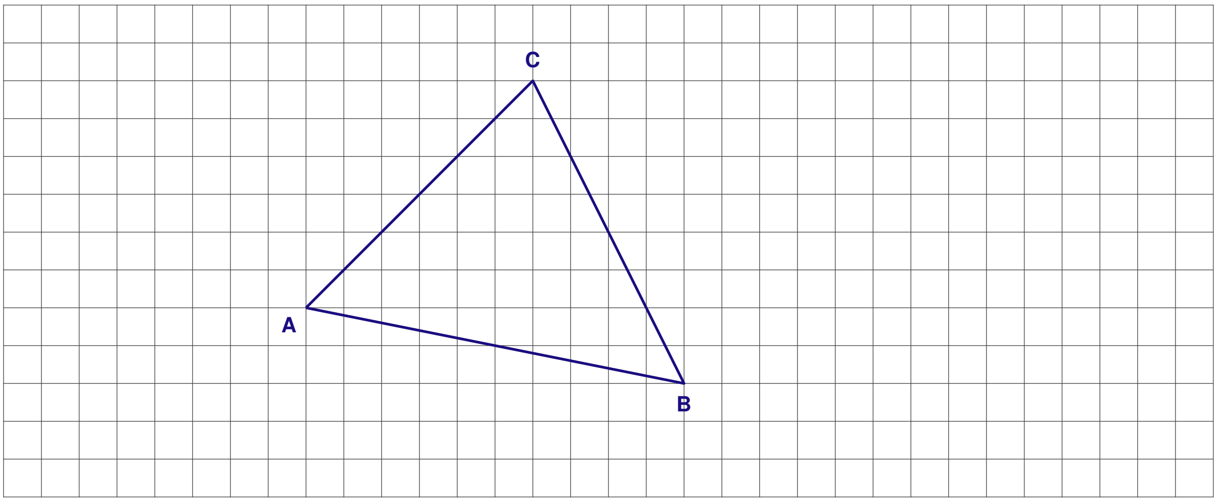
ABC est un triangle.



1. Soit M le point défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.
   a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) Placer le point M sur la figure.
2. Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ on considère le point D de coordonnées $(1;1)$
   a) Placer le point D sur la figure.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
3. Les droites (BC) et (DM) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 17

ABC est un triangle.



1. Placer les points I, J et K tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et K milieu du segment $[BC]$.
2. Exprimer les coordonnées des points I, J et K dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
3. Les points I, J et K sont-ils alignés ?

EXERCICE 18

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(-1;2)$, $B(-2;-3)$, $C(7;0)$ et $D(5;4)$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 19

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(-4;-1)$, $B(3;2)$ et $C(4;-1)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 20

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. On considère les points $A(-2;2)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer l'ordonnée y du point $D\left(-\frac{1}{3};y\right)$ tel que les points A, B et D soient alignés.

EXERCICE 21

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les points $A(-1;1)$, $B(2;1)$ et $C(-2;3)$

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BP}=\vec{0}$.
3. Les points B, M et P sont-ils alignés ?

EXERCICE 22

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(3;4)$, $B(-2;1)$ et $C(2;-2)$.

1. Soit G le point du plan tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
   a) Montrer que $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
   b) En déduire les coordonnées du point G.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
3. Soit J le milieu de $[AC]$. Les points B, G et J sont-ils alignés ?
4. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

EXERCICE 23

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(4;-2)$, $B(2;2)$, $C(-4;-1)$ et $D(-2;-5)$.

1. a) Placer le point E tel que le quadrilatère $ABEC$ soit un parallélogramme.
   b) Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?
2. a) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[BC]$.
   b) Les points A, O et M sont-ils alignés ?
3. a) Calculer les distances AC et BD.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 24

Le plan est muni d'un repère orthonormé (*unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)

1. Placer les points $A(-4;-3)$, $B(-1;3)$ et $C(3;1)$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme puis, placer D sur la figure.
3. Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit M le point défini par
$$6\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{CB}$$
   a) Démontrer que $\overrightarrow{BM} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   b) Construire le point M sur la figure (*on laissera apparents les traits de construction*).
   c) Calculer les coordonnées de M.
5. Les points D, I et M sont-ils alignés? Justifier la réponse.

EXERCICE 25

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1. Placer les points $A\,(-5;1)$, $B\,(3;-3)$, $C\,(5;1)$ et $E\,(2;0)$.
2. a) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AB]$.
   b) Les points E, C et M sont-ils alignés?
3. a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b) Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
4. a) Calculer les distances AC et BD.
   b) Quelle est la nature du triangle ABC?
5. Placer le point N de coordonnées $(1;3)$.
   Les droites (AN) et (EC) sont-elles parallèles?

EXERCICE 26

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1. Placer les points $A\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$, $B\left(4;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $C\left(3;-\dfrac{5}{2}\right)$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
3. Le vecteur $\vec{u}\,(2;4)$ est-il colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$? au vecteur $\overrightarrow{BC}$?
4. Soit $D\left(-1;y\right)$ où y est un nombre réel.
   a) Déterminer y pour que le point D appartienne à la droite (CI).
   Placer le point D dans le repère.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?
5. Le point B appartient-il au cercle de diamètre $[AC]$?

Chapitre 5

FONCTION CARRÉ

I FONCTION CARRÉ

1 DÉFINITION

La fonction carré est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$

PROPRIÉTÉS

— Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
— Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

2 VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

✳ DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

— Si $a < b \leqslant 0$:
$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $a < b \leqslant 0 \Leftrightarrow a + b < 0$ donc $f(a) - f(b) > 0$
Ainsi, sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
— Si $0 \leqslant a < b$:
$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $0 \leqslant a < b \Leftrightarrow a + b > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$
Ainsi, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

CONSÉQUENCES

— Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$
— Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

EXEMPLE

Déterminer un encadrement de x^2 pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
La fonction carré f n'est pas monotone sur l'intervalle $[-3; 2]$.
f est décroissante sur $[-3; 0]$ et croissante sur $[0; 2]$.

— Si $-3 \leqslant x \leqslant 0$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

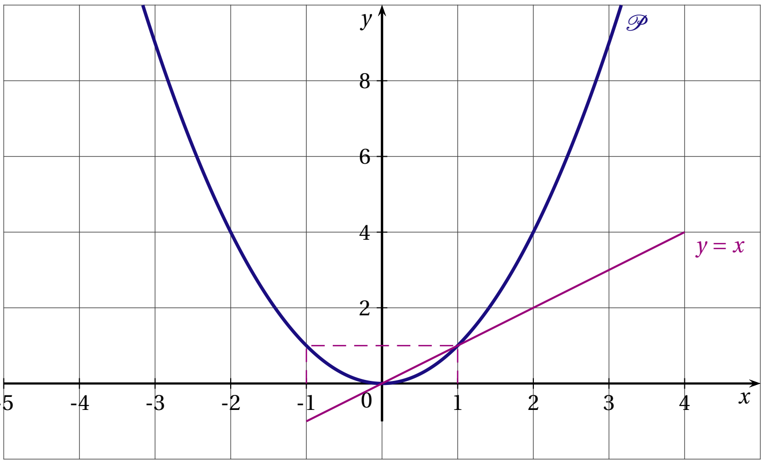
— Si $0 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

x	-3		0		2
$f(x)$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

D'après les variations de la fonction carré, si $-3 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



REMARQUE :

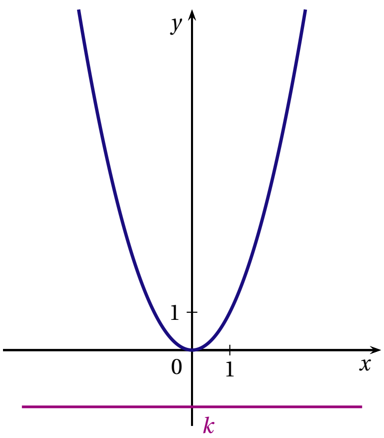
Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$. Sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

4 ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

ÉQUATIONS $x^2 = k$ AVEC k RÉEL

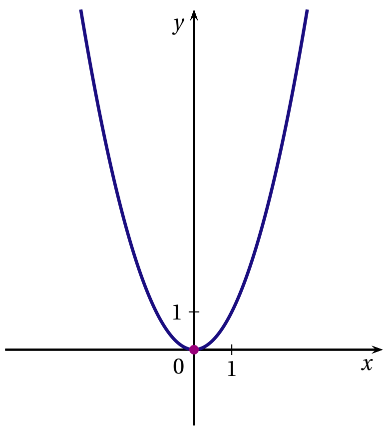
— Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.
— Si $k = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$
— Si $k > 0$, résoudre l'équation $x^2 = k$, revient à résoudre l'équation $x^2 - k = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{k}\right)\left(x - \sqrt{k}\right) = 0$.
On obtient les deux solutions $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.

$\boxed{k < 0}$



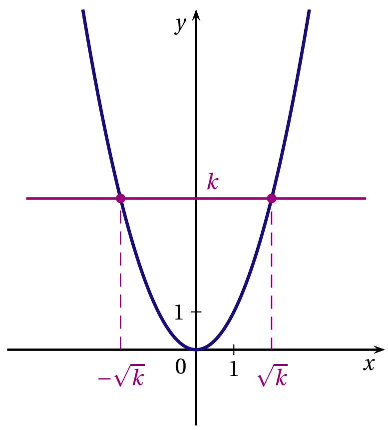
$x^2 = k$ n'a pas de solution

$\boxed{k = 0}$



$x^2 = 0$ a pour unique solution 0

$\boxed{k > 0}$

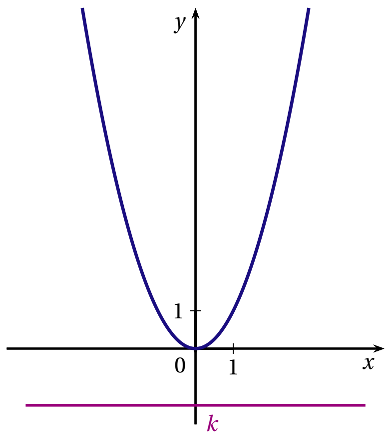


$x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ ou $\sqrt{k}$

INÉQUATIONS $x^2 \leqslant k$ OU $x^2 \geqslant k$ AVEC k RÉEL

Résoudre une inéquation $x^2 \leqslant k$ ou $x^2 \geqslant k$ avec k réel revient à étudier le signe de $x^2 - k$.

$\boxed{k<0}$



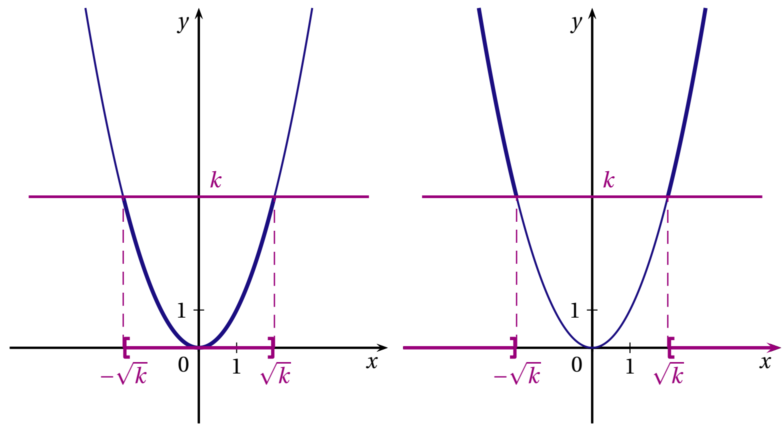
L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution :

$$S = \varnothing$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie :

$$S = \mathbb{R}$$

$\boxed{k>0}$



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left[-\sqrt{k}; \sqrt{k}\right]$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left]-\infty; -\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k}; +\infty\right[$$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 9$.

Pour tout réel x,

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) > 0$$

Étudions le signe du produit $(x+3)(x-3)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 9$ est $S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

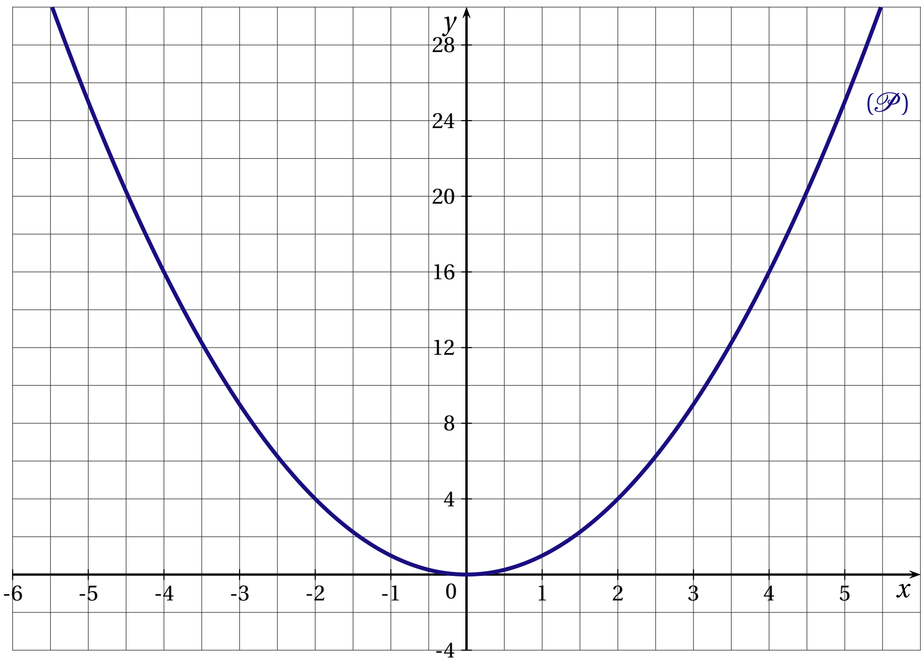
EXERCICE 1

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« Pour tout nombre réel x, $x+1 \geqslant x$. D'où $(x+1)^2 \geqslant x^2$
Soit en développant $x^2+2x+1 \geqslant x^2$
On en déduit que $2x+1 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et donc finalement que tout nombre réel est plus grand que $-\dfrac{1}{2}$. »

EXERCICE 2

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. Sa courbe représentative est la parabole $(\mathscr{P})$ tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les images des réels : $-\sqrt{6}$, $1-\sqrt{2}$, 10^{-2} et $\dfrac{7}{13}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 12 ?
3. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = \dfrac{3}{2}x + 10$.
   a) Tracer dans le repère précédent, la courbe D représentative de la fonction g.
   b) Lire graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
   c) En déduire une factorisation de $E(x) = x^2 - \dfrac{3}{2}x - 10$.

EXERCICE 3

Soit x un nombre réel.

1. L'affirmation « Si $x^2 \geqslant 9$ alors $x \geqslant 3$ » est-elle vraie ?
2. Écrire une proposition équivalente à : $x^2 \geqslant 9$.

EXERCICE 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-3)^2 = 25$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(1-2x)^2 \geqslant 9$.

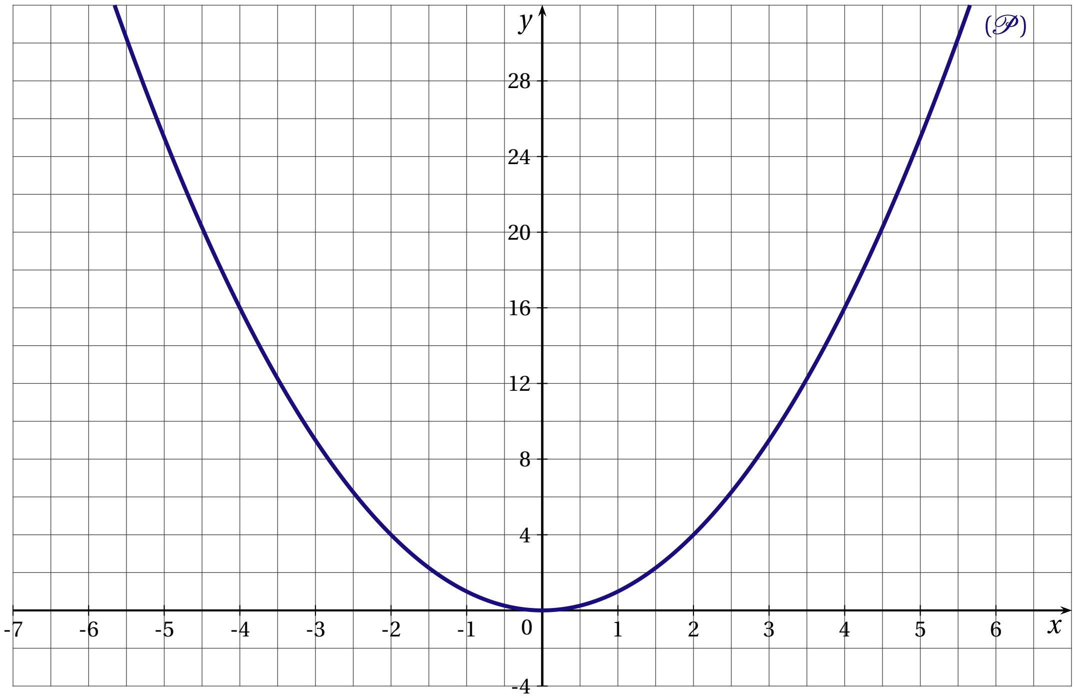
EXERCICE 5

Soit x un réel de l'intervalle $[-0{,}5;3]$.

1. Donner un encadrement de x^2 puis de x^2-4x
2. a) Montrer que pour tout réel x, $x^2-4x=(x-2)^2-4$.
   b) En déduire un deuxième encadrement de x^2-4x.

EXERCICE 6

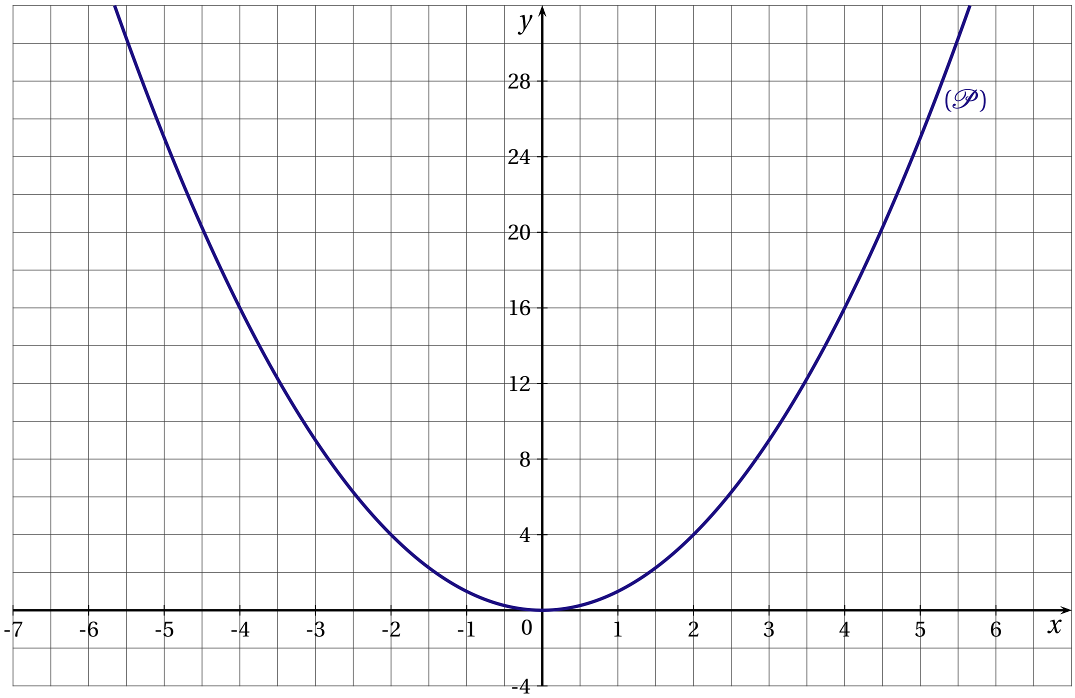
f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$.
Sa courbe représentative est la parabole $(\mathscr{P})$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les images des réels : $\left(-10^{-3}\right)$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $2-\sqrt{3}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 20 ?
3. Le point $A(3{,}6;13)$ appartient-il à la parabole $(\mathscr{P})$?
4. Soit a un réel tel que : $-3\leqslant a\leqslant 2$. Déterminer un encadrement de a^2.
5. Soit g la fonction affine telle que $g(-3)=18$ et $g(5)=6$.
   a) Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère précédent.
6. a) Montrer que $f(x)-g(x)=\left(x+\dfrac{9}{2}\right)(x-3)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$.
   c) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite D_g avec la parabole $(\mathscr{P})$.

EXERCICE 7

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$.
Sa courbe représentative $(\mathscr{P})$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



PARTIE A

1. Calculer les images des réels : $\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ $(-\sqrt{6})$, $(1-\sqrt{3})$, 10^{-3} et $\dfrac{7}{13}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 12 ?
3. Placer dans le repère précédent le point A de coordonnées $A\left(-\dfrac{9}{2};20\right)$.
   Le point A appartient-il à la parabole $(\mathscr{P})$?
4. Résoudre dans l'ensemble des réels l'inéquation $f(x) \geqslant 8$.
5. Soit a un réel tel que : $-\dfrac{\sqrt{2}}{3} \leqslant a \leqslant -0{,}1$. Déterminer un encadrement de a^2.
6. Si $x \in \left]-1;10^{-2}\right]$, à quel intervalle appartient $f(x)$?

PARTIE B

Soit g la fonction affine telle que $g(-6) = 6$ et $g(2) = 26$.

1. a) Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère précédent.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite D_g avec la parabole $(\mathscr{P})$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 8

Recopier et compléter les égalités suivantes :

A. $x^2+2x=(x+1)^2-\cdots$

B. $x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\cdots$

C. $x^2+3x-1=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\cdots$

D. $x^2-5x+7=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\cdots$

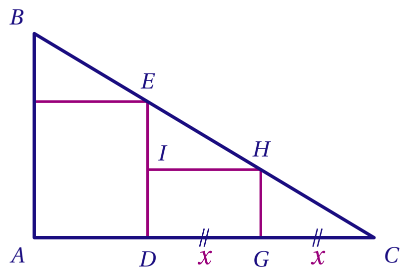
E. $2x^2+3x=2\left[(x+\cdots)^2 \quad \cdots\right]$

F. $-3x^2-x+1=-3\left[(x+\cdots)^2 \quad \cdots\right]$

G. $\dfrac{x^2}{2}+3x-1=\dfrac{1}{2}\left[(x+\cdots)^2 \quad \cdots\right]$

H. $-\dfrac{x^2}{4}+3x+2=-\dfrac{1}{4}\left[(x-\cdots)^2 \quad \cdots\right]$

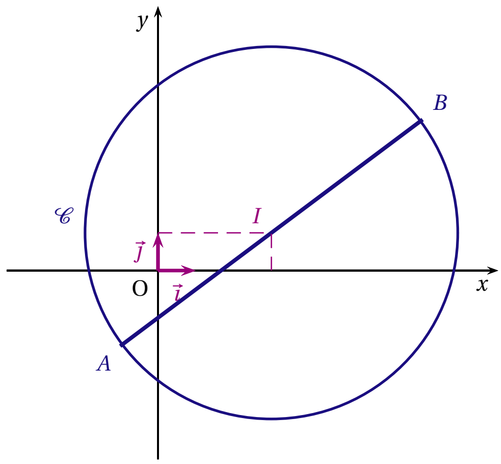
EXERCICE 9



ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 9$ cm et $AC = 15$ cm.
G et D sont deux points du segment $[CA]$ tels que $CG = GD$.
On construit les rectangles $ADEF$ et $DGHI$ comme indiqué sur la figure.
On pose alors $CG = GD = x$ avec $0 < x < 7{,}5$.
Le but de l'exercice est de trouver les valeurs de x pour lesquelles les aires des rectangles $DGHI$ et $ADEF$ sont égales.

1. a) Exprimer GH en fonction de x. En déduire l'aire en cm^2 du rectangle $DGHI$ en fonction de x.
   b) Exprimer ED en fonction de x. En déduire l'aire en cm^2 du rectangle $ADEF$ en fonction de x.
2. Résoudre alors le problème.

EXERCICE 10

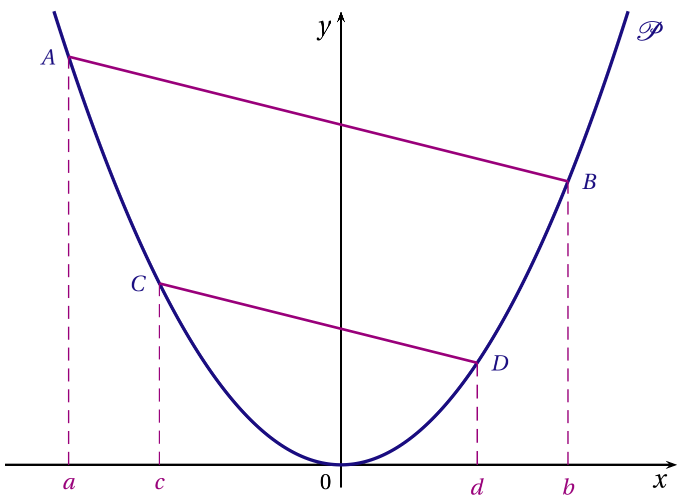


Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On considère les points $A(-1;-2)$, $B(7;4)$ et le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre AB.

1. Calculer les coordonnées du centre I du cercle $\mathscr{C}$.
2. Calculer le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer les abscisses des points $M(x;5)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 11

A, B, C et D sont quatre points distincts de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



1. On suppose dans cette question que les points A, B et C ont pour abscisses respectives (-6), 5 et (-4).
   Calculer les coordonnées du point D pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.
2. On note a, b, c et d les abscisses respectives des points A, B, C et D de la parabole $\mathscr{P}$.
   Quelle condition les réels a, b, c et d doivent-ils vérifier pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles ?

Chapitre 6

SECOND DEGRÉ

I POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

1 DÉFINITION

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

EXEMPLES

— La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = 0$ et $c = \sqrt{2}$.

— La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x, $g(x) = 4x^2 + x + 1$ ($a = 4$, $b = 1$ et $c = 1$)

— La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.

2 FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

✳ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$.
Or pour tout réel x, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Soit en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

EXEMPLE

Cherchons la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \times \left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right] \\ &= -2 \times \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1\right] \\ &= -2 \times \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{25}{8}$

II VARIATIONS

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

✳ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Études le cas où $a < 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$)

   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$)

   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

   Ainsi, si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

2. Études le cas où $a > 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$.

   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$.

   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

   Ainsi, si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

On retient :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘	

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	

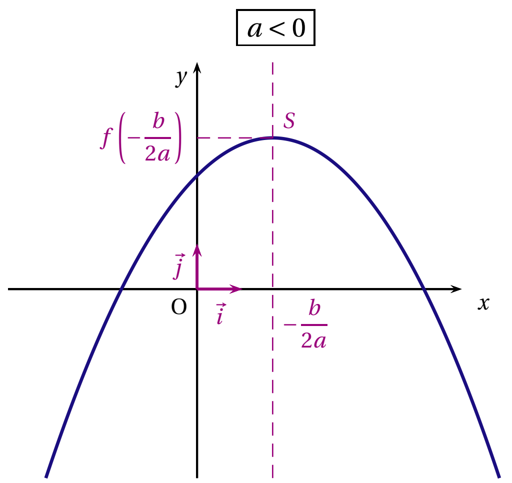
EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Ici $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$. Ainsi, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{3}$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$. Comme $a < 0$, on en déduit le tableau des variations de f :

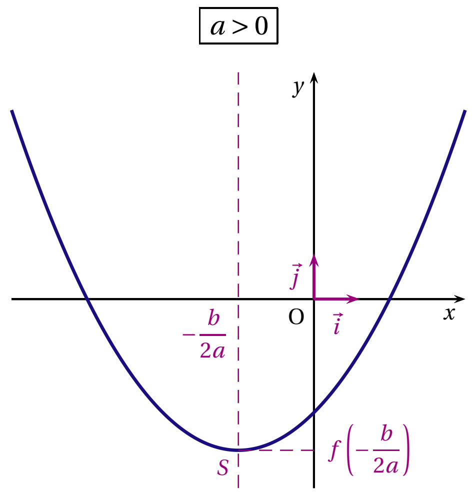
x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$\frac{4}{3}$	↘	

III COURBE REPRÉSENTATIVE

Dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ est une parabole.
On dit que la parabole a pour équation $y=ax^2+bx+c$
Le sommet S de la parabole a pour abscisse $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$. Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$



La parabole est tournée vers le bas



La parabole est tournée vers le haut

SYMÉTRIE DE LA PARABOLE

Pour des raisons de symétrie, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des abscisses x_1 et x_2 de deux points de la parabole ayant même ordonnée : $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=2x^2-6x-5$ où a, b et c sont trois réels.
Déterminons deux points de la courbe représentative de la fonction f ayant la même ordonnée.
Cherchons les solutions de l'équation $f(x)=-5$

$$\begin{aligned}2x^2-6x-5=-5 &\Leftrightarrow 2x^2-6x=0\\ &\Leftrightarrow 2x(x-3)=0\end{aligned}$$

Soit $x=0$ ou $x=3$. Par conséquent, le sommet de la parabole a pour abscisse $\alpha=\dfrac{0+3}{2}=1{,}5$

IV ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

1 RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x^2-x-2=0$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
3x^2-x-2=0 &\Leftrightarrow 3\times\left[x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right]=0\\
&\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}-\frac{2}{3}\right]=0\\
&\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]=0\\
&\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\right]=0\\
&\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)=0 \quad \text{ou} \quad (x-1)=0
\end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions $x_1=-\frac{2}{3}$ ou $x_2=1$. $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-2x^2+3x-2=0$.

   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
-2x^2+3x-4=0 &\Leftrightarrow -2\times\left[x^2-\frac{3}{2}x+1\right]=0\\
&\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+1\right]=0\\
&\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{36}\right]=0
\end{aligned}$$

Or pour tout réel x, $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{36}\geqslant\frac{7}{36}$ donc l'équation n'a pas de solutions. $S=\varnothing$

2 RÉSOUDRE UNE INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-\frac{x^2}{4}-x+3\leqslant 0$.

   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
-\frac{x^2}{4}-x+3 &= -\frac{1}{4}\times\left[x^2+4x-12\right]\\
&=-\frac{1}{4}\left[(x+2)^2-4-12\right]\\
&=-\frac{1}{4}\left[(x+2)^2-16\right]\\
&=-\frac{1}{4}\left[(x+2+4)(x+2-4)\right]\\
&=-\frac{1}{4}(x+6)(x-2)
\end{aligned}$$

Étudions le signe du produit $-\frac{1}{4}(x+6)(x-2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$-\dfrac{1}{4}$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-\dfrac{1}{4}(x+6)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble S des solutions de l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4}-x+3 \leqslant 0$ est $S=\left]-\infty;-6\right] \cup \left[2;+\infty\right[$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{x^2}{2}-x+1 \geqslant 0$

   Pour tout réel x,

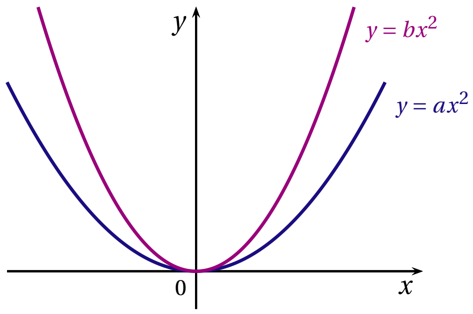
$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2}-x+1 &= \frac{1}{2}\times\left[x^2-2x+2\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[(x-1)^2-1+2\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[(x-1)^2+1\right]
\end{aligned}$$

   Or pour tout réel x, $(x-1)^2+1 \geqslant 1$ d'où $\dfrac{1}{2}\left[(x-1)^2+1\right] \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc l'ensemble solution de l'inéquation $\dfrac{x^2}{2}-x+1 \geqslant 0$ est $S=\mathbb{R}$

EXERCICE 1

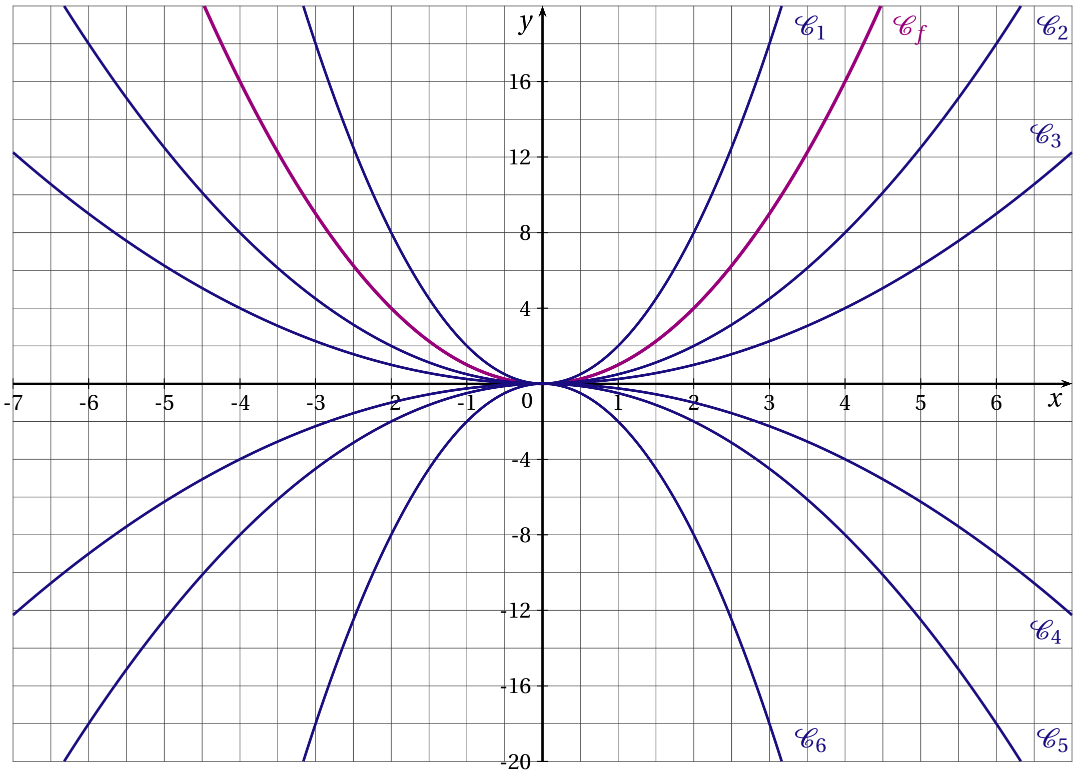
On a tracé ci-contre, les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = ax^2$ et $g(x) = bx^2$ où a et b sont deux réels. Laquelle des quatre propositions suivantes est exacte ?

1. $a > 0$, $b > 0$, $a > b$;
2. $a < 0$, $b < 0$, $a > b$;
3. $a > 0$, $b > 0$, $a < b$;
4. $a < 0$, $b < 0$, $a < b$.



EXERCICE 2

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction carré f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$, dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Les paraboles $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_6$, ont une équation de la forme $y = ax^2$, où a est un réel.



1. Quelle est la courbe représentative de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$?
2. Quelle est la courbe représentative de la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 2x^2$?
3. Déterminer une expression, en fonction de x, de la fonction u dont la courbe représentative est $\mathscr{C}_5$.

EXERCICE 3

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>-2</td><td>↗</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>↗</td><td>1</td><td>↘</td></tr>
</table>

1. Parmi les fonctions polynômes du second degré ci-dessous, quelles sont celles qui ont le même tableau de variation que la fonction f ? le même tableau de variation que la fonction g ?

$A(x) = x^2 + 3x - 2$; $B(x) = -x^2 + 6x - 11$; $C(x) = x^2 - 6x + 7$; $D(x) = -x^2 - 4x + 13$;

$E(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$; $G(x) = x^2 - 4x + 2$; $H(x) = -3x^2 + 12x - 11$.

2. Déterminer deux fonctions polynômes du second degré ayant respectivement le même tableau de variation que les fonctions f et g.

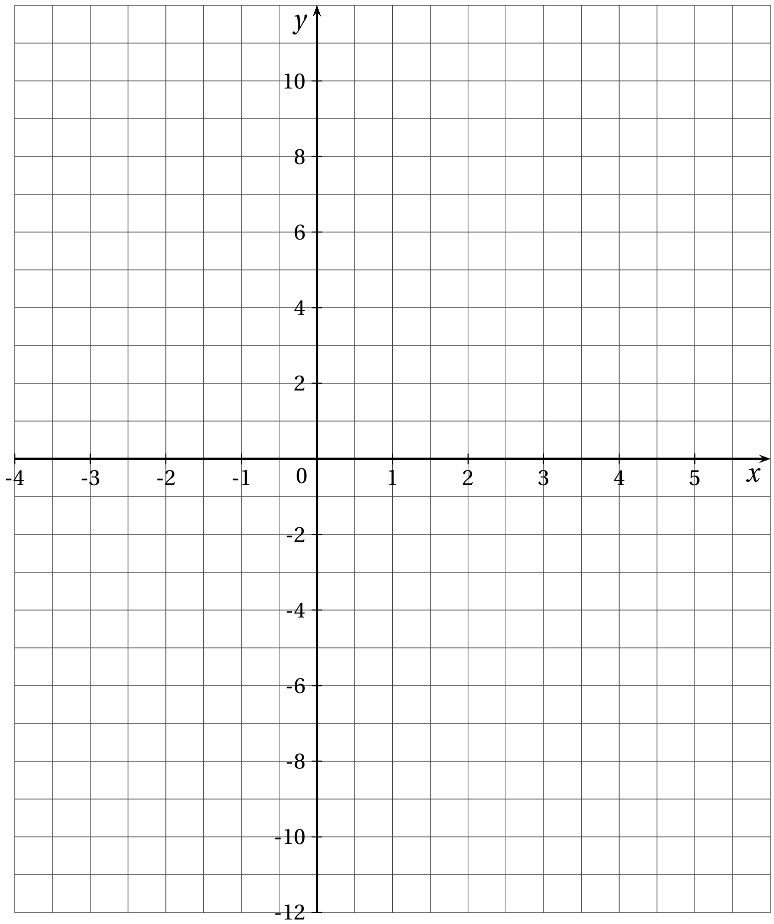
EXERCICE 4

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = -2x^2 + 5x + 7$.

1. Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$								

2. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



3. Par lecture graphique :
   a) Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
   b) Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 4$?
   c) Quels sont les antécédents de -5 et de 7 ?

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.
Le tableau de valeurs de la fonction est :

x	-2	-1	0	1	2	5
$f(x)$	8	2	-2	-4	-4	8

1. L'affirmation « le minimum de la fonction f est égal à -4 » est-elle vraie ?
2. Quel est l'image de 3 ?
3. Résoudre l'équation $f(x) = 2$?

EXERCICE 6

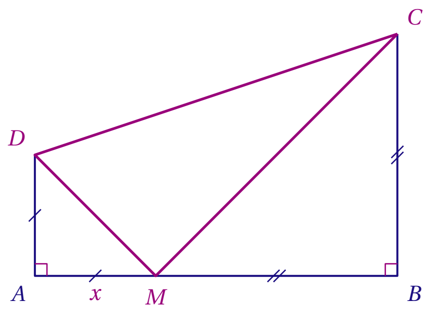
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.
Le tableau de valeurs de la fonction est :

x	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	8	0	-6	-10	-12	-10

1. Pour quelle valeur du réel x le minimum de la fonction f est-il atteint ?
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$?
3. Déterminer le minimum de la fonction f.

EXERCICE 7

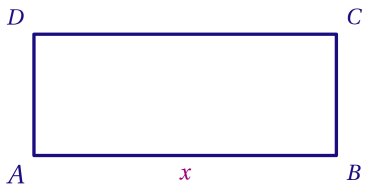
Sur la figure ci-contre, $AB = 6$, M est un point du segment $[AB]$ différent de A et B et les triangles AMD et MBC sont rectangles isocèles.
On cherche à déterminer la distance AM telle que l'aire du triangle MCD soit maximale.
On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire du triangle MCD



1. Exprimer en fonction de x les aires des triangles AMD et MBC. En déduire que $f(x) = -x^2 + 6x$
2. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. En déduire la valeur de x telle que l'aire du triangle MCD soit maximale. Quel est alors l'aire maximale du du triangle MCD ?

EXERCICE 8

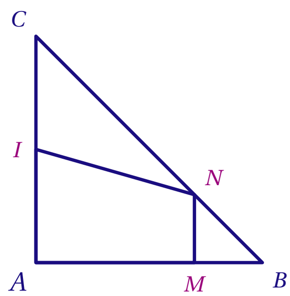
$ABCD$ est un rectangle de périmètre 32.
Quelle est l'aire maximale du rectangle $ABCD$?



EXERCICE 9

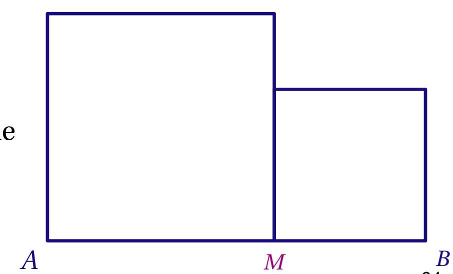
ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $AB = 10$. I est le milieu du segment $[AC]$.

Où faut-il placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du trapèze $AMNI$ soit maximale ?



EXERCICE 10

M est un point du segment $[AB]$ de longueur 12.
À quelle distance du point A faut-il placer le point M pour que la somme des aires des carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$ soit minimale ?



EXERCICE 11

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-\frac{3}{4}x+2$ et le point A de coordonnées $(-2;-4)$.
Le but de cet exercice est de déterminer la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

1. Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$ d'abscisse a.
   a) Exprimer en fonction de a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
   b) Montrer que $AM^2=\frac{25}{16}a^2-5a+40$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel a par $f(a)=\frac{25}{16}a^2-5a+40$.
   a) Donner le tableau de variation de la fonction f.
   b) En déduire la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

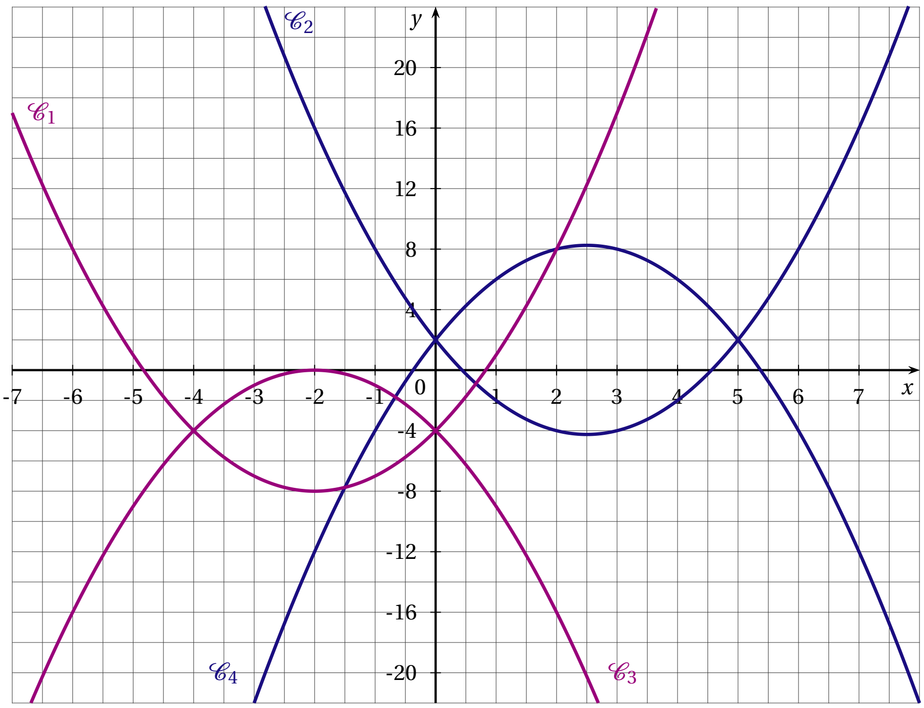
EXERCICE 12

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $x^2=x+1$.
   b) $x^2-\frac{x}{4}-\frac{3}{4}=0$
   c) $-2x^2-5x+3=0$
   d) $\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{1}{6}=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   a) $x^2-5x+6\leqslant 0$.
   b) $-2x^2+3x\leqslant 5$
   c) $3x^2+3x\geqslant\frac{9}{4}$
   d) $x-1\geqslant\frac{x^2}{3}$

EXERCICE 13

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+4x-4$ et $g(x)=-x^2+5x+2$.

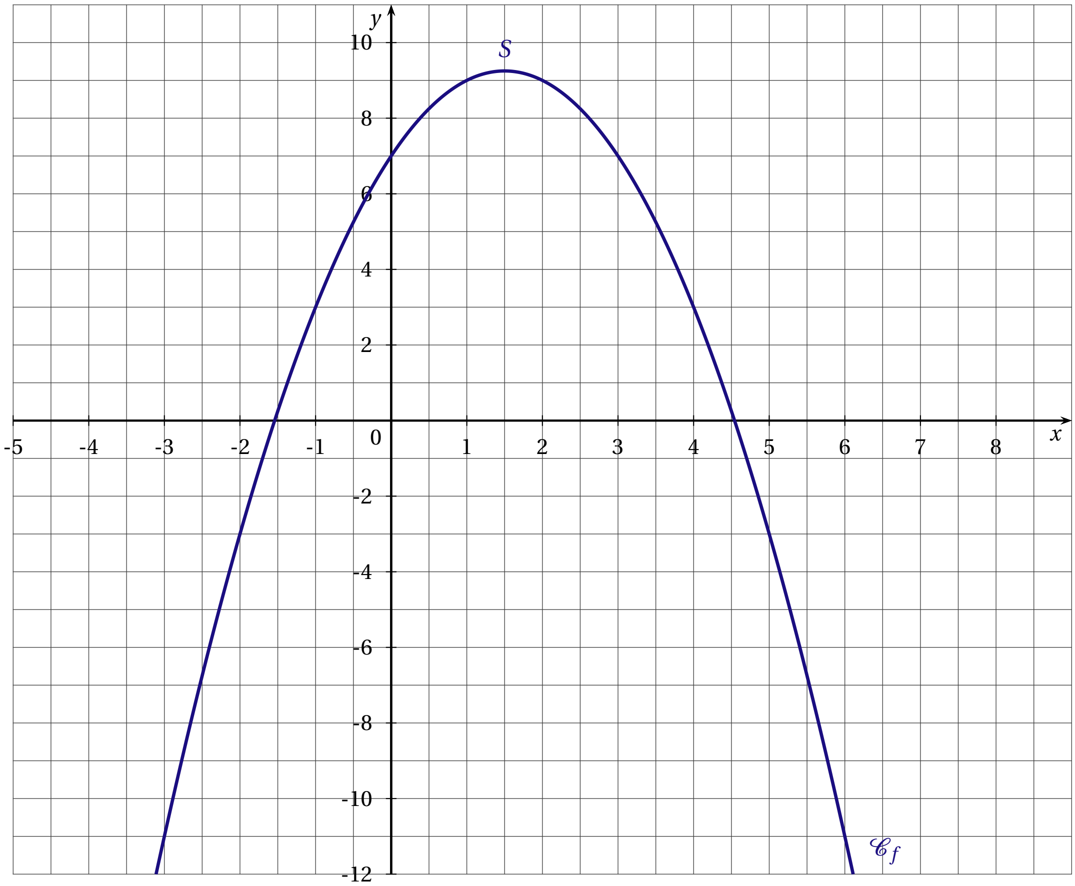
1. Parmi les courbes tracées ci-dessous, déterminer celle qui représente la fonction f et celle qui représente la fonction g. (*Justifier*)



2. Factoriser $f(x)-g(x)$.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g.

EXERCICE 14

La parabole $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 7$.



1. Calculer les coordonnées du point S sommet de la parabole $\mathscr{C}_f$.
2. a) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant -3$.
   b) Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geqslant -3$.
3. a) Par lecture graphique, quelles semblent être les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   c) Que peut-on conclure ?
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
5. Soit g la fonction affine définie par $g(x) = 2x - 5$.
   a) Tracer la droite D représentative de la fonction g.
   b) Étudier le signe de $g(x) - f(x)$.
   c) En déduire les positions relatives de la parabole C_f et de la droite D.

EXERCICE 15

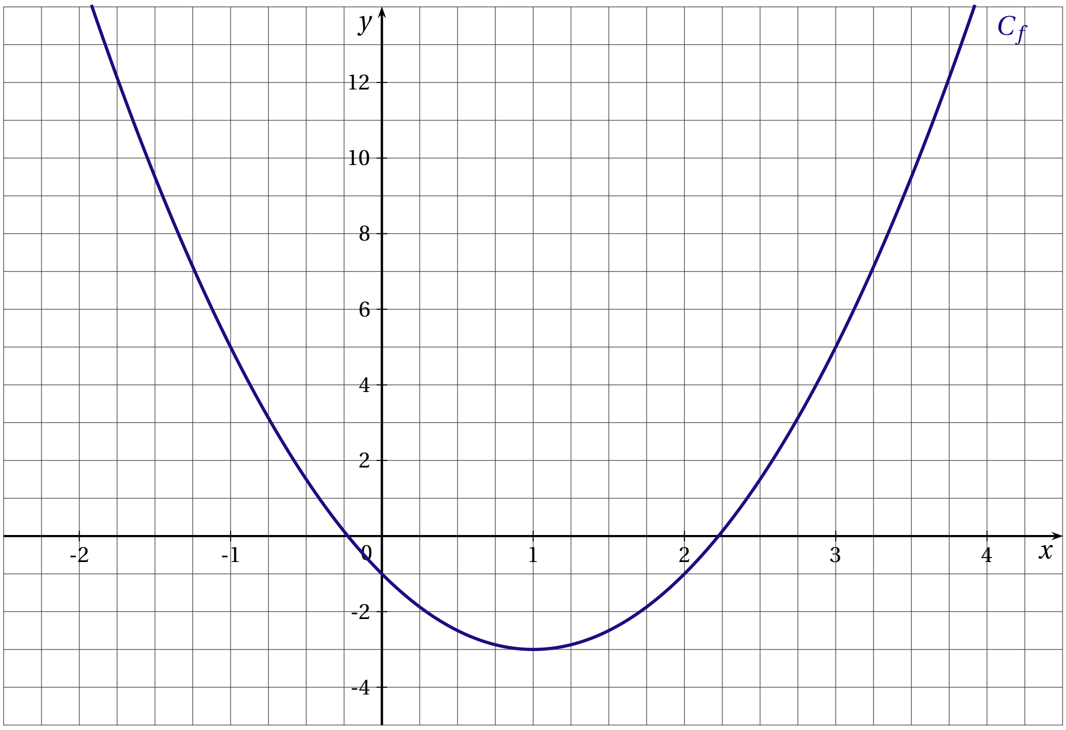
f est une fonction polynôme du second degré telle que sa courbe représentative est une parabole de sommet $S\left(\frac{3}{2}; -\frac{25}{4}\right)$ passant par le point $A(1; -6)$.

1. Donner le tableau des variations de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie sur pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. La courbe représentative de la fonction f, notée C_f, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. a) Le point $A(-1;5)$ appartient-il à la courbe C_f ?
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
   c) La proposition « Si $0 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$ » est-elle vraie ou fausse ?
2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = 8$ et $g(3) = -4$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné ci-dessous.
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2 \times \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
   c) En déduire les positions relatives de la parabole C_f et de la droite D.



EXERCICE 17

g est la fonction affine telle que $g(-1) = 5$ et $g(2) = -4$. On note $\mathscr{D}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x.
2. Soient f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
   a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$
   b) Étudier les positions relatives de la parabole $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Chapitre 7

DROITES DANS LE PLAN

I INTRODUCTION

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on cherche à établir une relation entre les coordonnées $(x;y)$ des points du plan appartenant à une droite $\mathscr{D}$.

EXEMPLE 1

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-2;3)$ et $B(1;-2)$.

$M(x;y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
Soit :

$$\begin{aligned}M\in(AB) &\iff 3(y-3)-(-5)(x+2)=0\\ &\iff 3y-9+5x+10=0\\ &\iff 3y+5x+1=0\\ &\iff y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'équation $3y+5x+1=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).
L'équation $y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$ est l'équation réduite de la droite (AB).
La droite (AB) est la courbe représentative d'une fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x)=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$.

EXEMPLE 2

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-3;-1)$ et $B(-3;4)$.

$M(x;y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y+1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
Soit :

$$\begin{aligned}M\in(AB) &\iff 0\times(y+1)-5(x+3)=0\\ &\iff -5x-15=0\\ &\iff x=-3\end{aligned}$$

L'équation $-5x-15=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).
L'équation $x=3$ est l'équation réduite de la droite (AB).
La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées, ce n'est pas la courbe représentative d'une fonction.

II ÉQUATIONS D'UNE DROITE

1 PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux points distincts du plan. M est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

2 ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE

THÉORÈME

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, toute droite $\mathscr{D}$ a une équation soit de la forme $x=c$ soit de la forme $y=mx+p$

✳ DÉMONSTRATION

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts du plan.

La droite (AB) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Soit :

$$\begin{aligned} M\in(AB) &\iff (x_B-x_A)\left(y-y_A\right)-\left(y_B-y_A\right)(x-x_A)=0\\ &\iff (x_B-x_A)\left(y-y_A\right)=\left(y_B-y_A\right)(x-x_A) \qquad (1)\end{aligned}$$

— Si la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées :
les points A et B ont la même abscisse $x_A=x_B=c$ d'où, $x_B-x_A=0$. L'équation (1) s'écrit alors :

$$\left(y_B-y_A\right)(x-c)=0 \iff x=c$$

— Si la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
les points A et B n'ont pas la même abscisse d'où, $x_B-x_A\neq 0$. L'équation (1) s'écrit alors :

$$\left(y-y_A\right)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A) \iff y=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)+y_A$$

Soit en posant $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, la droite (AB) a une équation de la forme $y=mx+p$.

THÉORÈME RÉCIPROQUE

L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $x=c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $y=mx+p$ est une droite coupant l'axe des ordonnées au point P de coordonnées $(0;p)$.

✼ DÉMONSTRATION

— Le cas de l'équation $x=c$ est trivial : l'équation $x=c$ caractérise l'ensemble des points du plan qui ont la même abscisse.

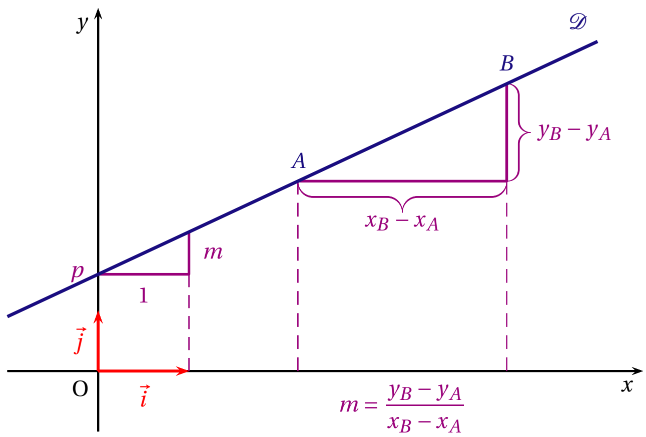
— Cas de l'équation $y=mx+p$
$A(0;p)$ et $B(1;m+p)$ sont deux points distincts de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $y=mx+p$.

Pour tout point $M\left(x;mx+p\right)$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\mx+p-p\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\mx\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\mx\end{pmatrix}$ sont colinéaires par conséquent, M est un point de la droite (AB).

REMARQUES

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=mx+p$:

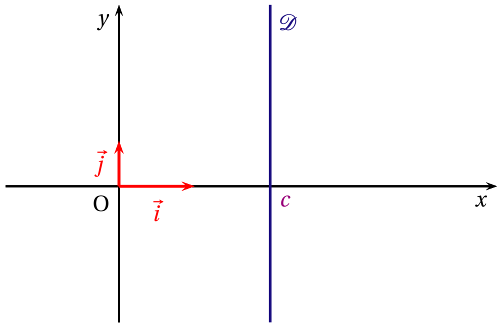


— Le nombre réel m est le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$;

— Le nombre réel p est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$;

— Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = c$:



— La droite $\mathscr{D}$ n'a pas de coefficient directeur ;

— $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

3 DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE DROITE

Équation de la droite passant par deux points $A\left(x_A; y_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B\right)$.

1. Première méthode

Soit $M(x; y)$ un point de la droite (AB). On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$; on écrit alors la condition de colinéarité

$$XY' - X'Y = 0$$

EXEMPLE

Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(-2; 4)$ et $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

$M(x; y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Soit

$$\begin{aligned}3(y-4) + \frac{9}{2}(x+2) = 0 &\iff 3y - 12 + \frac{9}{2}x + 9 = 0\\ &\iff y = -\frac{3}{2}x + 1\end{aligned}$$

Ainsi, la droite (AB) a pour équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$.

2. Seconde méthode

On distingue deux cas :

a) Si les points A et B ont la même abscisse, $x_A = x_B = c$ alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = c$.

b) Si les points A et B n'ont pas la même abscisse, $x_A \neq x_B$.
On calcule le coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ puis, on on détermine l'ordonnée à l'origine à l'aide des coordonnées du point A :

$$y = m\left(x - x_A\right) + y_A$$

EXEMPLE

Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(3;1)$ et $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{4}{3}\right)$.

Les points A et B n'ont pas la même abscisse donc la droite $\mathscr{D}$ admet une équation de la forme $y = mx+p$ avec

$$m = \frac{-\frac{4}{3}-1}{-\frac{1}{2}-3} = \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{7}{2}} = \frac{2}{3}$$

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = \frac{2}{3}x+p$. Comme le point $A(3;1)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite d'où

$$\frac{2}{3}\times 3+p=1 \iff p=1$$

Ainsi, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y=\frac{2}{3}x+1$.

III DROITES PARALLÈLES, DROITES SÉCANTES

1 DROITES PARALLÈLES

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx+p$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y=m'x+p'$ sont parallèles si, et seulement si, $m=m'$.

DÉMONSTRATION

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$:

$$\mathscr{D} \mathbin{//} \mathscr{D}' \iff \vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires } \iff 1\times m'-1\times m=0 \iff m=m'$$

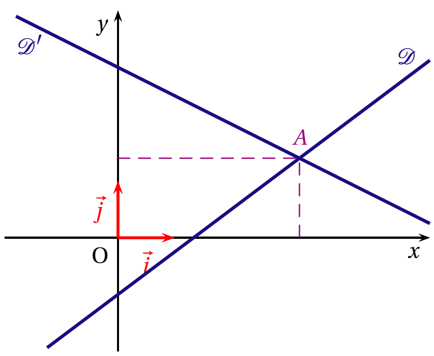
REMARQUE

Les droites d'équations $x=c$ et $x=c'$ étant parallèles à l'axe des ordonnées, sont parallèles.

2 COORDONNÉES DU POINT D'INTERSECTION DE DEUX DROITES SÉCANTES

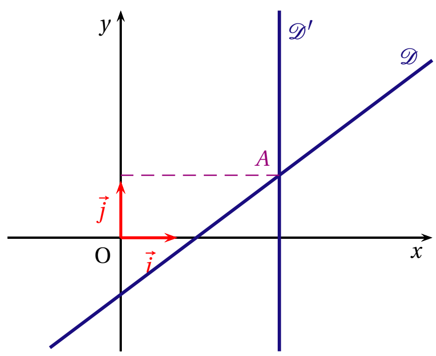
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=mx+p$ et la droite $\mathscr{D}'$ dont l'équation est soit $y=m'x+p'$ avec $m\neq m'$ soit $x=c$.

Déterminer les coordonnées $(x_A;y_A)$ du point d'intersection A de deux droites sécantes c'est résoudre un système d'équations linéaires, formé des équations de chacune des deux droites :



$$\begin{cases} y=mx+p \\ y=m'x+p' \end{cases}$$

ou



$$\begin{cases} x=c \\ y=mx+p \end{cases}$$

EXEMPLE

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations respectives $y=-\dfrac{2}{3}x+3$ et $y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{3}{4}$
Le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$ est égal à $-\dfrac{2}{3}$ et celui de la droite $\mathscr{D}'$ est égal à $\dfrac{5}{6}$.
Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont des coefficients directeurs différents donc les deux droites sont sécantes.
Les coordonnées $(x_A; y_A)$ du point d'intersection A des deux droites correspondent au couple solution du système :

$$\begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+3 \\ y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+3 \\ -\dfrac{2}{3}x+3=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{3}{4} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+3 \\ -\dfrac{3}{2}x=-\dfrac{15}{4} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{2}+3=\dfrac{4}{3} \\ x=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Le point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{4}{3}\right)$.

IV SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

1 DÉFINITION

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est la donnée de deux équations de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y c'est trouver tous les couples $(x;y)$ vérifiant les deux équations.

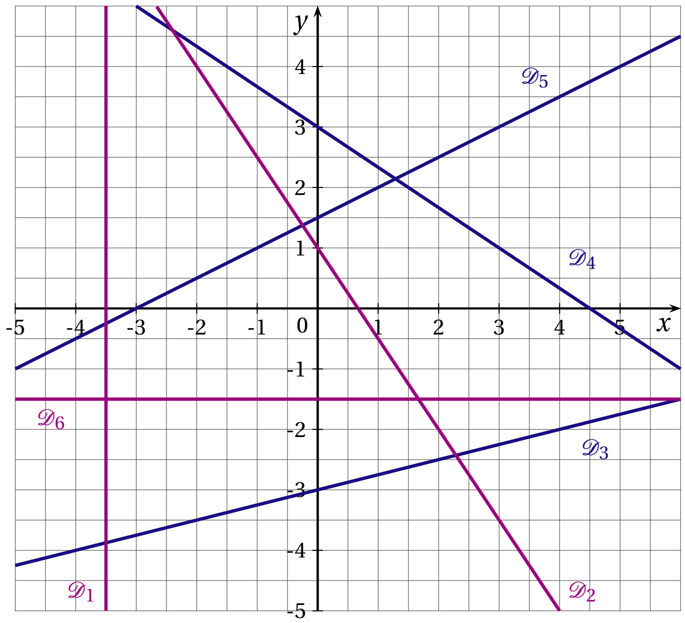
EXEMPLE

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-2y &=& -4 \\ 2x+6y &=& 1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y=-4 \\ 2x+6y=1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 3x-2y=-4 \\ 11x=-11 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow 3\times L_1+L_2 \end{array}\right.$$
$$\iff \begin{cases} 3x-2y=-4 \\ x=-1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

EXERCICE 1

Par lecture graphique, déterminer une équation réduite chacune des six droites.



EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$.

1. La droite $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur 0,5 et passe par le point $A(-4;1)$.
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour ordonnée à l'origine $-1{,}5$ et passe par le point $A(1;-2)$.
3. La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et passe par le point $B(-1;-2)$.
4. La droite $\mathscr{D}$ passe par les points $A(2;-1)$ et $B(-1;0)$.
5. La droite $\mathscr{D}$ passe par les points $A(-5;-4)$ et $B(-5;5)$.
6. La droite $\mathscr{D}$ passe par le point $A(-3;2)$ et est parallèle à la droite d d'équation $y=-\dfrac{2}{3}x+1$.

EXERCICE 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-3x+2$ et le point $A(-5;7)$.
On veut déterminer la distance d du point A à la droite $\mathscr{D}$.

1. a) Soit $M(x;y)$ un point de la droite $\mathscr{D}$. Exprimer AM^2 en fonction de x.
   b) Calculer la valeur de x pour laquelle la distance AM^2 est minimale.
   En déduire la distance d du point A à la droite $\mathscr{D}$.
2. Donner les coordonnées du point M pour lesquelles la distance AM est minimale.

EXERCICE 4

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne les points $A(-3;-1)$, $B(3;3)$ et $C(-5;7)$.

1. Déterminer une équation de la médiane (AM).
2. Calculer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne les points $A(-3;4)$, $B(6;1)$ et $C(-3;-2)$.

1. On note d la médiatrice du segment $[BC]$
   a) Soit $M(x;y)$ un point de la droite d. Exprimer MB^2 et MC^2 en fonction de x et y.
   b) Déterminer une équation de la médiatrice d du segment $[BC]$.
2. Déterminer une équation de la médiatrice Δ du segment $[AC]$.
3. Calculer les coordonnées du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

EXERCICE 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne les points $A(6;5)$, $B(-1;6)$ et $C(2;-3)$.

1. a) Déterminer une équation de la médiatrice d du segment $[BC]$.
   b) En déduire une équation de la hauteur (AK) du triangle ABC.
2. Déterminer une équation de la hauteur BL du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE 7

Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$un repère orthonormé du plan.

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $E\,(4;-2)$ et admettant pour coefficient directeur (-2)
   a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$.
   b) Le point $F\,(2;-1)$ est-il un point de la droite $\mathscr{D}$?
2. On considère les points $A\,(-4;9)$ et $B\,(2;12)$
   a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   b) Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont elles parallèles ?
3. Résoudre le système $S:\left\{\begin{array}{lll} y & = & -2x+6 \\ y & = & 0{,}5x+11 \end{array}\right.$. Interpréter graphiquement le résultat.
4. On admettra maintenant que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes en $H(-2:10)$.
   Démontrer que le triangle BHE est rectangle en H.

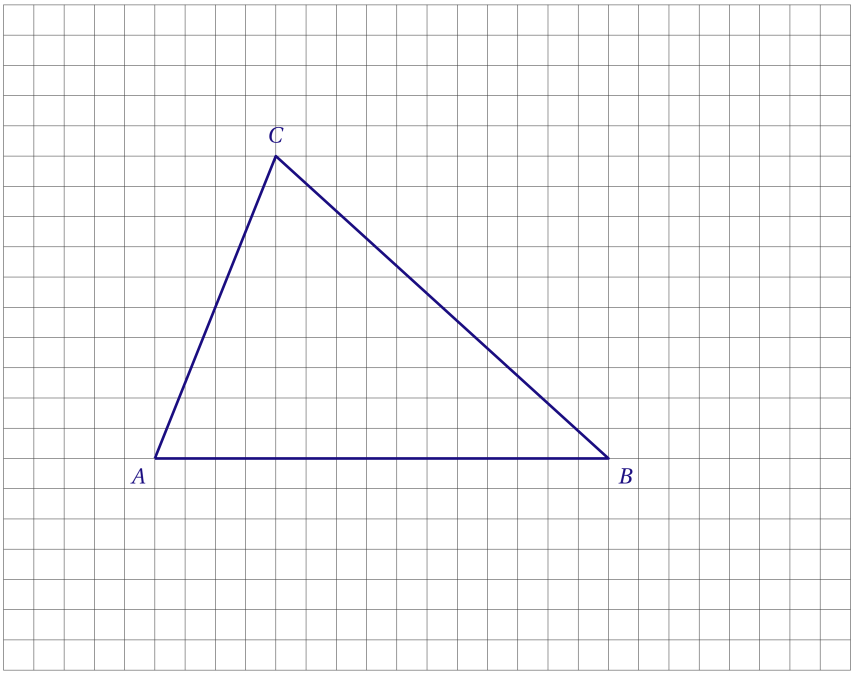
EXERCICE 8

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, placer les points $A(-5;3)$, $B(3;7)$ et $C(-2;-8)$.
La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.

1. Centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Soit $M(x;y)$ un point de la droite $\mathscr{D}$ médiatrice du segment $[AB]$.
      i. Exprimer MA^2 et MB^2 en fonction de x et y.
      ii. En déduire une équation de la médiatrice $\mathscr{D}$ du segment $[AB]$.
   b) La médiatrice d du segment $[BC]$ a pour équation $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$. Tracer la droite d dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   c) Calculer les coordonnées du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Orthocentre du triangle ABC.
   a) Déterminer une équation de la hauteur (AA') du triangle ABC.
   b) Déterminer une équation de la hauteur (CC') du triangle ABC.
   c) Calculer les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC.
3. a) Calculer les coordonnées du point G tel que $3\overrightarrow{\Omega G}=\overrightarrow{\Omega H}$.
   b) Soit I le milieu du segment $[AB]$. Le point G appartient-il à la médiane (CI) ?

EXERCICE 9

ABC est un triangle. Les points A', B' et C' sont définis par : $\overrightarrow{A'C} = 6\overrightarrow{A'B}$; $\overrightarrow{B'A} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{B'C}$ et $\overrightarrow{C'B} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'A}$.



1. Sur la figure ci-dessus, placer les points A', B' et C'.
2. On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
   a) Déterminer les coordonnées des points A, B et C ainsi que celles des points A', B' et C'.
   b) Déterminer une équation des droites (BB') et (CC').
   En déduire les coordonnées du point K, intersection des droites (BB') et (CC')
   c) Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont-elles concourantes ?

EXERCICE 10

Un capital de 10 000 € a perdu 6% de sa valeur au bout d'un an.
Ce capital avait été placé de la manière suivante :

— une partie x a été placée sur un compte d'épargne qui rapporte 5% d'intérêts par an ;

— le reste du capital noté y a été placé en bourse. Un an plus tard, le portefeuille boursier a perdu 20% de sa valeur.

Calculer le montant en euros de chacune des deux sommes x et y.

EXERCICE 11

Un assembleur commande deux types de composants électroniques.

— Le composant A est vendu par lot de 30 au prix de 2 550€ le lot.

— Le composant B est vendu par lot de 40 au prix de 1 400€ le lot.

L'assembleur a commandé au total 720 composants pour un montant global de 37 200 €, déterminer le nombre de lots de chacun des composants.

EXERCICE 12

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
La parabole $\mathscr{P}$ passe par le point $A(0; -3)$ et coupe la droite d d'équation $y = -2x + 3$ en deux points d'abscisses respectives -1 et 2.
Déterminer l'équation de la parabole $\mathscr{P}$.

Chapitre 8

STATISTIQUES

Les premières études statistiques étaient des recensements démographiques : on en a conservé le vocabulaire.

Population : C'est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique.

Individu : C'est un élément de la population.

Caractère : C'est l'aspect que l'on observe sur les individus. Un caractère permet de déterminer une partition de la population selon ses diverses valeurs (par exemple le genre est un caractère à deux modalités : masculin ou féminin).

Lorsque les différentes valeurs d'un caractère sont des nombres, le caractère est *quantitatif.* Dans le cas contraire, le caractère est *qualitatif.*

I EFFECTIFS - FRÉQUENCES

1 EFFECTIFS ET FRÉQUENCES

L'effectif d'une valeur du caractère étudié est le nombre d'individus de la population ayant cette valeur.
La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total de la population.
(la fréquence peut être exprimée en pourcentage)

$$\text{féquence} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$$

2 EFFECTIFS CUMULÉS ET FRÉQUENCES CUMULÉES

On étudie un caractère quantitatif dans une population.

— Les différentes valeurs x_i du caractère quantitatif constituent une série statistique notée (x_i).

— On note n_i l'effectif de la valeur x_i.

L'effectif cumulé croissant de la valeur x_i est la somme des effectifs de toutes les valeurs inférieures ou égales à x_i.
La fréquence cumulée croissante de la valeur x_i est la somme des fréquences de toutes les valeurs inférieures ou égales à x_i.

EXEMPLE

Dans un service de maintenance, on a répertorié le nombre d'interventions par jour sur un mois. On a obtenu la distribution suivante :

Nombre d'interventions x_i	3	5	6	7	8	9
Nombre de jours n_i	2	4	9	6	3	1

Le nombre total de journées d'intervention est $2+4+9+6+3+1=25$. Les fréquences des différentes valeurs du nombre d'intervention sont :

Nombre d'interventions x_i	3	5	6	7	8	9
Nombre de jours n_i	2	4	9	6	3	1
Fréquence $f_i = \dfrac{n_i}{25}$	0,08	0,16	0,36	0,24	0,12	0,04

Le tableau suivant donne les effectifs cumulés croissants ainsi que les fréquences cumulées croissantes :

Nombre d'interventions x_i	3	5	6	7	8	9
Nombre de jours n_i	2	4	9	6	3	1
Effectif cumulé	2	6	15	21	24	25
Fréquence cumulée	0,08	0,24	0,6	0,84	0,96	1

II CARACTÉRISTIQUES D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

1 CARACTÉRISTIQUES DE POSITION

LA MOYENNE

On considère la série statistique donnée par le tableau ci-contre.
On note $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ l'effectif total

Valeur x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_p

La moyenne d'une série statistique est le quotient noté $\overline{x}$ de la somme de toutes les valeurs de cette série par l'effectif total.

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$$

REMARQUE

Soit $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ la fréquence de la valeur x_i alors, la moyenne $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_px_p$.

EXEMPLE

Avec la série statistique précédente :

Nombre d'interventions x_i	3	5	6	7	8	9
Nombre de jours n_i	2	4	9	6	3	1
Fréquence f_i	0,08	0,16	0,36	0,24	0,12	0,04

Le nombre moyen d'interventions par jour est :

$$\overline{x} = \frac{2\times3+4\times5+9\times6+6\times7+3\times8+1\times9}{25} = 6{,}2$$

ou en utilisant les fréquences :

$$\overline{x} = 0{,}08\times3+0{,}16\times5+0{,}36\times6+0{,}24\times7+0{,}12\times8+0{,}04\times9 = 6{,}2$$

LA MÉDIANE

La médiane d'une série statistique est une valeur telle qu'il y ait autant d'observations ayant une valeur supérieure à la médiane que d'observations ayant une valeur inférieure à la médiane.

La médiane d'une série statistique de N valeurs rangées par ordre croissant est le nombre M_e défini par :

— si l'effectif N est impair, la médiane M_e est la valeur centrale du caractère c'est à dire la valeur de rang $\dfrac{N+1}{2}$ de la série ordonnée.

— si l'effectif N est pair, la médiane M_e est la demi-somme des deux valeurs centrales du caractère c'est à dire la moyenne des valeurs de rangs $\dfrac{N}{2}$ et $\dfrac{N}{2}+1$ de la série ordonnée.

EXEMPLE

Dans la série précédente, l'effectif total $N = 25$ donc la médiane est la valeur du caractère de rang 13 soit $Me = 6$.

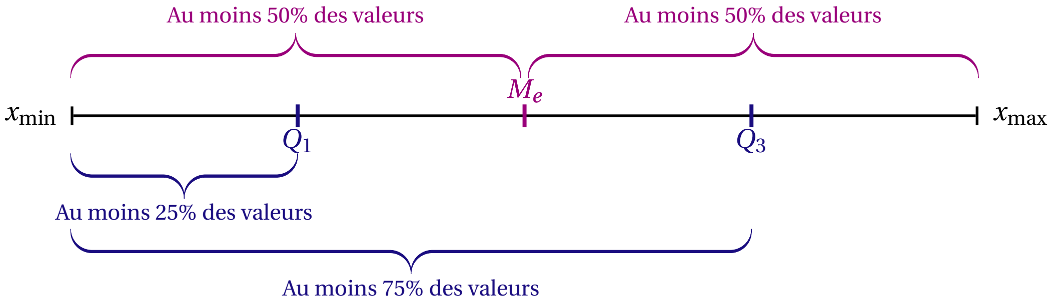
LES QUANTILES

1. LES QUARTILES

Les quartiles au nombre de trois Q_1, Q_2 et Q_3 partagent l'ensemble étudié de N éléments préalablement classés par valeurs croissantes, en quatre sous ensembles.

— Le premier quartile noté Q_1 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 25 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_1.

— Le troisième quartile noté Q_3 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 75 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_3.



2. LES DÉCILES

Les déciles au nombre de neuf $D_1, D_2, \ldots, D_9$ partagent l'ensemble étudié de N éléments préalablement classés par valeurs croissantes, en dix sous ensembles.

— Le premier décile noté D_1 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 10 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_1.

— Le neuvième décile noté D_9 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 90 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_9.

REMARQUE

Le deuxième quartile Q_2 et le cinquième décile D_5 sont égaux à la médiane.

VOCABULAIRE

La moyenne, la médiane, les quantiles sont appelés caractéristiques de position d'une série statistique.

2 CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION

— L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur d'une série statistique.

— L'écart interquartile est égal à la différence entre le troisième et le premier quartiles.

— L'écart interdécile est égal à la différence entre le neuvième et le premier déciles.

3 BOÎTES À MOUSTACHES

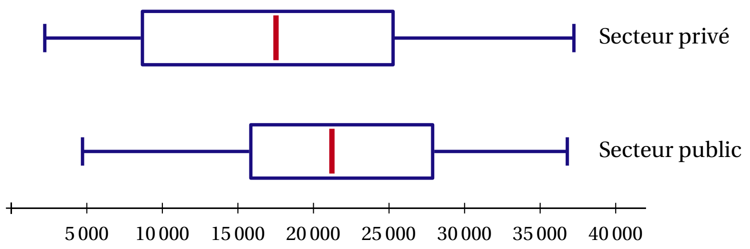
La représentation graphique de la dispersion d'une série statistique se fait à l'aide de diagramme en boîte appelés aussi « boîte à moustaches » ou « box-plot ».
Pour une catégorie donnée, on construit, en face d'un axe permettant de repérer les quantiles de la variable étudiée, un rectangle dont la longueur est égale à l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$, la médiane est représentée par un trait. On ajoute alors des segments aux extrémités menant jusqu'aux valeurs extrêmes, ou jusqu'aux premier et neuvième déciles.

EXEMPLE

Le tableau suivant donne la distribution du revenu salarial par secteur d'activité en France en 2014.

	D1	Q1	Médiane	Q3	D9
Secteur privé	2 218	8 570	17 520	25 377	37 234
Secteur public	4 716	15 744	21 221	27 996	36 797

Source : INSEE



III TEST STATISTIQUE

On considère une population d'effectif N, très grand, dans laquelle on connaît la proportion p des individus présentant un certain caractère.

1 ÉCHANTILLONNAGE

ÉCHANTILLON

Une urne contient des boules blanches et des boules noires en proportion p.
On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans le sac.
En répétant n fois ce procédé, on constitue un échantillon aléatoire de taille n de la population des boules de l'urne.

Un échantillon de taille n est constitué de n éléments pris au hasard dans la population dont l'effectif N est suffisamment grand par rapport à l'effectif n de l'échantillon pour considérer que le tirage des éléments de l'échantillon s'effectue avec remise.

FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE

Si on prélève plusieurs échantillons d'effectif n, où $n \geqslant 30$, dans la même population, on constate que la fréquence du caractère observé fluctue autour de la proportion p du caractère. Ce phénomène dû au hasard dans la constitution des échantillons est appelé *fluctuation d'échantillonnage*.

2 INTERVALLE DE FLUCTUATION

On prélève un échantillon dans la population et on note f la fréquence d'apparition du caractère observé dans cet échantillon.

INTERVALLE DE FLUCTUATION AU SEUIL DE 95%

Un intervalle de fluctuation de la fréquence f au seuil de 95% relatif aux échantillons de taille n est un intervalle I tel que, pour au moins 95% de l'ensemble des échantillons possibles, la fréquence observée appartient à I.

PROPRIÉTÉ

Pour une proportion p comprise entre 0,2 et 0,8, et des échantillons de taille $n \geqslant 25$, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence f observée.

PRISE DE DÉCISION

Selon la situation étudiée, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% peut permettre :

— de décider si l'échantillon est représentatif de l'ensemble de la population;

— d'accepter ou pas l'hypothèse que la proportion d'individus présentant le caractère étudié est égale à p.

EXEMPLE

En première partie de soirée une nouvelle série a attiré près de 5,7 millions de téléspectateurs soit 28% de part d'audience.
Pour estimer le degré de satisfaction de cette série auprès du public, on réalise une enquête auprès de 300 personnes. On constate que 96 personnes sur les 300 personnes interrogées ont regardé cette série.
Ce sondage remet-il en question la part d'audience de 28% de cette série?

1. La fréquence observée de la part d'audience de la série dans l'échantillon de taille 300 est :
$$f = \frac{96}{300} = 0{,}32$$
2. On a ici $p = 0{,}28$ et $n = 300$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la part d'audience de la série dans les échantillons de taille 300 est :
$$I = \left[0{,}28 - \frac{1}{\sqrt{300}} ; 0{,}28 + \frac{1}{\sqrt{300}}\right]$$
Soit avec des valeurs approchées à 10^{-2} près des bornes de l'intervalle, un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la part d'audience de la série est $I = [0{,}22;0{,}34]$
3. Comme $f = 0{,}32$ appartient à l'intervalle de fluctuation $I = [0{,}22;0{,}34]$, on accepte l'hypothèse selon laquelle la part d'audience de la série est de 28%.

EXERCICE 1

Pour les trois séries statistiques ci dessous, la médiane est égale à 10. Compléter le tableau ci-dessous par des données pour chacune des séries sachant que :

— La moyenne de la série 1 est égale à 10.
— La moyenne de la série 2 est la plus petite possible.
— La moyenne de la série 3 est la plus grande possible.

indice i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Série 1	5									18
Série 2	5									18
Série 3	5									18

EXERCICE 2

Dans une entreprise, il y a 28 cadres et 92 ouvriers. Le salaire moyen des cadres est de 3 450 € et celui des ouvriers est de 1 320 €.

1. Calculer le salaire moyen de l'ensemble des salariés de cette entreprise.
2. a) Quel est le pourcentage d'augmentation du salaire moyen si on verse une prime de 35 € à chaque salarié ?
   b) On augmente le salaire de chaque cadre de 2 % et celui de chaque ouvrier de 4 %.
   Le salaire moyen dans l'entreprise a-t-il augmenté de 3% ?

EXERCICE 3

Un concours est organisé dans deux centres d'examens. Dans le premier centre, les garçons ont obtenu 13 de moyenne et les filles 12 de moyenne. Dans le second centre, les garçons ont obtenu 9 de moyenne et les filles 8 de moyenne.
Le président du jury en déduit que les garçons ont eu de meilleurs résultats que les filles Est-ce si sûr ?
Sachant qu'il y avait 58 garçons et 104 filles dans le premier centre, et 87 garçons et 32 filles dans le second centre, calculer la moyenne générale des garçons puis celle des filles. Conclure.

EXERCICE 4

PARTIE A

Le tableau suivant donne la distribution des salaires mensuels nets, en euros, en France en 2015.

Déciles	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
Hommes	1 262	1 427	1 573	1 728	1 906	2 130	2 451	2 996	3 990
Femmes	1 171	1 288	1 396	1 512	1 650	1 830	2 073	2 432	3 149
Ensemble	1 213	1 357	1 490	1 630	1 797	2 004	2 286	2 752	3 646

Souce : Insee Première (*octobre 2017)*

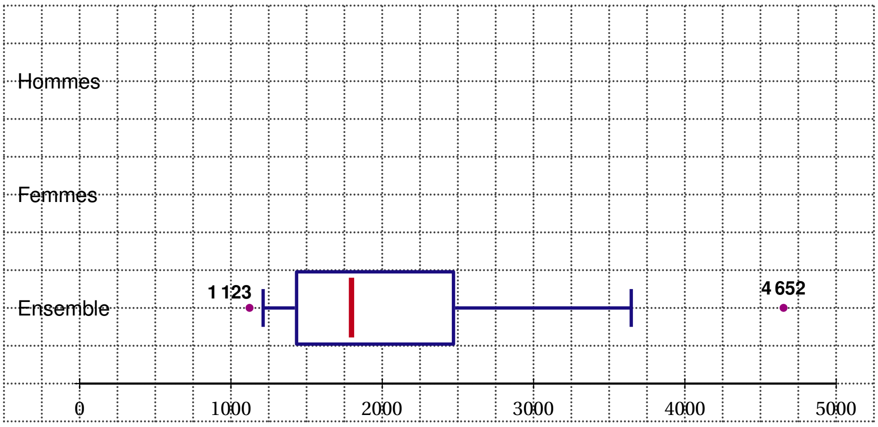
1. a) Donner le salaire net médian des salariés hommes et des salariées femmes.
   b) Calculer les variations en pourcentage des déciles des femmes par rapport à ceux des hommes

Déciles	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
Hommes	1 262	1 427	1 573	1 728	1 906	2 130	2 451	2 996	3 990
Femmes	1 171	1 288	1 396	1 512	1 650	1 830	2 073	2 432	3 149
Écarts en %	−7,2								

   c) Recopier et compléter la phrase :
   « Les écarts de salaire entre femmes par rapport aux hommes ... le long de l'échelle salariale : de −7,2% pour le 1er décile à ... pour le 9e décile. »

2. Le montant en euros du premier quartile est de 1 488 euros pour les salariés hommes et de 1 332 euros pour les salariées femmes. Le troisième quartile est de 2 678 euros pour les hommes et de 2 208 euros pour les femmes.

   La distribution des salaires mensuels nets de l'ensemble des salariés est représentée ci-dessous (centiles C5 à C95).



   a) Donner une interprétation du nombre 4 652.

   b) Sur le même graphique, représenter la distribution des salaires nets des hommes et des femmes.

PARTIE B

Le tableau ci-dessous donne le montant en euros du salaire mensuel moyen net selon les catégories socioprofessionnelles en France en 2015.

	Hommes		Femmes	
	Salaires nets (en euros)	Effectifs (en %)	Salaires nets (en euros)	Effectifs (en %)
Cadres	4 451	20,6	3 561	15,6
Professions intermédiaires	2 420	18,9	2 081	20,8
Employés	1 739	16,2	1 591	50,8
Ouvriers	1 765	44,3	1 483	12,8

Souce : Insee Première (*octobre 2017)*

1. a) Calculer le salaire moyen des hommes et celui des femmes.

   b) Recopier et compléter la phrase :

   « En 2015, une salariée gagne, en moyenne . . . % de moins qu'un salarié. »

2. 58,5% des salariés sont des hommes.

   De quel pourcentage, le salaire net médian de l'ensemble des salariés est-il inférieur au salaire net moyen ?

EXERCICE 5

1. Compléter le tableau ci-dessous qui donne la distribution des salaires mensuels bruts des 100 salariés d'une entreprise.

Salaires en euros	1500	1600	1900	2400	2700	3200	5000
Effectifs	30	25	15	12	8	6	4
Fréquences							

2. a) Donner le montant du salaire mensuel brut médian.

   b) Calculer le pourcentage de la masse salariale totale perçue par les 10% des salariés les mieux rémunérés.

3. Calculer le montant du salaire mensuel brut moyen.

EXERCICE 6

Le tableau suivant donne le montant des salaires annuels exprimés en milliers d'euros d'une petite entreprise.

Salaires	16	18	20	25	30	40
Nombre de salariés	6	9	10	8	5	2

1. Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartiles. Interpréter ces résultats et les traduire à l'aide d'un diagramme en boîte.
2. Calculer le montant en euros du salaire moyen annuel de cette entreprise.
3. Soit S la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$S(x) = 6 \times (16-x)^2 + 9 \times (18-x)^2 + 10 \times (20-x)^2 + 8 \times (25-x)^2 + 5 \times (30-x)^2 + 2 \times (40-x)^2$$

   a) Vérifier que $S(x) = 40x^2 - 1776x + 21152$

   b) Déterminer le sens de variations de la fonction S.

EXERCICE 7

Une entreprise de produits alimentaires fabrique et distribue une marque de café dans des sachets de 250 grammes. On suppose que le poids du sachet vide est négligeable.
La machine utilisée pour remplir les sachets est contrôlée selon la procédure suivante.
À chaque heure, un échantillon aléatoire de 30 sachets est prélevé dans la production ; on mesure la masse de chaque sachet et on calcule la masse moyenne $\overline{x}$ de l'échantillon.
Un réglage de la machine est nécessaire si l'un des critères suivants n'est pas vérifié :

— les 30 sachets ont une masse supérieure ou égale à 244 grammes ;

— 50% au moins des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $[248 ; 252]$;

— 95% au moins des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $[245 ; 256]$.

Au cours de la production, l'échantillon suivant a été prélevé.

253	249	250	248	244	252	250	250	251	248
251	255	253	252	252	249	253	248	251	253
246	250	245	246	257	251	252	252	250	251

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Masse	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257
Effectif														

2. Représenter la dispersion de cette série à l'aide d'un diagramme en boîte.
3. Faut-il effectuer un réglage de la machine ?

EXERCICE 8

Chez un fabricant de lames de parquet en chêne rustique on indique :

— longueur moyenne des lames : 45 cm ;

— lames de longueur inférieure à 35 cm : 23 %.

On prélève un échantillon de 60 lames dans le stock, pour vérification. On constate que 18 lames ont une longueur inférieure à 35 cm.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des lames dont la longueur est inférieure à 35 cm dans les échantillons de taille 60.
2. L'affirmation « 23% des lames ont une longueur inférieure à 35 cm » est-elle remise en cause ?

EXERCICE 9

Le directeur commercial affirme que 80 % des consommateurs sont satisfaits de la qualité des produits commercialisés par son entreprise.
On réalise une étude de satisfaction sur un échantillon de 120 personnes. Parmi les personnes interrogées, 90 déclarent être satisfaites des produits.
Déterminer, en justifiant, si l'on doit remettre en question l'affirmation du directeur commercial.

EXERCICE 10

Selon une publication de l'INSEE, 28 % des ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.

1. On interroge un échantillon de 100 ménages choisis au hasard, et on constate que dans cet échantillon 35 ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.

   Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

2. On interroge au hasard 300 ménages qui résident dans le même arrondissement d'une grande agglomération, et on constate également que 105 ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.

   Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

Chapitre 9

FONCTION INVERSE

I FONCTION INVERSE

1 DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté $\mathbb{R}^*$, c'est la réunion de deux intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

2 VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels non nuls tels que $a < b$.
Étudions le signe de $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

$\boxed{a < b < 0}$

Si $a < b < 0$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\dfrac{b-a}{ab} > 0$ soit $f(a) - f(b) > 0$

Ainsi, pour tous réels a et b strictement négatifs, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

$\boxed{0 < a < b}$

Si $0 < a < b$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\dfrac{b-a}{ab} > 0$ soit $f(a) - f(b) > 0$

Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

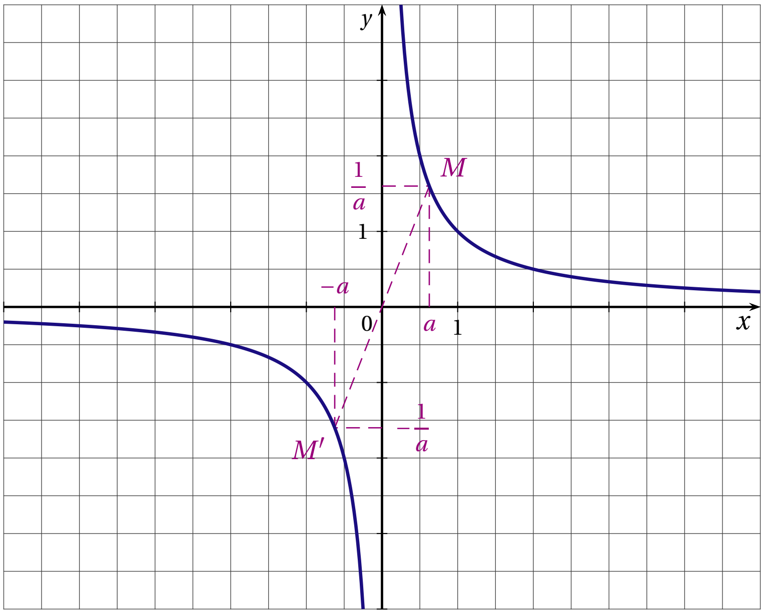
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

REMARQUE :

Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
Les points $M\left(a; f(a)\right)$ et $M'\left(-a; f(-a)\right)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



REMARQUE :

— On peut rendre $f(x)=\frac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.

— On peut rendre $f(x)=\frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$, et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

II QUOTIENT D'EXPRESSIONS

Un quotient d'expressions est une fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$.
Ces fonctions sont définies pour toutes les valeurs du réel x telles que le dénominateur $B(x)\neq 0$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x+1}{3-2x}$.
La fonction f est définie pour tout réel x tel que $3-2x\neq 0$ soit $x\neq\frac{3}{2}$.
L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ que l'on note aussi $\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

1 ÉQUATION QUOTIENT

L'équation quotient $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ est équivalente à $A(x)=0$ et $B(x)\neq 0$.

PREUVE

— Si le quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ est nul, alors ce quotient existe (ce qui signifie que le dénominateur $B(x)\neq 0$) et que le numérateur $A(x)=0$.

— Réciproquement si $A(x)=0$ et $B(x)\neq 0$, alors le quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ existe et il est nul.

EXEMPLES

1. L'équation $\dfrac{2x+3}{x+1}=0$ équivaut à $2x+3=0$ et $x+1\neq 0$. La solution de cette équation est $x=-\dfrac{3}{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3x+1}{2x-3}=2$.

   Cette équation existe si, et seulement si, $2x-3\neq 0$ soit pour tout réel $x\neq\dfrac{3}{2}$.

   Or pour tout réel $x\neq\dfrac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{2x-3}=2 &\iff \frac{3x+1}{2x-3}-2=0\\ &\iff \frac{3x+1}{2x-3}-\frac{2\times(2x-3)}{2x-3}=0\\ &\iff \frac{3x+1-4x+6}{2x-3}=0\\ &\iff \frac{-x+7}{2x-3}=0\end{aligned}$$

   Donc l'équation $\dfrac{3x+1}{2x-3}=2$ équivaut à $-x+7=0$ et $x\neq\dfrac{3}{2}$. La solution de cette équation est $x=7$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{2}$.

   Pour tout réel $x\neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{3}{x}=\frac{x}{2} &\iff \frac{3}{x}-\frac{x}{2}=0\\ &\iff \frac{6-x^2}{2x}=0\end{aligned}$$

   Donc l'équation $\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{2}$ équivaut à $6-x^2=0$ et $x\neq 0$.

   Or $6-x^2=0 \iff x^2=6$, c'est à dire $x=-\sqrt{6}$ ou $x=\sqrt{6}$. Pour ces deux valeurs, la condition $x\neq 0$ est respectée.

   L'ensemble des solutions de l'équation $\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{2}$ est $S=\left\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\right\}$

2 INÉQUATIONS QUOTIENT

Le quotient de deux nombres réels de même signe est positif.
Le quotient de deux nombres réels de signes contraires est négatif.

Les inéquations quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}\leqslant 0$, $\dfrac{A(x)}{B(x)}<0$, $\dfrac{A(x)}{B(x)}\geqslant 0$ et $\dfrac{A(x)}{B(x)}>0$ se résolvent après l'étude du signe du quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2}{3x-2}\geqslant 1$

Le quotient $\dfrac{2}{3x-2}$ est défini pour tout réel x tel que le dénominateur $3x-2\neq 0$.

Pour tout réel $x\neq\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3x-2}\geqslant 1 &\iff \frac{2}{3x-2}-1\geqslant 0\\ &\iff \frac{2-3x+2}{3x-2}\geqslant 0\\ &\iff \frac{4-3x}{3x-2}\geqslant 0\end{aligned}$$

Pour déterminer le signe du quotient $\dfrac{4-3x}{3x-2}$, on étudie les signe de chacun des termes du quotient :

$$4-3x \leqslant 0 \iff x \geqslant \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad 3x-2 \leqslant 0 \iff x \leqslant \frac{2}{3}$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des termes et, on en déduit le signe du quotient en utilisant la règle des signes d'un quotient.
La double barre dans le tableau indique que $\dfrac{2}{3}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4-3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3-4x}{3x+2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0$ est $S = \left]\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right]$.

EXERCICE 1

f est la fonction inverse.

1. Calculer l'image par f de chacun des nombres réels suivants :

   a) $-0{,}01$ b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $1-\dfrac{4}{3}$

2. Calculer l'image par f de chacun des nombres réels suivants sans laisser de racine carrée au dénominateur :

   a) $-\sqrt{2}$ b) $-2\sqrt{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

EXERCICE 2

1. Justifier $\sqrt{2}$ est inférieur à 2, puis comparer $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{2}$.
2. Comparer les inverses de $\sqrt{15}$ et 4.

EXERCICE 3

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

   a) $-0{,}5<x<-0{,}4$ b) $\dfrac{2}{3}<x<1$ c) $x>\dfrac{1}{5}$ d) $x\leqslant-\sqrt{2}$

2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :

   a) $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{1}{x}>2$ c) $-2<\dfrac{1}{x}\leqslant-\dfrac{1}{5}$ d) $-\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant3$

EXERCICE 4

Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est égale à l'inverse de 600 ?

EXERCICE 5

1. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

   a) $x>-2\Longrightarrow\dfrac{1}{x}<-\dfrac{1}{2}$ b) $x>4\Longrightarrow\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{4}$ c) $x<0{,}6\Longrightarrow\dfrac{1}{x}>\dfrac{5}{3}$ d) $x\leqslant-\dfrac{2}{3}\Longrightarrow\dfrac{1}{x}\geqslant-1{,}5$

2. Pour chacune des implications précédentes, énoncer la réciproque et dire si celle ci est vraie ou fausse.

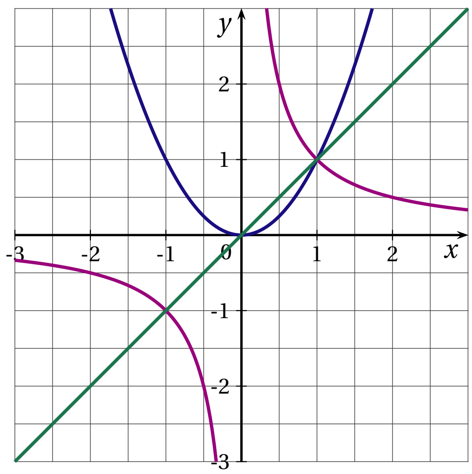
EXERCICE 6

1. Soit x un réel tel que $1<x\leqslant2$
   a) Montrer que $(x-1)^3\leqslant(x-1)^2$
   b) Que peut-on en déduire pour $\dfrac{1}{(x-1)^3}$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2}$?
2. La proposition « Pour tout réel $x>1$, $\dfrac{1}{(x-1)^3}\geqslant\dfrac{1}{(x-1)^2}$ » est-elle vraie ou fausse ?

EXERCICE 7

Soit $a\neq0$ un réel. On souhaite ranger dans l'ordre croissant les trois nombres a, a^2 et $\dfrac{1}{a}$

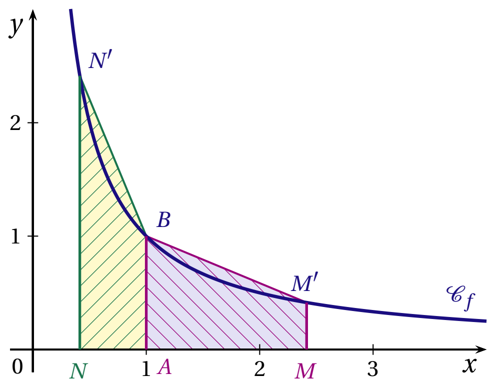
1. Les courbes représentatives des fonctions $f\colon x\mapsto x^2$, $g\colon x\mapsto x$ et $h\colon x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sont représentées sur le graphique ci-dessous



Par lecture graphique, émettre une conjecture à propos de l'ordre croissant des trois nombres a, a^2 et $\dfrac{1}{a}$ selon les différentes valeurs du réel a.

2. Si $0 < a \leqslant 1$ montrer que $a^2 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{a}$

EXERCICE 8



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$on considère les points $A(1;0)$ $M(a;0)$ et $N(b;0)$ avec $b < 1 < a$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Les points B, M' et N' sont des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement la même abscisse que les points A, M et N.

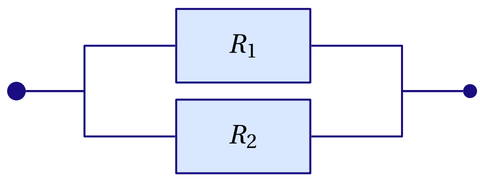
1. Déterminer l'abscisse du point M pour que l'aire du trapèze $AMM'B$ soit égale à une unité d'aire.
2. Déterminer l'abscisse du point N pour que l'aire du trapèze $ABNN'$ soit égale à une unité d'aire.

EXERCICE 9

1. Chercher l'erreur dans le raisonnement suivant :
   « Comme la fonction inverse est décroissante, $\dfrac{1}{2x+3} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x+3 \geqslant 1$ d'où $x \geqslant -1$ ».
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{2x+3} \leqslant 1$.

EXERCICE 10

Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle, la résistance R du dipôle vérifie la relation $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.
Les résistances sont exprimées en ohms (Ω).
On donne $R_1 = 4$ et $R_2 = x$.



1. Montrer que $R = \dfrac{4x}{x+4}$
2. Déterminer la résistance R_2 pour que la résistance R du dipôle soit égale à $3\,\Omega$.
3. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x+4}$
   a) Déterminer les réels A et B tels que $f(x) = A + \dfrac{B}{x+4}$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
4. Est-il possible que la résistance R du dipôle soit supérieur à $4\,\Omega$?

EXERCICE 11

On suppose dans cet exercice, que le prix de la location d'une voiture pour le week-end est de 90€, que la consommation moyenne d'un véhicule est de 8 litres de carburant pour 100 km parcourus et que le prix d'un litre de carburant est de 1,50€.

1. Pierre loue un véhicule pendant le week-end et parcourt 120 km pendant le week-end.
   Quel est le prix de revient moyen par kilomètre parcouru ?
2. Soit $x > 0$ le nombre de kilomètres parcourus par un client qui loue une voiture pendant le week-end.
   a) Exprimer en fonction de x, le montant $f(x)$ du prix de revient moyen par kilomètre parcouru.
   b) Préciser les variations de la fonction f.
3. Un client ayant loué une voiture pendant le week-end a calculé que le prix de revient moyen par kilomètre parcouru a été de 0,52€.
   a) Quelle distance ce client a-t-il parcouru pendant le week-end ?
   b) Quel est le montant du coût total de la location pendant le week-end ?

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$.

1. Montrer que la fonction f est strictement décroissante.
2. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 6$.

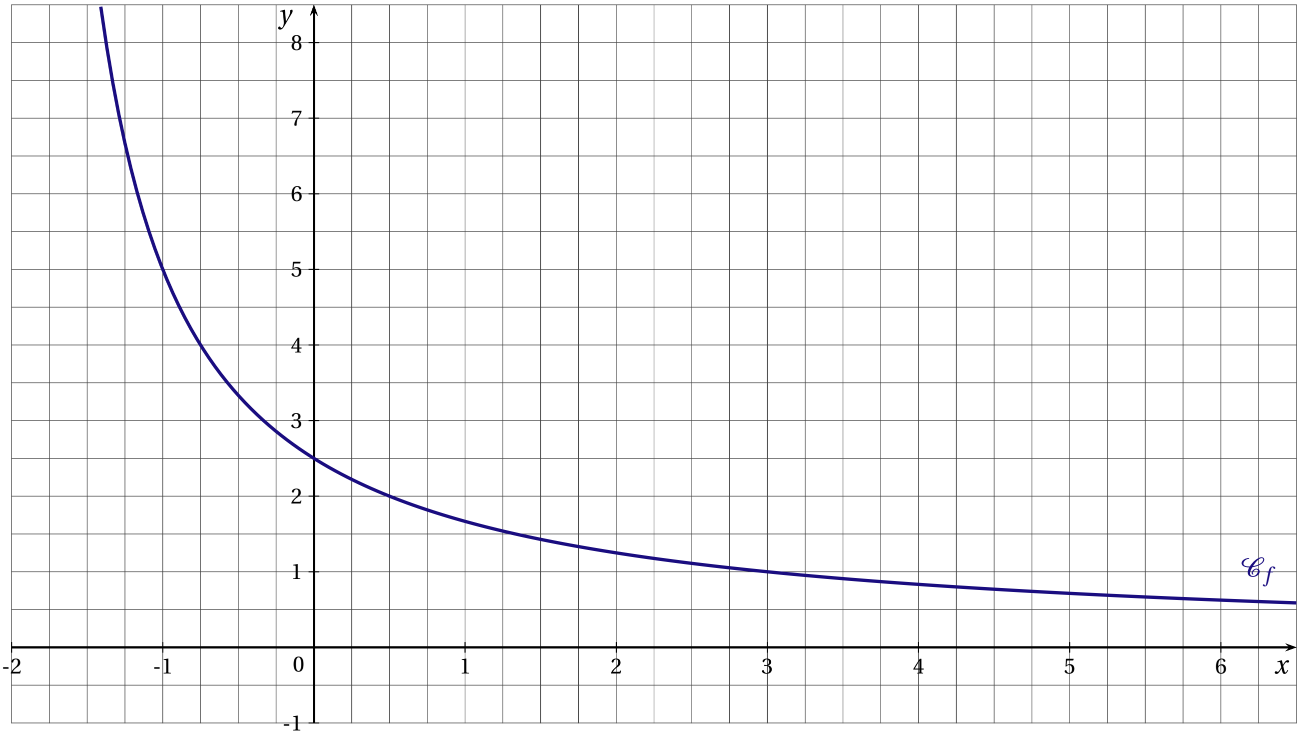
EXERCICE 13

À l'occasion d'une randonnée, la vitesse moyenne d'un cycliste à l'aller est de 15 km/h.

1. Quelle est la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour lorsque la vitesse moyenne au retour est de 21 km/h ?
2. On note x la vitesse moyenne exprimée en km/h du cycliste au retour et $V(x)$ la vitesse moyenne du cycliste sur le trajet aller-retour.
   a) Montrer que $V(x) = \dfrac{30x}{x+15}$.
   b) Pour quelles valeurs de x la vitesse moyenne sur le trajet total sera supérieure à 20 km/h ?
   c) La vitesse moyenne sur le trajet total peut-elle dépasser les 30 km/h ?

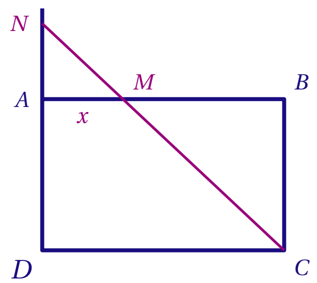
EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x+2}$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 2$.
2. Soit a et b deux réels tels que $-2 < a < b$
   a) Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-1,5) = 4$ et $g(2,5) = 0$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal précédent.
4. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 - 0,5x}{x+2}$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE 15



$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ et $BC = 5$.
M est un point du segment $[AB]$ distinct de B.
La droite (CM) coupe la droite (AD) en N

1. On pose $AM = x$
   a) Quelles sont les valeurs possibles du réel x?
   b) Exprimer la distance AN en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;8[$ par $f(x) = \dfrac{40}{8-x} - 5$.
   Étudier les variations de la fonction f.
3. Pour quelles valeurs de x la distance AN est-elle comprise entre 3 et 20?
4. Est-il possible que $AN \geqslant 1995$?

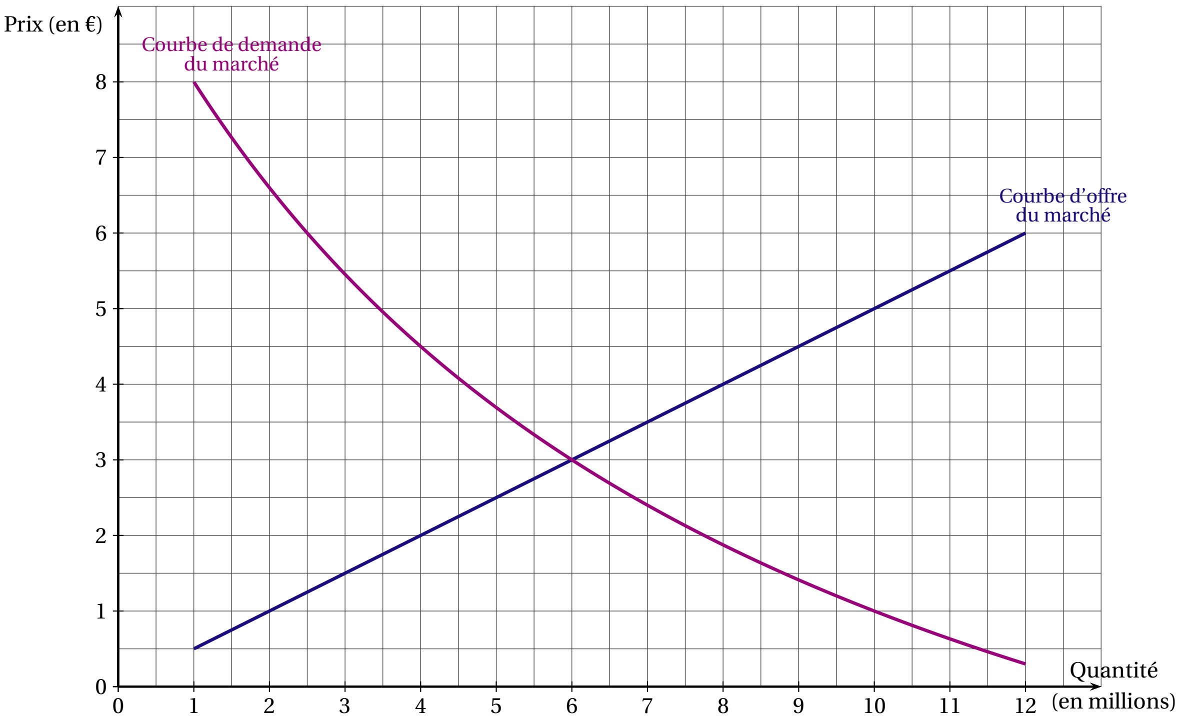
EXERCICE 16

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :

— la fonction d'offre f est donnée par $f(q) = 0{,}5q$

— la fonction demande g est donnée par $g(q) = \dfrac{78-6q}{q+8}$

où $f(q)$ et $g(q)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité q comprise entre 1 et 12 millions d'unités.



1. À l'aide du graphique précédent, déterminer si la demande est excédentaire quand le prix de vente d'un article est de 1 €.
2. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,50 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;
   c) Quel problème cela pose-t-il ?
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

EXERCICE 17

L'hyperbole C_f tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal en annexe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f. L'hyperbole C_f a pour équation $y = \dfrac{4x-37}{2x-1}$.

1. a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
   c) Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

2. a) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x - 0{,}5}$.

   b) 2 a-t-il un antécédent par f ?

3. Soit g la fonction affine telle que $g(-7) = 8$ et $g(6) = -5$.

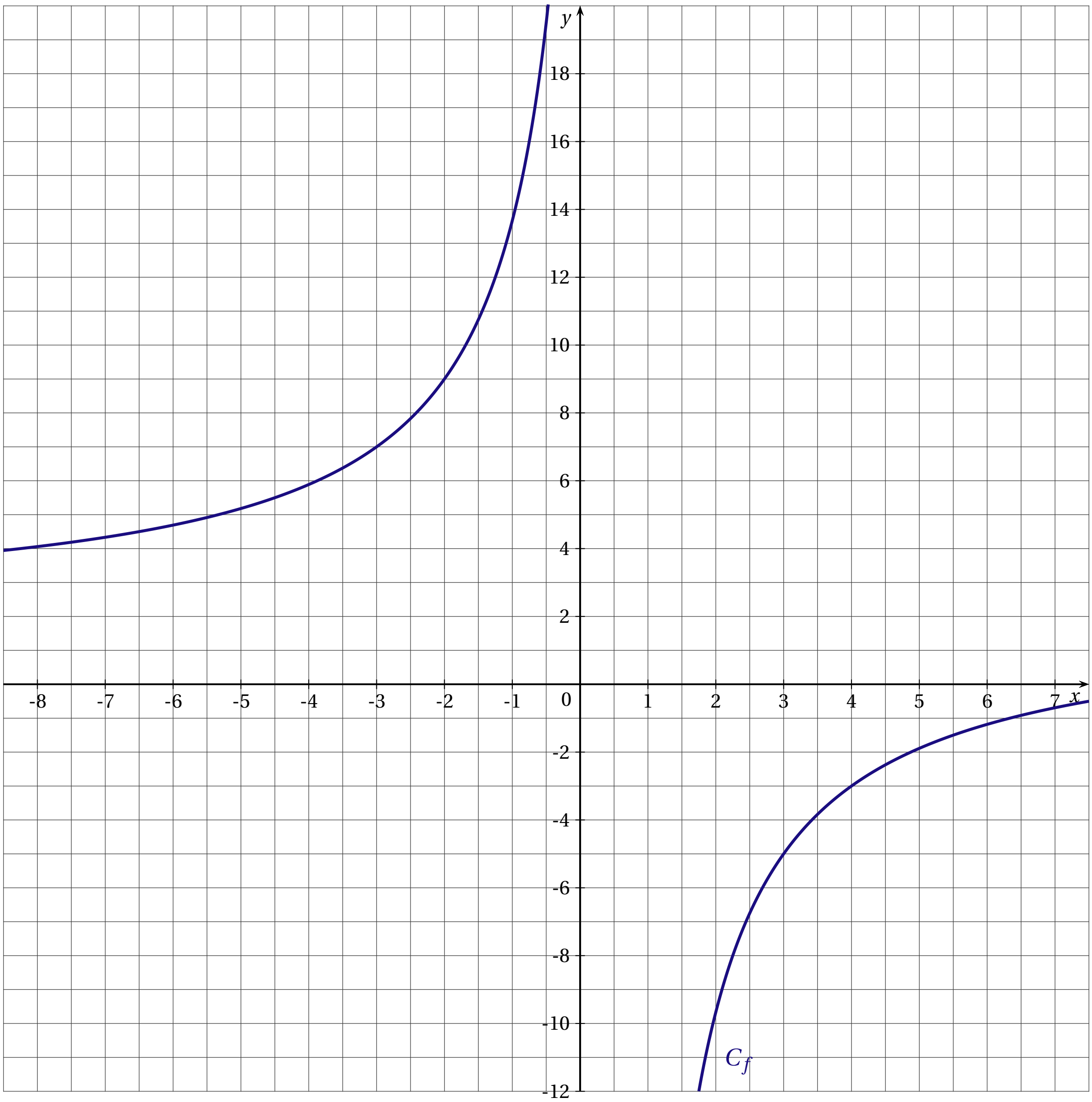
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.

   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.

4. a) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.

   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et D.

ANNEXE



Chapitre 10

PROBABILITÉS

I VOCABULAIRE ET NOTATIONS

1 EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

— Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard.

— L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est l'univers associé à cette expérience aléatoire. On le note Ω.

— Chacun des résultats de cette expérience aléatoire est une éventualité ou un évènement élémentaire.

Remarques :

1. Le résultat d'une expérience aléatoire est défini par l'expérimentateur.
   On lance un dé cubique :
   — Si on s'intéresse au chiffre inscrit sur la face supérieure, un évènement élémentaire sera l'un des des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
   — Par contre, si on s'intéresse à la parité du chiffre inscrit sur la face supérieure, un évènement élémentaire sera « pair » ou « impair ». L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{\text{pair},\text{impair}\}$
2. L'univers Ω n'est pas toujours un ensemble fini .
   On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir « face » un résultat est un mot de longueur finie ou infinie formé avec les deux lettres P pour « pile » et F pour « face ». Par exemple, le résultat PPPF signifie qu'on a lancé quatre fois la pièce, les trois premiers lancers ont donné « pile » et le quatrième « face ».
   Ω est l'ensemble des mots de la forme $\underbrace{\text{P}\cdots\text{P}}_{k\text{ fois}}\text{F}$, $k \in \mathbb{N}$ et du mot de longueur infinie formé avec la lettre P.

2 ÉVÈNEMENT

Un évènement associé à une expérience aléatoire est une partie de l'univers Ω constituée de l'ensemble des évènements élémentaires de Ω pour lesquels on sait si une propriété est vérifiée ou non à l'issue de l'expérience aléatoire.

— L'évènement certain est noté Ω, il est toujours réalisé.

— L'évènement impossible est noté $\varnothing$, il ne se réalise jamais.

EXEMPLE

Dans le cas d'un lancer de dé cubique, les phrases « le résultat est un multiple de 3 », « le résultat est 6 » et « le résultat est 7 » définissent trois évènements.

3 OPÉRATIONS SUR LES ÉVÈNEMENTS

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux évènements

— L'évènement « A ne s'est pas réalisé » est l'évènement contraire de A noté $\overline{A}$.

— L'évènement « au moins un des évènements A ou B s'est réalisé » est l'évènement « A ou B » noté $A \cup B$.

— L'évènement « les évènements A et B se sont réalisés » est l'évènement « A et B » noté $A \cap B$.

— Deux évènements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps sont incompatibles.
On a alors $A \cap B = \varnothing$.
Les évènements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

EXEMPLE

On lance un dé cubique.
On note A l'évènement « obtenir un nombre est pair », B l'évènement « le nombre obtenu est un nombre premier »

— $A = \{2,4,6\}$ et $\overline{A} = \{1,3,5\}$.

— $B = \{2,3,5\}$ d'où $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$ et $A \cap B = \{2\}$.

II PROBABILITÉ

1 LOI DE PROBABILITÉ

Ω désigne un univers de n éventualités $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
Définir une loi de probabilité p sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire e_i un nombre réel $p(e_i) = p_i$ de l'intervalle $[0;1]$, tel que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.
La probabilité d'un évènement A, est le réel noté $p(A)$ tel que :

— $p(A) \in [0;1]$

— $p(A)$ est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

3 PROPRIÉTÉS

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.

1. La probabilité de l'évènement certain est égale à 1. $p(\Omega) = 1$.
2. La probabilité de l'évènement impossible est nulle. $p(\varnothing) = 0$.
3. Pour tout évènement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
4. Si A et B sont deux évènements $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

4 ÉQUIPROBABILITÉ

Soit Ω un univers fini de n éventualités. Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité c'est à dire, si $p(e_1) = p(e_2) = \cdots = p(e_n) = \dfrac{1}{n}$, alors l'univers est dit équiprobable.
On a alors pour tout évènement A,

$$p(A) = \frac{\text{nombre des issues favorables à } A}{\text{nombre des issues possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Notation :
Soit E un ensemble fini, le cardinal de E noté $\text{card}(E)$ est le nombre d'éléments de l'ensemble E.

EXEMPLES

1. *On lance deux dés équilibrés. Quel est l'évènement le plus probable A « la somme des nombres obtenus est égale à 7 » ou B « la somme des nombres obtenus est égale à 8 » ?*
   Si on s'intéresse à la somme des deux dés, l'univers est $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque évènement élémentaire n'a pas la même probabilité.

$$2 = 1 + 1 \text{ alors que } 5 = 1 + 4 \text{ ou } 5 = 2 + 3$$

On se place dans une situation d'équiprobabilité en représentant une issue à l'aide d'un couple (a,b) où a est le résultat du premier dé et b le résultat du second dé.

L'univers Ω associé à cette expérience est l'ensemble des couples formés avec les éléments de $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Les dés étant équilibrés, il y a $6^2 = 36$ résultats équiprobables.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

L'évènement A est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 7. D'où :

$$p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

L'évènement B est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 8. D'où :

$$p(B) = \frac{5}{36}$$

L'évènement le plus probable est A.

2. *La probabilité de l'évènement B « obtenir au moins un double six en lançant 12 fois deux dés » est-elle supérieure à la probabilité de l'évènement A « obtenir au moins une fois un six en lançant deux fois un dé » ?*

   a) Probabilité de l'évènement A

   Lorsqu'on lance deux fois un dé il y a $6^2 = 36$ résultats équiprobables.

   L'évènement A « obtenir au moins un six » est l'évènement contraire de l'évènement « n'obtenir aucun six au cours des deux lancers ».

   Or l'évènement $\overline{A}$ est l'ensemble des couples formés avec les éléments de $\{1,2,3,4,5\}$.

   Le nombre d'éléments de $\overline{A}$ est $5^2 = 25$ d'où $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{5^2}{6^2}$ et

   $$p(A) = 1 - p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{5^2}{6^2} = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$$

   b) Probabilité de l'évènement B

   Lorsqu'on lance une fois deux dés, il y a 36 couples de résultats équiprobables. La probabilité de l'évènement « ne pas obtenir de double six » vaut $\dfrac{35}{36}$.

   Lorsqu'on lance 12 fois deux dés, la probabilité de l'évènement $\overline{B}$ « ne pas obtenir de double six » vaut $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{12}$ d'où

   $$p(B) = 1 - p\left(\overline{B}\right) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{12} \approx 0{,}287$$

Ainsi, la probabilité de l'évènement B « obtenir au moins un double six en lançant 12 fois deux dés » est inférieure à la probabilité de l'évènement A « obtenir au moins une fois un six en lançant deux fois un dé »

EXERCICE 1

Dans une entreprise, on a relevé qu'au cours d'une année : 40% des salariés ont été absents au moins 1 jour; 30% des salariés ont été absents au moins 2 jours; 15% des salariés ont été absents au moins 3 jours; 10% des salariés ont été absents au moins 4 jours; 5% des salariés ont été absents au moins 5 jours.
On choisit au hasard un salarié de cette entreprise. Quelle est la probabilité pour que ce salarié :

1. n'ait jamais été absent au cours de cette année?
2. ait été absent une seule journée au cours de cette année?
3. ait été absent au plus 3 jours?

EXERCICE 2

On tire, au hasard, une carte d'un jeu de 32 cartes.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   a) R : « la carte est un roi »;
   b) F : « la carte est une figure »;
   c) C : « la carte est un cœur ».
2. Décrire l'événement $F \cap C$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap C)$.
   En déduire la probabilité $p(F \cup C)$ d'obtenir une figure ou un cœur.

EXERCICE 3

On choisi au hasard un nombre entre 1 et 36.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   — A : « le nombre est un multiple de 3 »
   — B : « le nombre est un multiple de 4 »
   — C : « le nombre est un multiple de 9 »
   — D : « le nombre est premier »
2. Calculer la probabilité des évènements : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap \overline{C}$.

EXERCICE 4

Les résultats d'une enquête sur l'audience de deux magazines A et B, sont les suivants :
3 % de la population lit les deux magazines. Le magazine A est lu par 12 % de la population tandis que le magazine B est lu par 7 % de la population.
On interroge une personne de cette population au hasard.

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise pas le magazine A.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise aucun des deux magazines.

EXERCICE 5

Une enquête a été réalisée auprès d'un échantillon représentatif de la population d'une municipalité afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.
L'enquête révèle que 60 % des habitants pratiquent le tri sélectif, 55 % des habitants sont sensibles au développement durable, et, la moitié de la population est sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
On interroge au hasard un habitant de cette ville. On considère les évènements suivants :

— D : La personne interrogée est sensible au développement durable.
— T : La personne interrogée pratique le tri sélectif.

1. Quelle est la probabilité que la personne interrogée ne pratique pas le tri sélectif?
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée est sensible au développement durable ou pratique le tri sélectif.
3. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne soit pas sensible au développement durable et ne pratique pas le tri sélectif.

EXERCICE 6

Deux maladies A et B affectent les animaux d'un pays.
On estime que 12% des animaux sont atteints de la maladie A, 8% des animaux sont atteints de la maladie B et 3% des animaux sont atteints des deux maladies.
On prend un animal de ce pays au hasard.

1. Calculer la probabilité que cet animal soit atteint seulement de la maladie A.
2. Calculer la probabilité que cet animal ne soit pas malade.

EXERCICE 7

Un fabriquant de lentilles hydrophiles a constaté à l'issue de la fabrication, que ces lentilles peuvent présenter deux types de défauts : un rayon de courbure défectueux ou une perméabilité à l'oxygène défectueuse.
Au cours d'une semaine, on a constaté que 6 % des lentilles présentent au moins un des deux défauts, 5 % des lentilles présentent un rayon de courbure défectueux et 3 % présentent une perméabilité à l'oxygène défectueuse.
On prélève une lentille au hasard dans cette production et on note :

— A l'évènement : « la lentille prélevée présente un rayon de courbure défectueux » ;
— B l'évènement : « la lentille prélevée présente une perméabilité à l'oxygène défectueuse ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement « la lentille prélevée au hasard ne présente aucun défaut ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement « la lentille prélevée au hasard présente les deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement C : « la lentille prélevée au hasard n'a qu'un seul des deux défauts ».

EXERCICE 8

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité. Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.
Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b.
On prélève un article au hasard et on note, A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut a » et B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut b ».
On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0{,}05$; $p(B) = 0{,}06$.

1. Traduire par une phrase l'évènement $A \cup B$. Donner la probabilité de l'évènement $A \cup B$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut » ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
4. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard n'a qu'un seul des deux défauts ».

EXERCICE 9

On considère un alphabet soit formé des trois lettres A, B et C.

1. Avec cet alphabet on écrit un mot de deux lettres. Quelle est la probabilité que ce mot soit écrit avec deux lettres différentes ?
2. Quelle est la probabilité d'écrire un mot de trois lettres différentes ?

EXERCICE 10

On lance trois fois de suite un dé équilibré et on forme un nombre avec les résultats obtenus : par exemple, si on tire 4,3 et 3 on obtient : 433.

1. Combien de nombres différents peut-on obtenir ? Quelle est la probabilité d'obtenir 433 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé de trois chiffres tous différents ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé seulement des chiffres 1 ou 2 ?

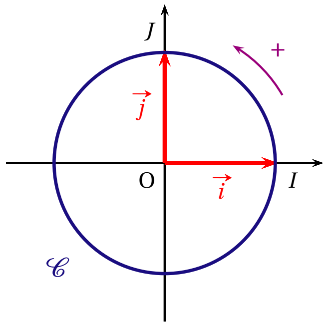
Chapitre 11

TRIGONOMÉTRIE

I RÉPÉRAGE SUR UN CERCLE

1 CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$
Le cercle trigonométrique est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct.

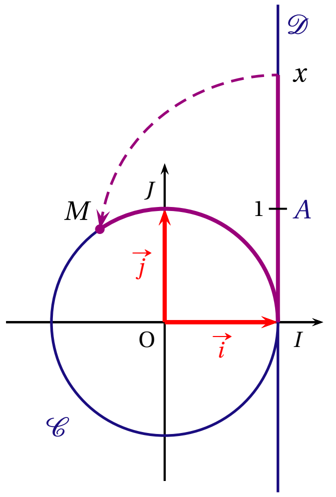


2 ENROULEMENT DE LA DROITE RÉELLE SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$
La droite $\mathscr{D}$ est tangente en I au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
A est le point de coordonnées $(1;1)$. La droite $\mathscr{D}$ est munie du repère $(I;A)$.
Par enroulement de la droite réelle $\mathscr{D}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$:

— à tout point de la droite d'abscisse x on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique, image du réel x;

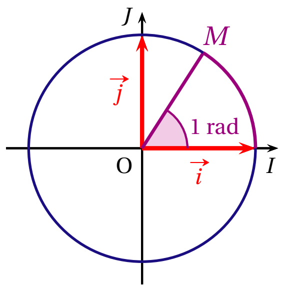
— tout point M du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels. Si le point M est associé à un réel x, alors il est associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.



3 MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

DÉFINITION

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, de rayon 1.
Un radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle $\mathscr{C}$ suivant un arc de longueur 1.

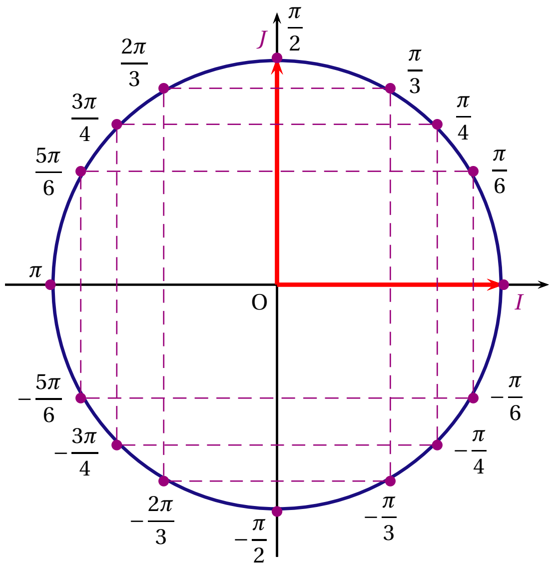


REMARQUE :

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	π

VALEURS REMARQUABLES



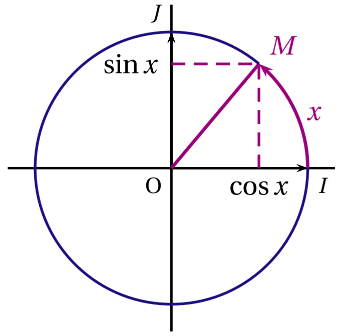
II COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE RÉEL

1 DÉFINITION

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x.

— Le cosinus du réel x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.

— Le sinus du réel x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.



2 PROPRIÉTÉS

— Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos(x+k\times 2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+k\times 2\pi)=\sin x$

— Pour tout réel x, $-1\leqslant \cos x\leqslant 1$ et $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$

— Pour tout réel x, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

EXEMPLE :

Sachant que $\sin x=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

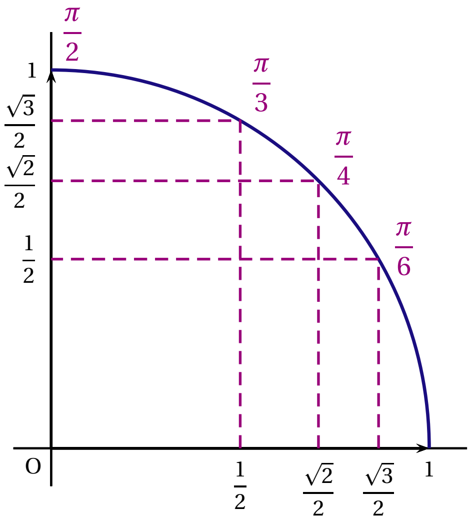
Pour tout réel x, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc $\cos^2 x+\dfrac{5}{9}=1$, soit $\cos^2 x=\dfrac{4}{9}$.
Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

$$\cos x=-\frac{2}{3}\qquad \text{ou}\qquad \cos x=\frac{2}{3}$$

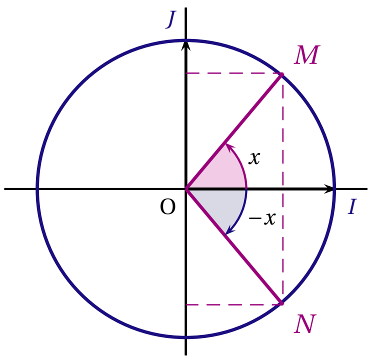
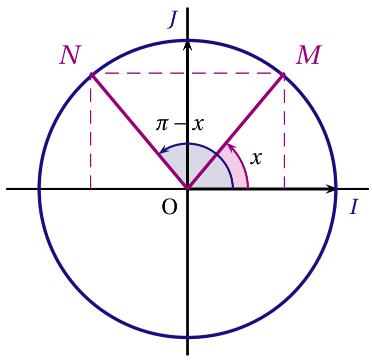
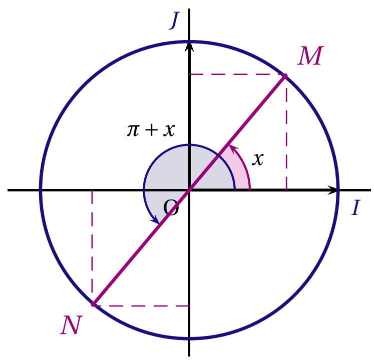
Comme $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, alors $\cos x>0$ donc $\cos x=\dfrac{2}{3}$.

3 VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



4 ANGLES ASSOCIÉS

Pour tout réel x :	Pour tout réel x :	Pour tout réel x :
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$
		
M et N sont symétriques par rapport à (OI)	M et N sont symétriques par rapport à (OJ)	M et N sont symétriques par rapport à O

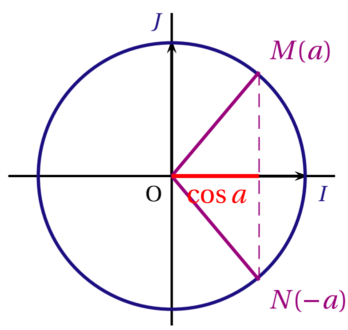
EXEMPLES :

1. $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
2. $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5 ÉQUATIONS

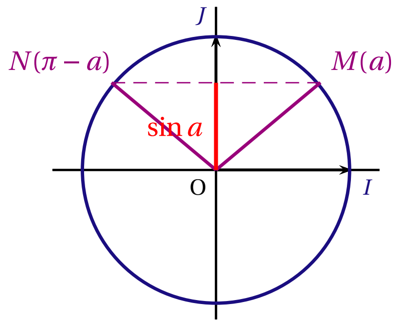
— Équation $\cos x = \cos a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos a$ sont : $\begin{cases} x &= a + k \times 2\pi \\ x &= -a + k \times 2\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif.



— Équation $\sin x = \sin a$

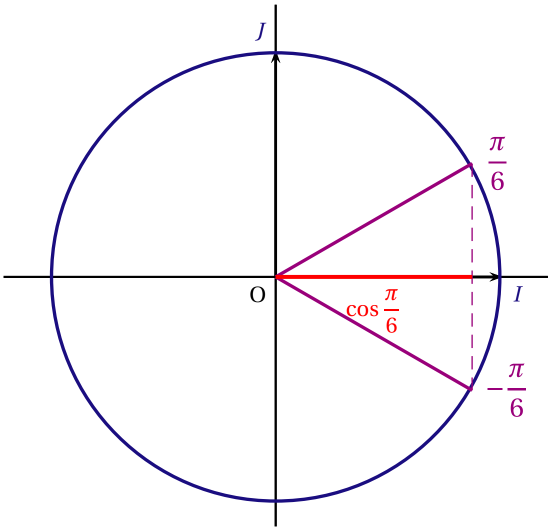
Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin a$ sont : $\begin{cases} x &= a + k \times 2\pi \\ x &= \pi - a + k \times 2\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif.



EXEMPLES :

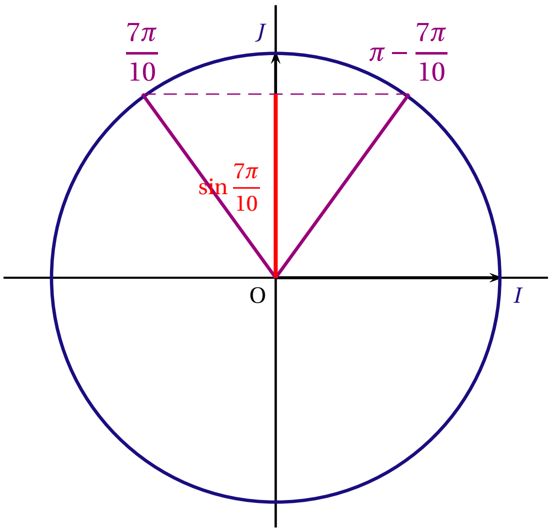
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Comme $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ l'équation est équivalente à l'équation $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{6}$



   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont $x = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ avec k entier relatif.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \sin\dfrac{7\pi}{10}$.



   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin\dfrac{7\pi}{10}$ sont $x = \dfrac{7\pi}{10} + k \times 2\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{10} + k \times 2\pi$ avec k entier relatif.

EXERCICE 1

1. Convertir en radians les mesures d'angle géométriques donnés en degrés :
   a) 210° b) 5° c) 198° d) 315° e) 72° f) 40°
2. Convertir en degrés les mesures des angles géométriques donnés en radians :
   a) $\dfrac{\pi}{9}$ b) $\dfrac{5\pi}{6}$ c) $\dfrac{7\pi}{12}$ d) $\dfrac{9\pi}{5}$ e) $\dfrac{14\pi}{9}$ f) $\dfrac{72\pi}{45}$

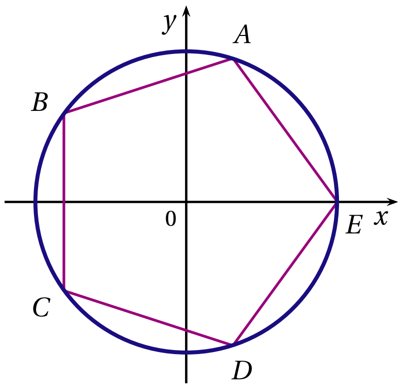
EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel $x \in]-\pi;\pi]$ dont l'image par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique coïncide avec le point image du réel donné.

a) $\dfrac{41\pi}{6}$ b) $-\dfrac{15\pi}{2}$ c) 13π d) $-\dfrac{10\pi}{3}$ e) -35π f) $\dfrac{52\pi}{9}$

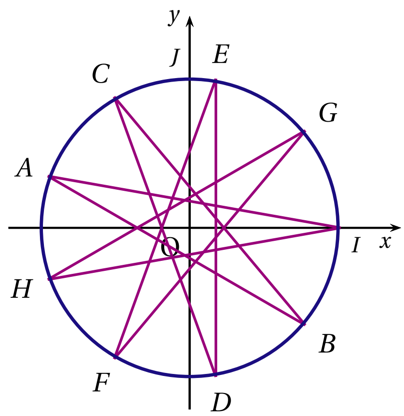
EXERCICE 3

Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?

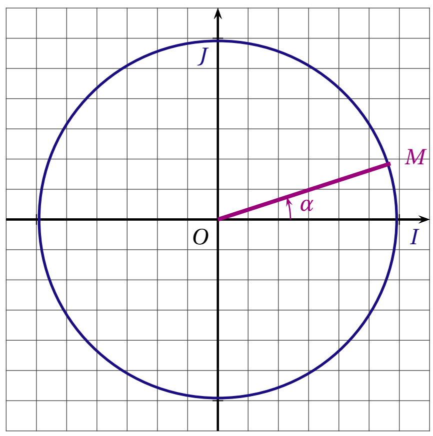
EXERCICE 4



Sur le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(O; I, J)$, on a tracé le polygone régulier étoilé $ABCDEFGHI$.

1. À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce polygone ?
2. Donner les coordonnées des points C et F.
3. Les points A et H ont-ils la même abscisse ?

EXERCICE 5



1. a) Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C et D repérés respectivement par les réels $\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.
   b) Donner les coordonnées des quatre points A, B, C et D.
2. M est un point du cercle trigonométrique tel que la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM} = \alpha$ avec $\alpha \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Placer sur le cercle trigonométrique les points M_1 et M_2 tels que $\widehat{IOM_1} = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ et $\widehat{IOM_2} = \pi - \alpha$.

3. a) On donne $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donner la valeur exacte de $\sin\left(-\frac{9\pi}{10}\right)$.

   b) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE 6

Connaissant la valeur de $\cos x$ ou de $\sin x$ sur l'intervalle donné, déterminer la valeur du sinus ou du cosinus du réel x correspondant :

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x\in[0;\pi]$; $\sin x=\frac{1}{2}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$\cos x=-\frac{1}{2}$ et $x\in[-\pi;0]$; $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; $\sin x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

EXERCICE 7

Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. a) $A=\cos(\pi-x)+2\cos x-3\cos(\pi+x)$

   b) $B=\sin(2\pi-x)-2\sin(\pi+x)+3\sin(x-\pi)$

   c) $C=\cos(-x)-2\cos(3\pi-x)+2\cos(x+\pi)$

2. a) $D=(1+\cos t+\sin t)^2-2(1+\cos t)(1+\sin t)$

   b) $E=\cos^4 t-\sin^4 t+2\sin^2 t$

EXERCICE 8

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $1+2\cos x=0$; $1-2\sin x=0$.

EXERCICE 9

Résoudre les équations suivantes :

$\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$; $\sin x=\sin\frac{3\pi}{4}$; $\sin x=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $\cos x=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

EXERCICE 10

On donne $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Déterminer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{5}$.
2. En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus de $-\frac{\pi}{5}$; $\frac{4\pi}{5}$ et $-\frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 11

1. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x=\frac{3}{5}$ et $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation $2\cos^2 x-1=0$.

EXERCICE 12

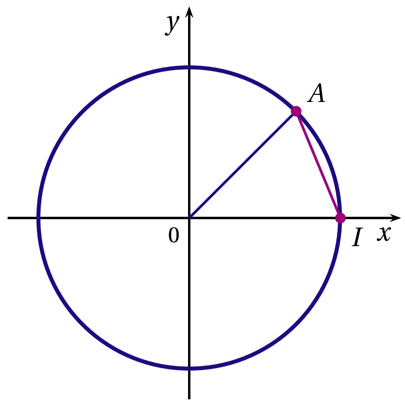
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2-X-\frac{3}{4}=0$.
2. En déduire les solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ de l'équation $\sin^2 x-\sin x-\frac{3}{4}=0$.

EXERCICE 13

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-3x-2=0$.
2. En déduire les solutions de l'équation : $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$.

EXERCICE 14

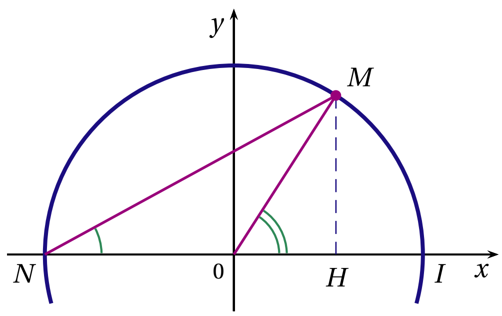
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, A le point du cercle trigonométrique image du réel $\dfrac{\pi}{4}$ et I le point de coordonnées $(1;0)$.



1. a) Donner les coordonnées du point A.
   b) Calculer distance IA.
   c) Montrer que $IA=2\times\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$. (*On pourra utiliser le point M milieu du segment* $[IA]$.)
   d) En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
   e) Déterminer alors $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$.
2. a) En reproduisant la méthode précédente pour calculer $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, calculer $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
   b) En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, M est un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et I le point de coordonnées $(1;0)$.

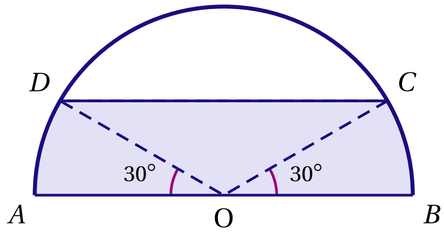


1. Montrer que $\widehat{IOM}=2\widehat{INM}$
2. Soit x le réel dont M est l'image par enroulement de la droite réelle sur le cercle $\mathscr{C}$.
   a) Montrer que $MN^2=2\cos x+2$.
   b) En considérant le triangle rectangle MHN, montrer que $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1+\cos x}{2}$.

3. Application :
   a) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   b) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 16

Dans la figure ci-dessous, on considère le demi-cercle de rayon 5 cm.



Comparer l'aire située sous la corde DC et l'aire de la partie du demi-cercle située au dessus de la corde DC.

EXERCICE 17

Pour tout entier n non nul on considère le réel $a_n = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

1. Calculer $a_1 = \sin(\pi)\cos(\pi)$, $a_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $a_3 = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $a_4 = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $a_6 = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée des réels suivants :
   $a_{100} = 100\sin\left(\frac{\pi}{100}\right)\cos\left(\frac{\pi}{100}\right)$, $a_{500} = 500\sin\left(\frac{\pi}{500}\right)\cos\left(\frac{\pi}{500}\right)$ et $a_{1000} = 1000\sin\left(\frac{\pi}{1000}\right)\cos\left(\frac{\pi}{1000}\right)$.
3. a) Emettre une conjecture sur la valeur de a_n quand n devient de plus en plus grand.
   b) On considère l'algorithme ci-dessous :

$N \leftarrow 1$
$A \leftarrow \sin(\pi) \times \cos(\pi)$
Tant que $\pi - A \geqslant 10^{-4}$
    $N \leftarrow N+1$
    $A \leftarrow N \times \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$
Fin Tant que

   Donner une interprétation de la valeur de la variable N calculée par cet algorithme.

Chapitre 12

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

I POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET PLANS

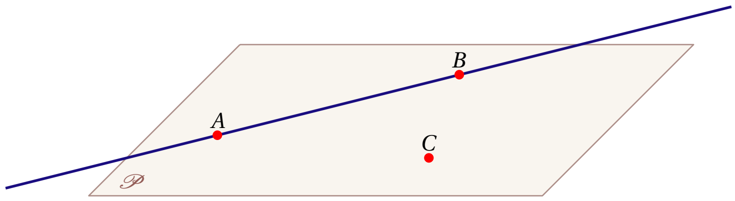
1 RÈGLES D'INCIDENCE

— Deux points distincts de l'espace déterminent une droite unique.

— Trois points non alignés de l'espace déterminent un plan unique.

— Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un même plan $\mathscr{P}$ alors, la droite (AB) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

— Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de la géométrie plane.



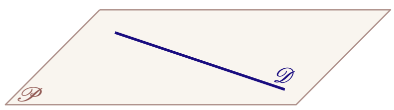
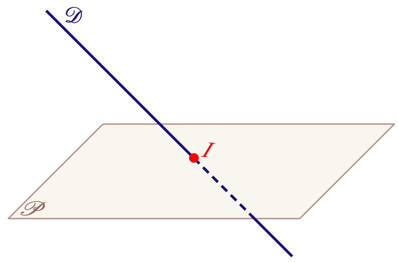
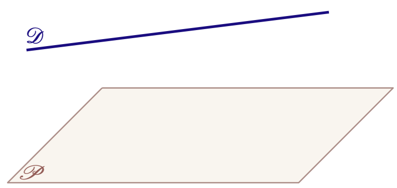
2 POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. Trois cas peuvent se présenter :

— la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$;

— la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants ;

— la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ n'ont aucun pont commun.

 $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$	 $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants : $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{I\}$	 $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont disjoints : $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing$

3 POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

DROITES COPLANAIRES

Deux droites sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans le même plan.

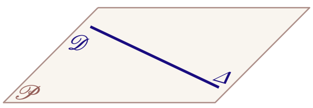
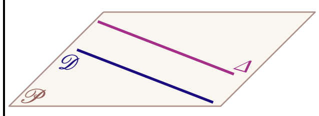
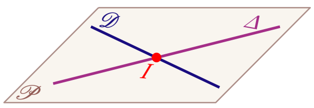
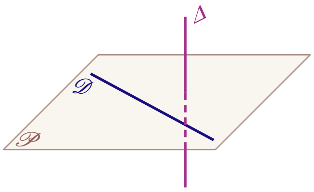
Soient $\mathscr{D}$ et Δ deux droites de l'espace. Quatre cas peuvent se présenter :

— les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont confondues ;

— les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont strictement parallèles ;

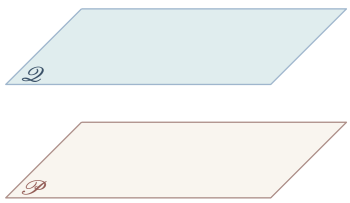
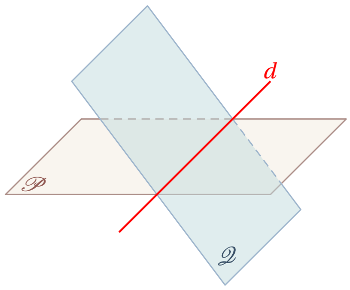
— les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes ;

— les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas coplanaires.

Droites coplanaires			Droites non coplanaires
Droites parallèles		Droites sécantes	
 $\mathscr{D}$ et Δ sont confondues	 $\mathscr{D}$ et Δ sont strictement parallèles : $\mathscr{D} \cap \Delta = \varnothing$	 $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécantes : $\mathscr{D} \cap \Delta = \{I\}$	 $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires : $\mathscr{D} \cap \Delta = \varnothing$

4 POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

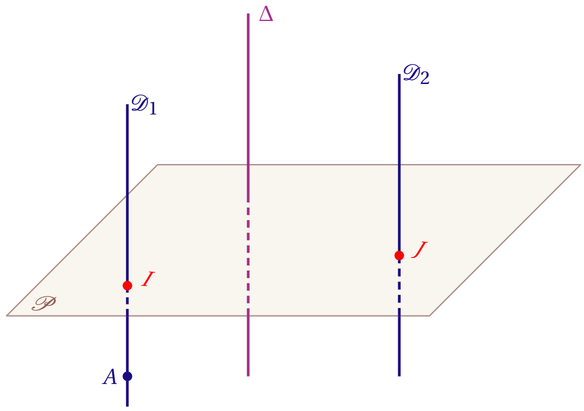
Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles

Plans parallèles		Plans sécants
 Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont confondus	 Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont strictement parallèles	 Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants selon une droite d

II PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

1 DROITES PARALLÈLES

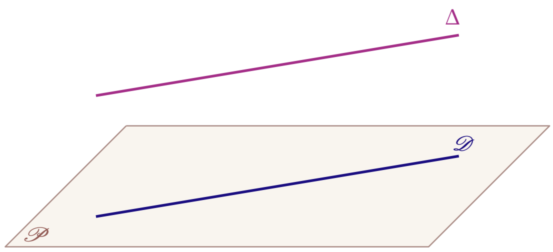
- Par un point A donné dans l'espace, il passe une et une seule droite $\mathscr{D}$ parallèle à une droite donnée Δ.
- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.



2 DROITE PARALLÈLE À UN PLAN

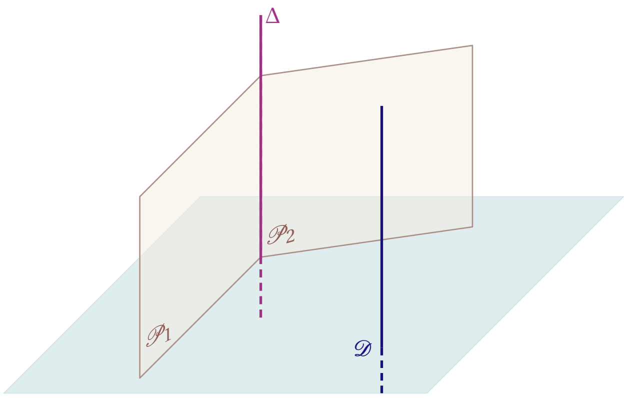
PROPRIÉTÉ 1 :

Si une droite Δ est parallèle à une droite $\mathscr{D}$ incluse dans un plan $\mathscr{D}$, alors Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.



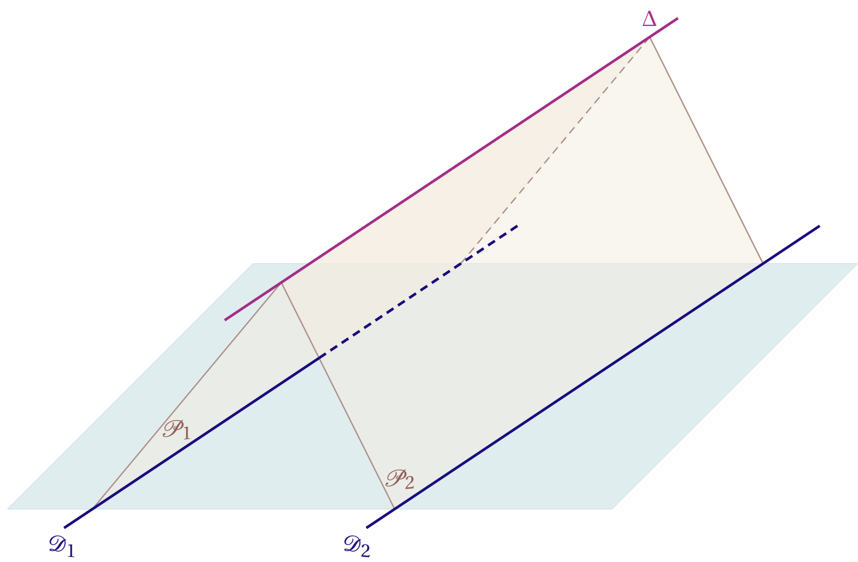
PROPRIÉTÉ 2 :

Si une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à deux plans sécants $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, alors elle est parallèle à leur intersection.



THÉORÈME DU TOIT :

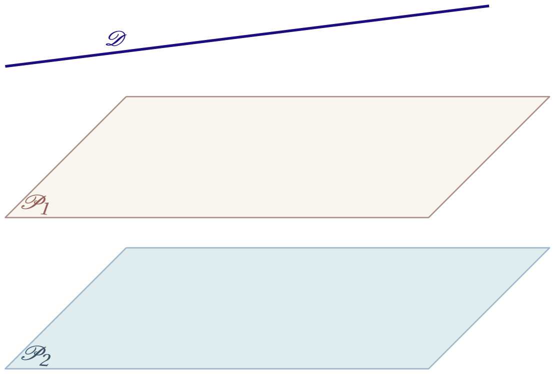
Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites parallèles.
Soit $\mathscr{P}_1$ un plan contenant la droite $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan contenant la droite $\mathscr{D}_2$.
Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants, alors leur droite d'intersection est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.



3 PLANS PARALLÈLES

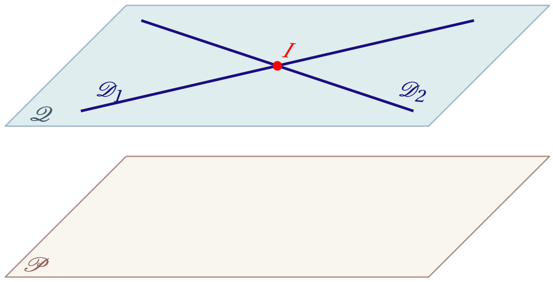
PROPRIÉTÉ 1 :

Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans parallèles. Alors, toute droite $\mathscr{D}$ parallèle à $\mathscr{P}_1$ est parallèle à $\mathscr{P}_2$.



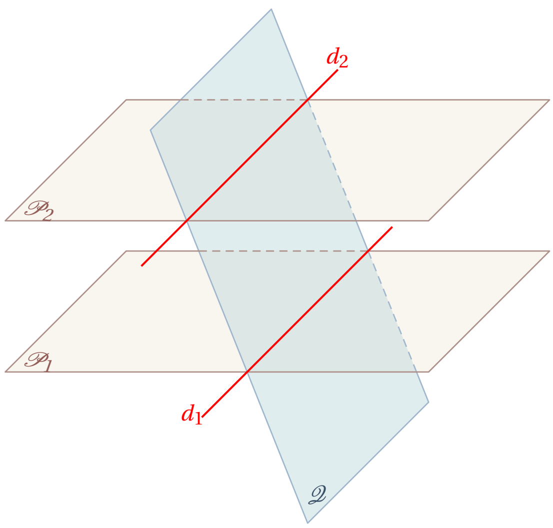
PROPRIÉTÉ 2 :

Deux droites sécantes parallèles à un même plan $\mathscr{P}$ déterminent un plan $\mathscr{Q}$ parallèle au plan $\mathscr{P}$.

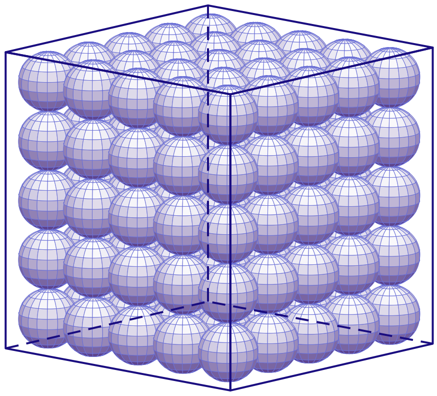


PROPRIÉTÉ 3 :

Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans parallèles, alors tout plan $\mathscr{Q}$ qui coupe le plan $\mathscr{P}_1$, coupe le plan $\mathscr{P}_2$ et les droites d'intersection sont parallèles.



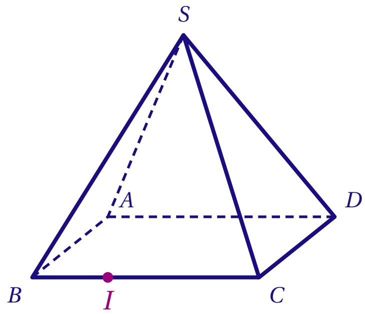
EXERCICE 1



Dans une caisse cubique, on empile des boules de 6cm de rayon comme l'indique le dessin ci-contre.

1. Combien de boules contient la caisse ?
2. Quel est le volume de la caisse qui contient exactement cet empilement de boules ?
3. Le pourcentage du volume la caisse occupé par les boules est-il inférieur à 52 % ?

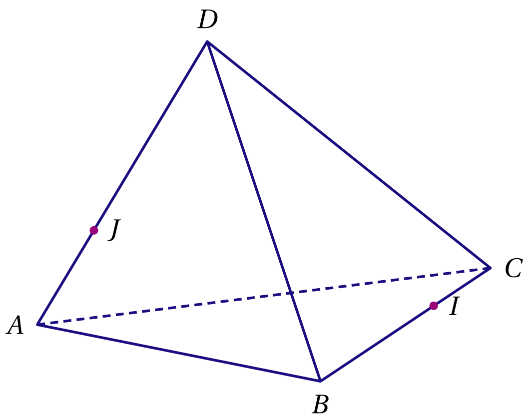
EXERCICE 2



$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est un point du segment $[BC]$, distinct de B et C.

1. Montrer que les plans (SAI) et (SCD) sont sécants.
2. Construire leur intersection.

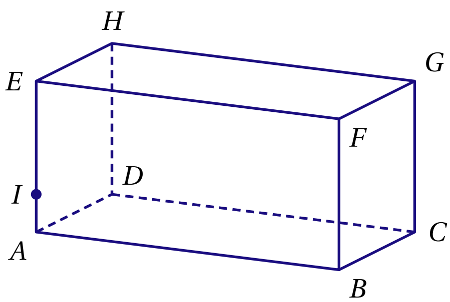
EXERCICE 3



$ABCD$ est un tétraèdre.
I est un point du segment $[BC]$ distinct de B et de C.
J est un point du segment $[AD]$ distinct de A et de D.
Dans chacun des cas suivants, montrer que les plans sont sécants et déterminer leur intersection.

1. (DIJ) et (BCD).
2. (DIJ) et (ABD).
3. (DIJ) et (ABC).

EXERCICE 4

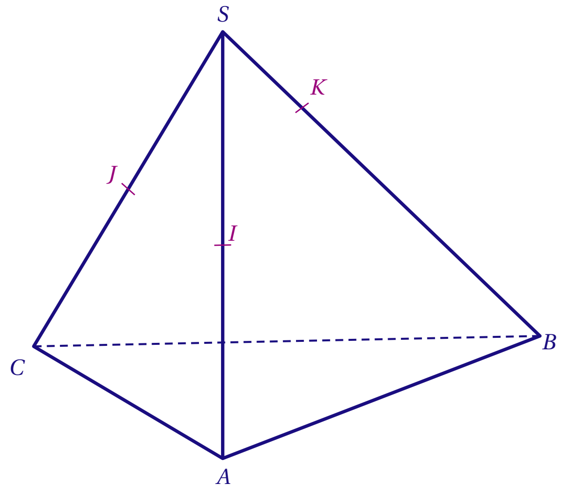


$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
I est un point du segment $[AE]$ distinct de A et de E.

1. Démontrer que A, C, G et I sont coplanaires.
2. Démontrer que la droite (GI) n'est pas contenue dans le plan $(ABCD)$.
3. Construire J, intersection de la droite (GI) et du plan $(ABCD)$.

EXERCICE 5

$SABC$ est un tétraèdre. I est le milieu de $[SA]$, J est le milieu de $[SC]$ et K est un point de $[SB]$ distinct du milieu de ce segment. N est le point d'intersection des droites (JK) et (BC).

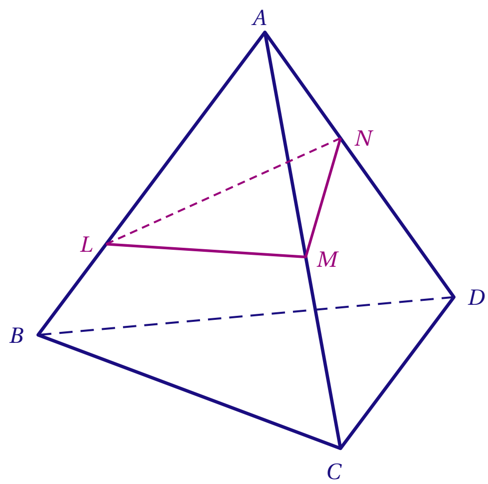


1. Placer sur la figure, le point M intersection de la droite (IK) avec le plan (ABC).
2. Soit d la droite d'intersection des plans (ABC) et (IJK).
   a) Montrer que N est un point de la droite d
   b) Tracer la droite d sur la figure.
3. Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).
4. Montrer que les droites (AC) et d sont parallèles.

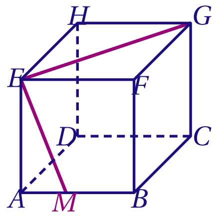
EXERCICE 6

$ABCD$ est un tétraèdre. L, M et N sont trois points placés respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

1. Placer le point J intersection de la droite (MN) avec le plan (BCD).
2. Placer le point K intersection de la droite (BD) avec le plan (LMN).
3. Les droites (BC) et (LM) sont sécantes en I, montrer que les points I, J et K sont alignés.



EXERCICE 7



$ABCDEFG$ est un cube. M est un point de l'arête $[AB]$.

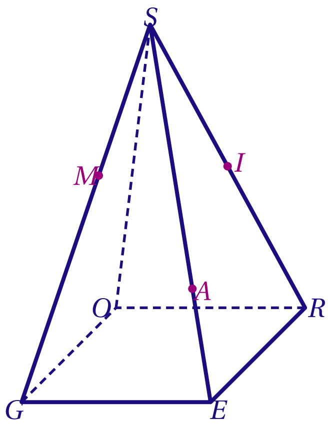
1. Le plan (GEM) coupe l'arête $[BC]$ en N. Que peut-on dire des droites (GE) et (MN) ?
2. Représenter la trace du plan (GEM) sur les faces du cube.

EXERCICE 8

Les points M, A et I sont respectivement les points d'intersection d'un plan $\mathscr{P}$ avec les arêtes $[SG]$, $[SE]$ et $[SR]$ de la pyramide $SROGE$.

1. Représenter la droite $\mathscr{D}$ intersection du plan $\mathscr{P}$ avec le plan de base de la pyramide $SROGE$.
2. a) Construire le point N intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'arête $[S0]$.

   b) Représenter la trace du plan $\mathscr{P}$ sur les faces de la pyramide $SROGE$.



LES CONTRÔLES (2018-2018)

EXERCICE 1

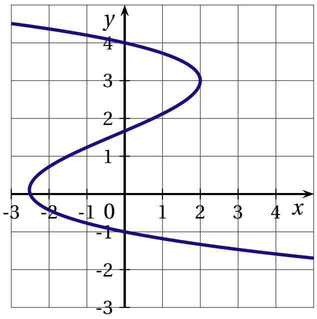
(3 *points*)

Soit f une fonction définie pour tout réel x et telle que :

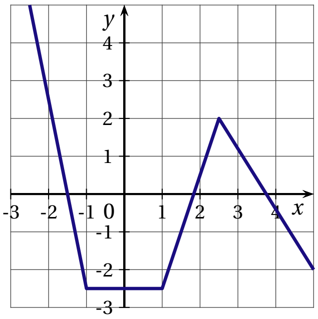
— l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions;

— 2 a exactement deux antécédents.

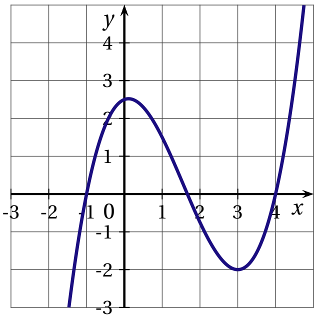
Parmi les courbes tracées ci-dessous, quelles sont celles qui peuvent représenter la fonction f ?



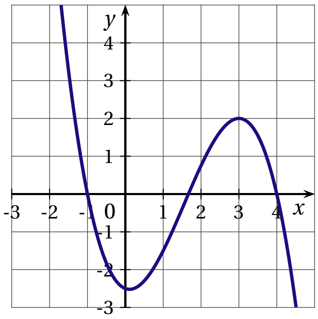
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

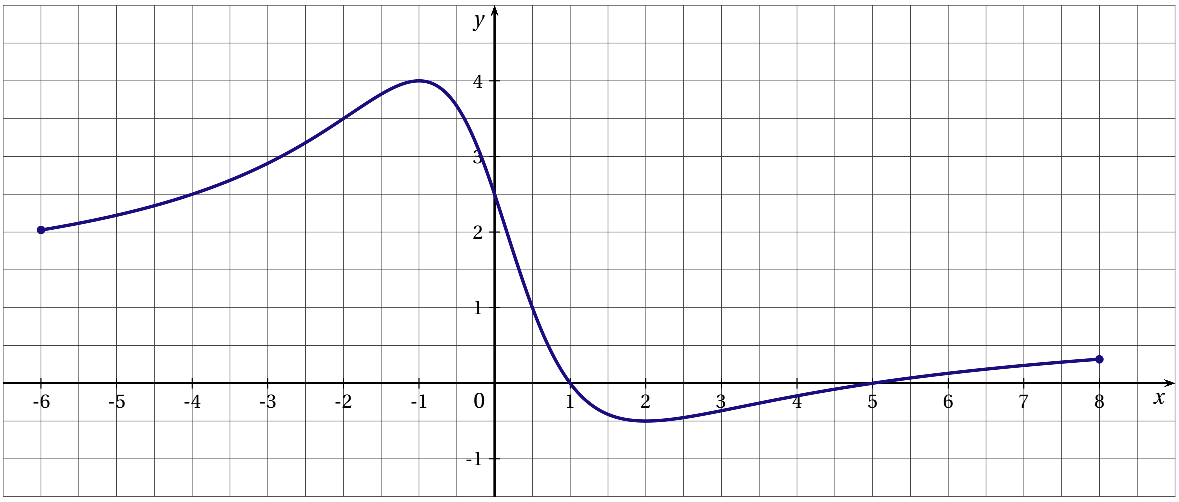


Courbe $\mathscr{C}_4$

EXERCICE 2

(5 *points*)

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[-6;8]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Lire graphiquement l'image de 0 par la fonction f.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant \dfrac{5}{2}$.
4. Donner le tableau de variation de la fonction f.
5. Si a est un réel de l'intervalle $[-4;5]$, à quel intervalle appartient $f(a)$?

EXERCICE 3 (3,5 *points*)

On considère une fonction f dont le tableau de variations est le suivant :

x	-10		$-\frac{7}{2}$		1		2		$\frac{17}{3}$		8
$f(x)$	-2	↘	-5	↗	0	↘	-3	↗	0	↗	4

1. Comparer $f(-4)$ et $f\left(-\dfrac{13}{3}\right)$
2. Peut-on comparer les images de 0 et de 2 ?
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$?

EXERCICE 4 (8,5 *points*)

Soit f la fonction définie pour tout rée x par $f(x) = (3x-4)^2 - (5x+3)^2$.

1. a) Factoriser l'expression de $f(x)$.
   b) On note C_f la courbe représentative de la fonction f.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
2. Développer l'expression de $f(x)$.
3. Calculer l'image par la fonction f de -1.
4. Calculer les antécédents par la fonction f de 7 ?

SUJET A

EXERCICE 1

Soit f la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + b$ et $f(3) = -1$.

Lequel des quatre tableaux de variation ci-dessous est celui de la fonction f ?

x	$-\infty$	$-\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$A(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

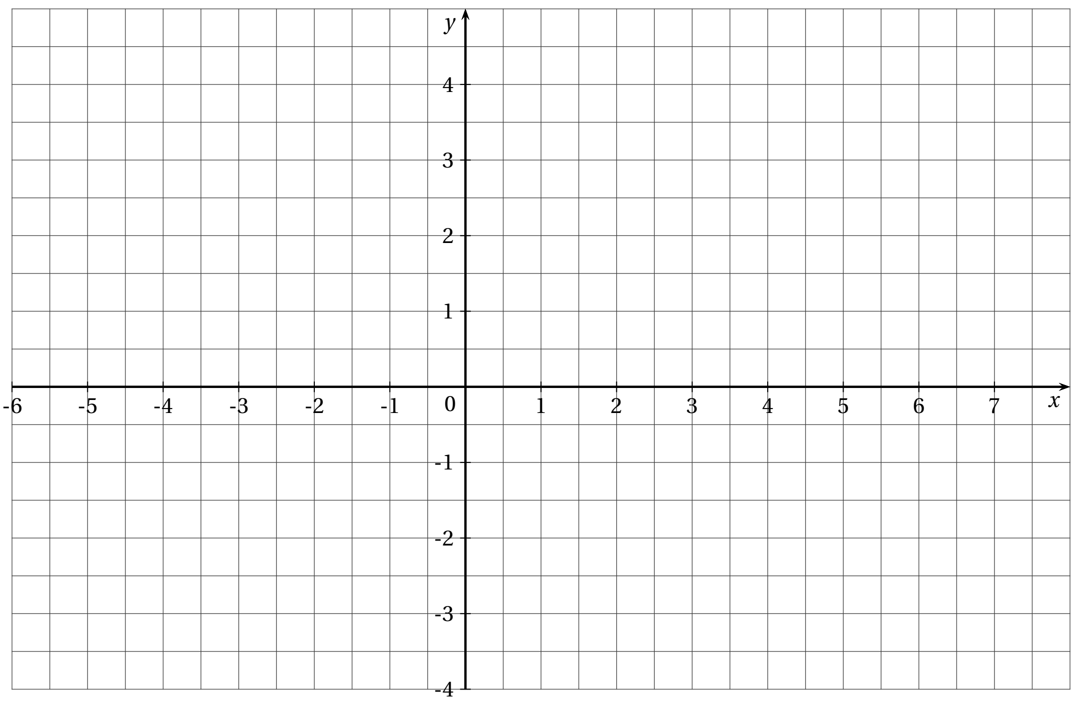
x	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$B(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

x	$-\infty$	$-\dfrac{2}{3}$	$+\infty$
$C(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

x	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$D(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

EXERCICE 2

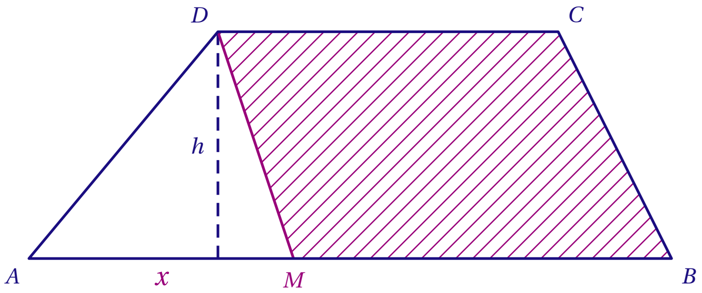
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + 3$
   a) Donner le tableau du signe de $f(x)$.
   b) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   c) Dans le plan muni d'un repère orthonormé tracer la courbe D_1 représentative de la fonction f.



2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = -3$ et $g(2) = 3$.
   a) Tracer la courbe D_2 représentative de la fonction g dans le repère précédent.
   b) Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 2x - 1$

EXERCICE 3

$ABCD$ est un trapèze de hauteur $h = 6$ avec $AB = 17$ et $CD = 9$.



À tout point M du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.
On note f la fonction telle que le nombre $f(x)$ est égal à l'aire du trapèze $MBCD$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Justifier que $f(x) = 78 - 3x$.
3. Déterminer la position du point M pour que l'aire du trapèze $MBCD$ soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze $ABCD$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-2x)^2 - (3x+2)^2$.

1. Factoriser l'expression de $f(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

CONTRÔLE N° 2

SUJET B

EXERCICE 1

Soit f la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = -\dfrac{4}{3}x + b$ et $f(3) = -3$.

Lequel des quatre tableaux de variation ci-dessous est celui de la fonction f ?

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
$A(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

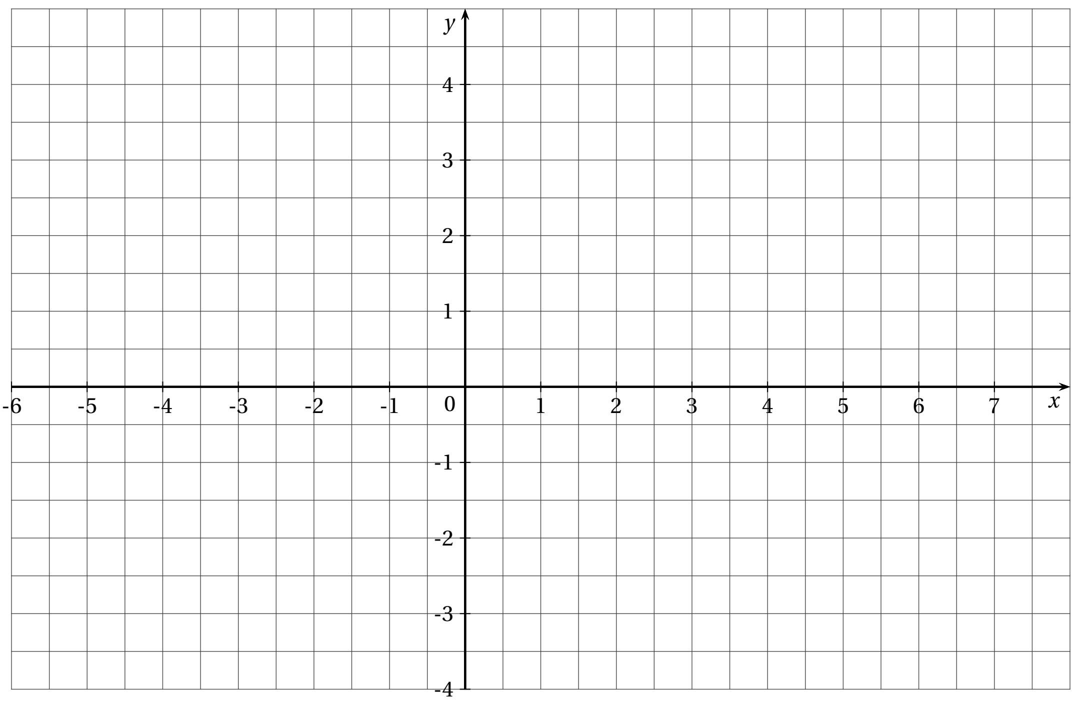
x	$-\infty$		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
$B(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{3}$		$+\infty$
$C(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
$D(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

EXERCICE 2

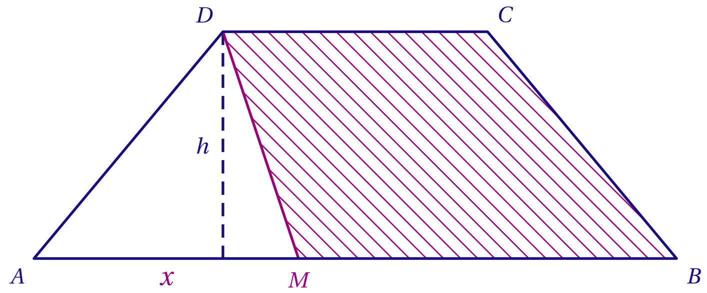
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$
   a) Donner le tableau du signe de $f(x)$.
   b) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   c) Dans le plan muni d'un repère orthonormé tracer la courbe D_1 représentative de la fonction f.



2. Soit g la fonction affine telle que $g(-2) = -3$ et $g(6) = 1$.
   a) Tracer la courbe D_2 représentative de la fonction g dans le repère précédent.
   b) Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant \dfrac{x}{2} - 2$

EXERCICE 3

$ABCD$ est un trapèze de hauteur $h = 6$ avec $AB = 17$ et $CD = 7$.



À tout point M du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.
On note f la fonction telle que le nombre $f(x)$ est égal à l'aire du trapèze $MBCD$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Justifier que $f(x) = 72 - 3x$.
3. Déterminer la position du point M pour que l'aire du trapèze $MBCD$ soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze $ABCD$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-3x)^2 - (2x+3)^2$.

1. Factoriser l'expression de $f(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 1

PARTIE A

Soit f la fonction affine telle que $f(-3) = 5$ et $f(0{,}5) = -2$.

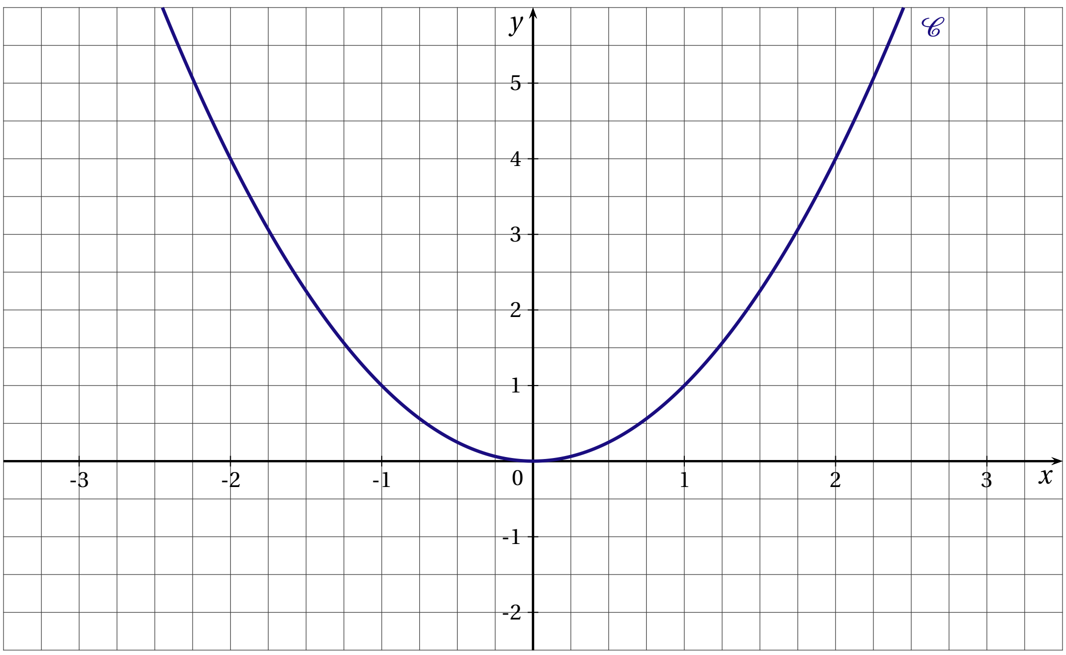
1. Dans le repère donné en annexe ci-dessous, tracer la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction f.
2. Déterminer l'expression de de $f(x)$ en fonction de x.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

PARTIE B

La courbe $\mathscr{C}$ tracée en annexe ci-dessous, est la courbe représentative de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2$.

1. Donner une expression factorisée de $g(x) - f(x)$.
2. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

ANNEXE



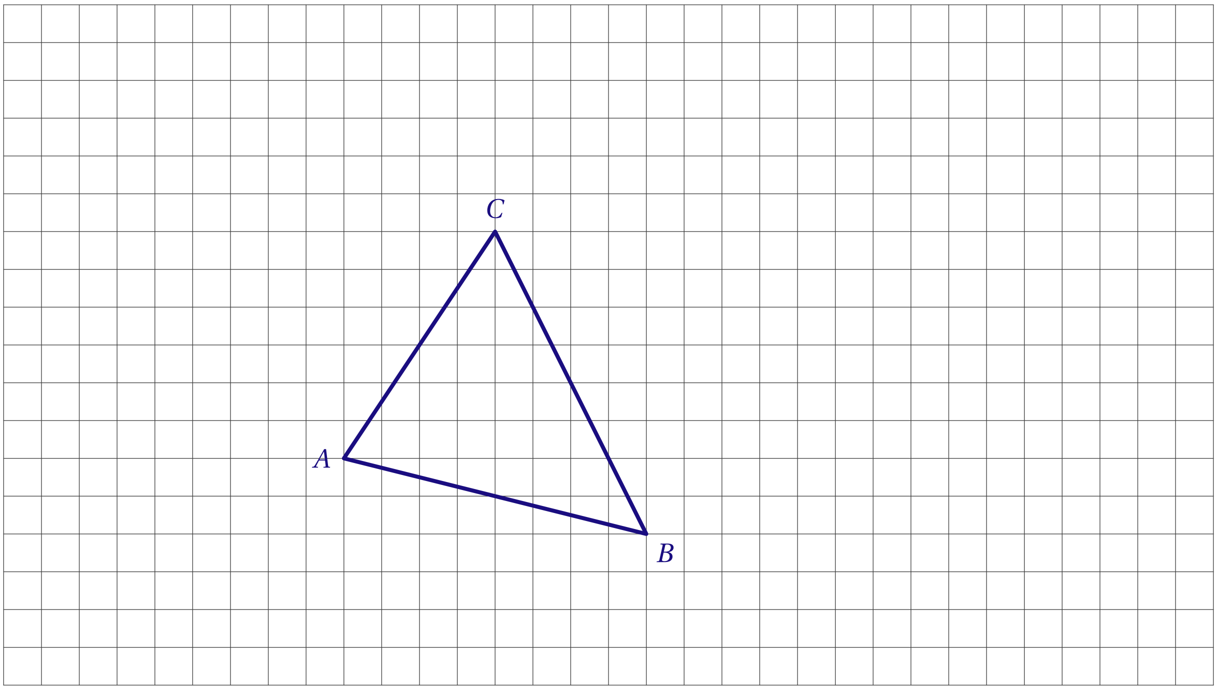
EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 - (5x-3)^2$.

1. Factoriser l'expression de $f(x)$.
2. Donner le tableau de signes de la fonction f.

EXERCICE 3

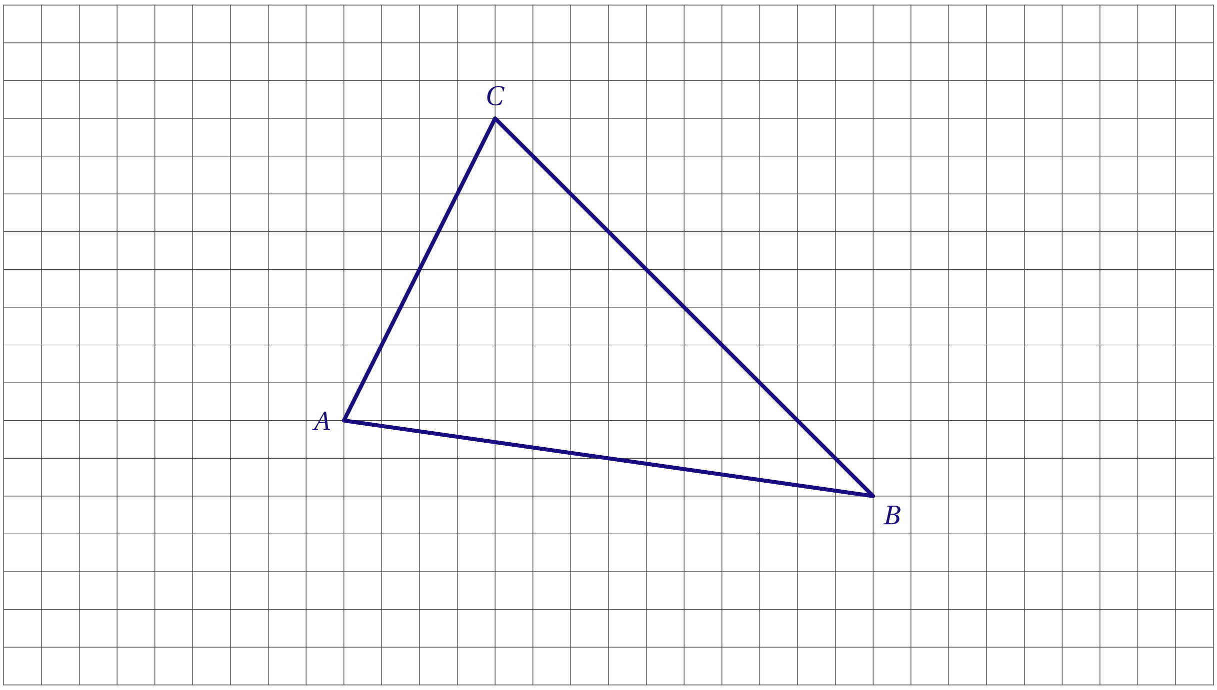
ABC est un triangle.



1. Placer les points M et N défini par $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
2. Les points C, M et N sont-ils alignés ?

EXERCICE 4

ABC est un triangle.



1. Placer le point D défini par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
2. Soit I le milieu du segment $[BC]$. Placer le point G défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
3. Les points G, I et D sont-ils alignés ?

SUJET A

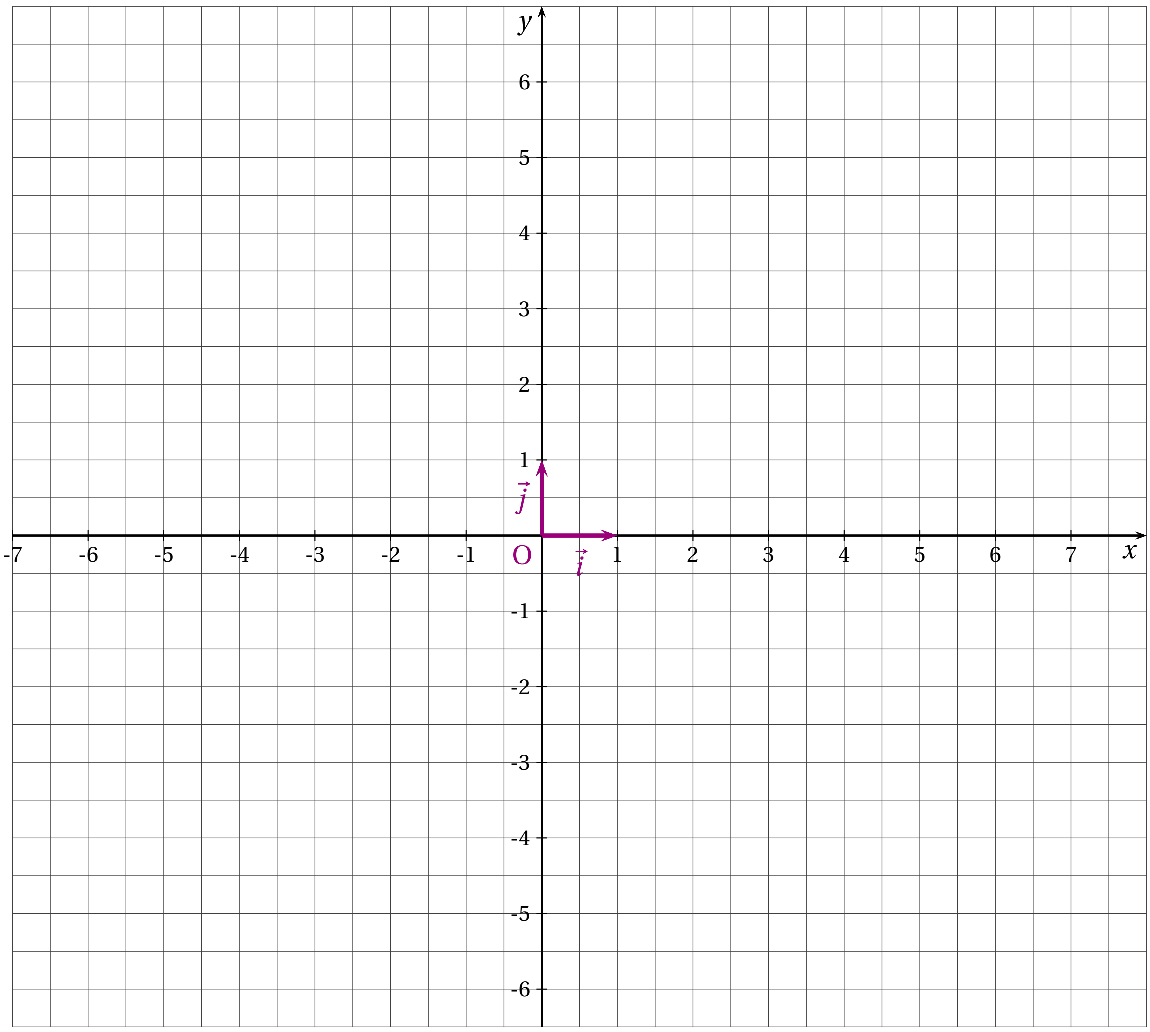
EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(4x^2 - 25\right) - (2x-5)(2-3x)$.

1. Calculer $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.
2. Factoriser l'expression de $f(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.



1. Placer les points $A\left(-\dfrac{1}{2};5\right)$, $B\left(\dfrac{11}{2};1\right)$, $C(1;-3)$ et $E\left(\dfrac{3}{2};-5\right)$.
2. a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b) Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Calculer les coordonnées du point M centre du parallélogramme $ABCD$.
4. Les points A, M et E sont-ils alignés ?
5. a) Calculer les distances AB, BE et AE.

   b) Quelle est la nature du triangle ABE ?

SUJET B

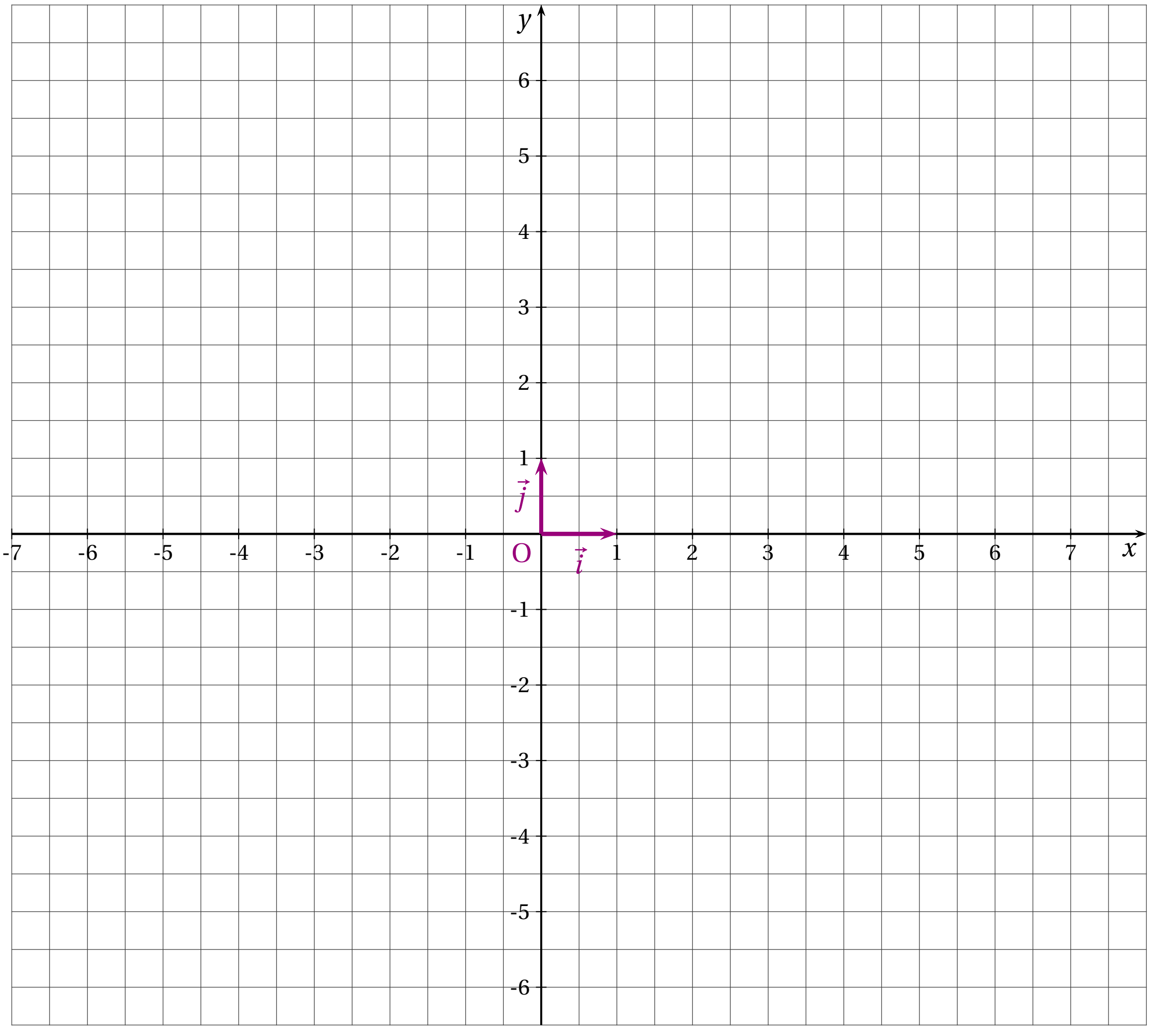
EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(9x^2-16\right)-(3x-4)(2-5x)$.

1. Calculer $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)$.
2. Factoriser l'expression de $f(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)\leqslant 0$.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.



1. Placer les points $A\left(1;\dfrac{11}{2}\right)$, $B\left(-5;\dfrac{3}{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ et $E\left(-1;-\dfrac{9}{2}\right)$.
2. a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b) Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Calculer les coordonnées du point M centre du parallélogramme $ABCD$.
4. Les points A, C et E sont-ils alignés ?
5. a) Calculer les distances AB, BE et AE.

   b) Quelle est la nature du triangle ABE ?

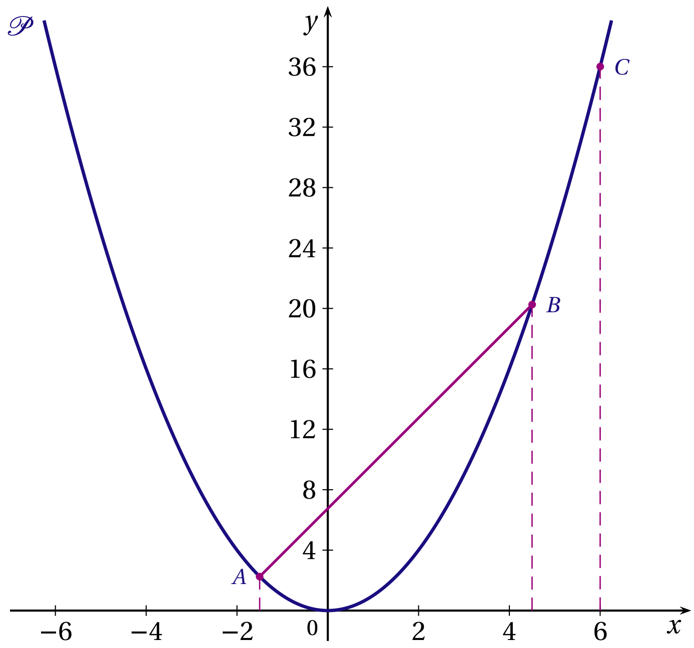
EXERCICE 1

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les images des réels : $\left(-\dfrac{5}{3}\right)$; 10^{-3} ; $2-\sqrt{3}$ et $2\sqrt{3}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 8 ?
3. Soit a un réel de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{3}\right]$. Donner un encadrement de a^2.

EXERCICE 2

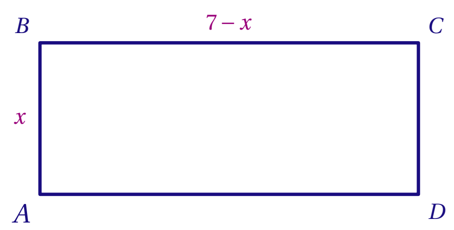
A, B et C sont trois points de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ d'abscisses respectives $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $\dfrac{9}{2}$ et 6.



1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer les coordonnées du point D appartenant à la parabole $\mathscr{P}$ pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

EXERCICE 3

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = x$ et $BC = 7 - x$. On note $f(x)$ l'aire du rectangle $ABCD$.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour le réel x ?
2. Déterminer la valeur de x pour que l'aire du rectangle $ABCD$ soit maximale.
   En déduire l'aire maximale du rectangle $ABCD$.
3. a) Calculer l'aire du rectangle pour $x = 3$.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 12$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x - 12$.

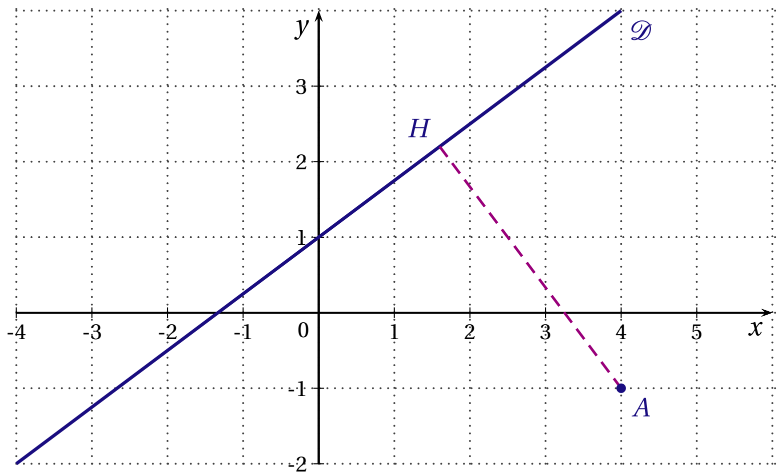
1. Donner le tableau de variation de la fonction f.
2. a) Calculer $f(-3)$.

   b) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 21$.
3. Soit m un réel appartenant à l'intervalle $[-3;5]$. Donner un encadrement de $f(m)$.
4. a) Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = 2 \times \left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right]$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{3}{4}x + 1$ et le point A de coordonnées $(4;-1)$. AH est la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

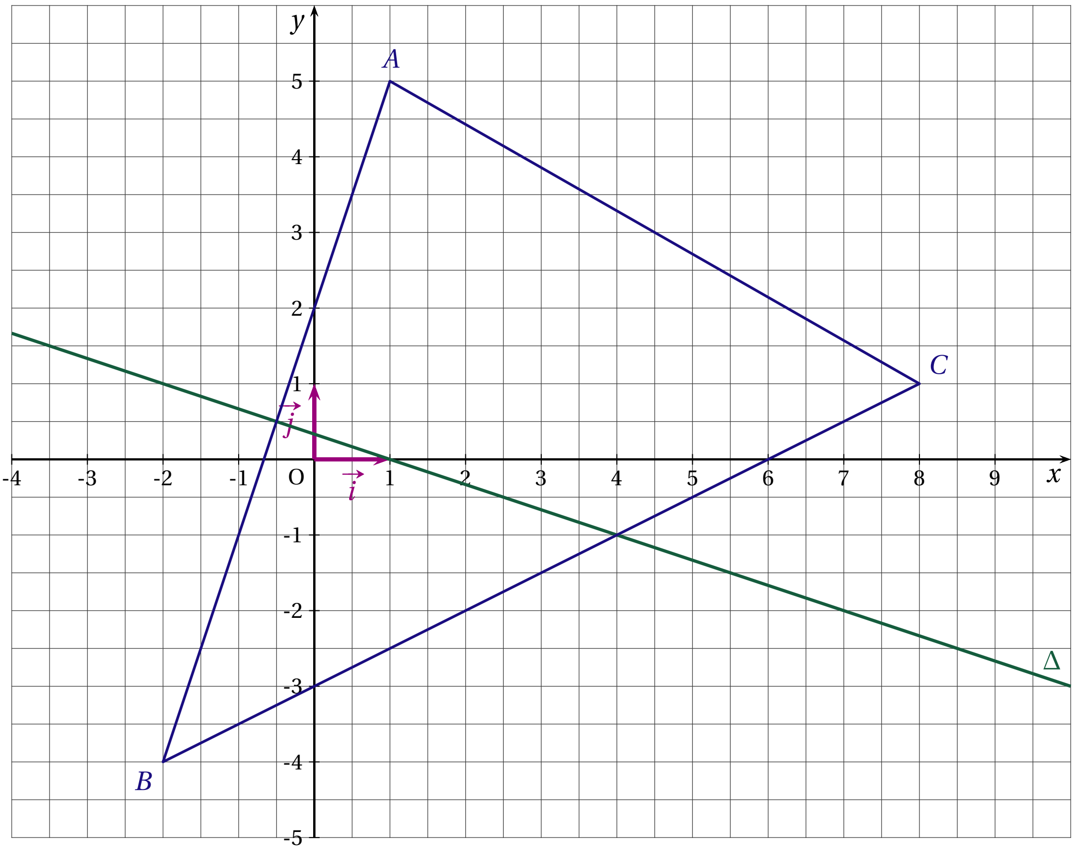


1. Soit $M\left(x; \frac{3}{4}x + 1\right)$ un point de la droite $\mathscr{D}$.

   a) Exprimer en fonction de x les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

   b) Montrer que $AM^2 = \frac{25}{16}x^2 - 5x + 20$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{25}{16}x^2 - 5x + 20$.
3. En déduire la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$.
4. Calculer les coordonnées du point H.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(1;5)$ $B(-2;-4)$ et $C(8;1)$ ainsi que la droite Δ d'équation $y=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}$.



PARTIE A

1. a) Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
   b) Le point I appartient-il à la droite Δ ?
2. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point C et parallèle à la droite Δ.
   Tracer la droite $\mathscr{D}$.
3. On admet que la droite Δ est la médiatrice du segment $[AB]$.
   Que représente la droite $\mathscr{D}$ pour le triangle ABC ?

PARTIE B

1. Déterminer une équation de la droite (BC).
2. a) Soit $M\left(x;\dfrac{x}{2}-3\right)$ un point de la droite (BC). Montrer que $AM^2=\dfrac{5}{4}x^2-10x+65$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{5}{4}x^2-10x+65$.
3. On note AH la distance du point A à la droite (BC).
   a) Calculer les coordonnées du point H.
   b) Déterminer une équation de la hauteur (AH).

PARTIE C

1. Résoudre le système $S:\begin{cases} y=-2x+7 \\ y=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{11}{3}\end{cases}$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Soit K le point de coordonnées $(2;3)$. Les droites (BK) et (AC) sont-elles perpendiculaires ? Justifier.

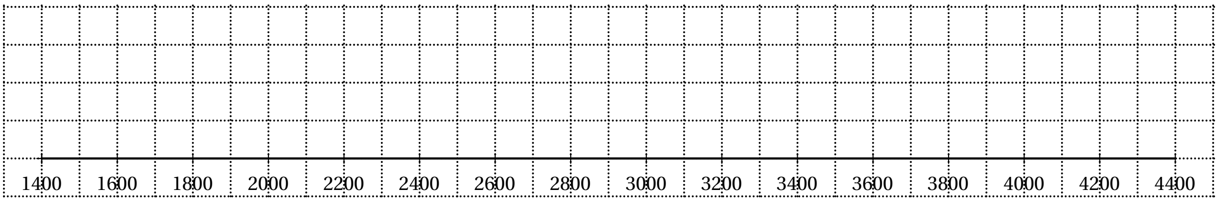
EXERCICE 1

1. Compléter le tableau ci-dessous qui donne la distribution des salaires mensuels bruts des 100 salariés d'une entreprise.

Salaires en euros	1600	1820	2100	2430	2870	3240	4180
Effectifs	14	20	18	16	14	10	8
Fréquences cumulées croissantes							

2. a) Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartiles.

   b) Représenter la distribution des salaires à l'aide d'un diagramme en boîte.



3. Calculer le pourcentage de la masse salariale perçue par l'ensemble des salariés dont le salaire est inférieur ou égal à la médiane.
4. Calculer le montant du salaire mensuel brut moyen.

EXERCICE 2

Soit f la fonction inverse définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Calculer l'image par f de chacun des nombres réels suivants :

   a) -10^2 b) $-\dfrac{5}{3}$ c) 5×10^{-3}

2. Calculer l'image par f de chacun des nombres réels suivants sans laisser de racine carrée au dénominateur :

   a) $-\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

EXERCICE 3

Soit $x \neq -2$ un réel.

1. Pour quelles valeurs de x le réel $A = 1 - \dfrac{2}{x+2}$ admet-il un inverse ?
2. Donner l'expression en fonction de x de l'inverse de A.

EXERCICE 4

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

   a) $-0{,}2 < x < -0{,}1$ b) $x \leqslant -\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{2}{5} < x \leqslant 5$ d) $x \geqslant 10^{-2}$

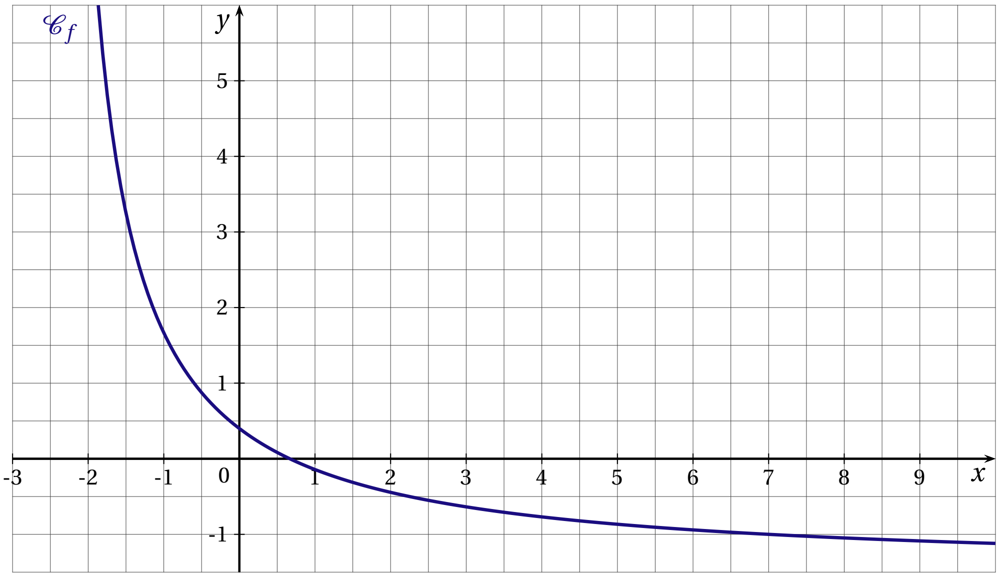
2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} \geqslant -\dfrac{2}{3}$

EXERCICE 5

1. Résoudre l'équation $\dfrac{3x}{3-2x}=2$.
2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{5-4x}{3x-2}\leqslant 3$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{2-3x}{2x+5}$.
Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est tracée en annexe ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. a) Calculer l'image de (-1) par la fonction f.
   b) Quel est l'antécédent de (-1) par la fonction f ?
2. a) Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{9{,}5}{2x+5}-1{,}5$.
   b) Soient a et b deux réels tels que $-\dfrac{5}{2}<a<b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 2$.

EXERCICE 1

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité qui nécessitent deux composants notés a et b.
Les articles peuvent être défectueux en raison de la défaillance d'un des deux composants ou des deux composants.
Les résultats obtenus lors des contrôles effectués avant la mise en vente des articles ont permis d'établir que 88 % des articles fabriqués ne sont pas défectueux, 8 % des articles ont un composant a défectueux et 7 % des articles ont un composant b défectueux.
On choisit au hasard un des articles fabriqués pour le contrôler. On note A l'évènement : « le composant a est défectueux » et B l'évènement : « le composant b est défectueux ».

1. Traduire par une phrase l'évènement $A \cup B$. Donner la probabilité de l'évènement $A \cup B$.
2. Montrer que la probabilité que les deux composants sont défectueux est égale à 0,03.
3. Calculer la probabilité que sur cet article il n'y a que le composant a qui soit défectueux.

EXERCICE 2

Une étude sur réalisée sur l'ensemble des 2 700 salariés d'une entreprise a permis d'établir les résultats suivants :

— 216 salariés ont entre 15 et 24 ans, 62 % des salariés ont entre 25 et 49 ans et 810 salariés ont plus de 50 ans.

— 2 025 salariés ont un emploi à durée indéterminée.

— 4 % des salariés ayant un emploi à durée indéterminée ont entre 15 et 24 ans et 64 % des salariés ayant un emploi à durée indéterminée ont entre 25 et 49 ans.

1. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la répartition des effectifs selon l'âge et le type de contrat :

	15-24 ans	25-49 ans	Plus de 50 ans	Total
Emplois à durée indéterminée				2 025
Autres catégories				
Total	216		810	2 700

2. On choisit la fiche de paye d'un salarié de cette entreprise. On admet que chacune de ces fiches possède la même probabilité d'être choisie.
   On considère les évènements suivants :
   — J « La fiche choisie est celle d'un salarié ayant entre 15 et 24 ans » ;
   — M « La fiche choisie est celle d'un salarié ayant entre 25 et 49 ans » ;
   — S « La fiche choisie est celle d'un salarié ayant plus de 50 ans » ;
   — D « La fiche choisie est celle d'un salarié ayant un emploi à durée indéterminée ».
   a) Définir par une phrase l'évènement $S \cap D$ puis calculer sa probabilité.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement « La fiche choisie est celle d'un salarié ayant entre 25 et 49 ans ou ayant un emploi à durée indéterminée ».
3. On établit la fiche de paye d'un salarié ayant entre 15 et 24 ans.
   Calculer la probabilité que la fiche soit celle d'un salarié n'ayant pas un emploi à durée indéterminée.

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 10$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

PARTIE B

1. Exprimer, en fonction de x et y, l'aire et le périmètre d'un rectangle de dimensions x et y.
2. On considère les rectangles de dimensions x et y dont l'aire est égale au périmètre.
   a) Montrer que $y = \dfrac{2x}{x-2}$ avec $x \neq 2$.
   b) Existe-t-il des rectangles dont l'aire est égale au périmètre et dont un des côtés est inférieur ou égal à 2 ?
3. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $]2;12]$.

En utilisant la courbe $\mathscr{C}$, déterminer tous les rectangles de dimensions entières, comprises entre 1 et 10, tels que l'aire est égale au périmètre

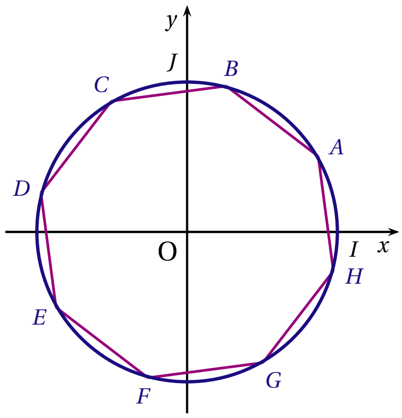
EXERCICE 1

Simplifier chacune des expressions suivantes, où x est un réel :

1. $A = \sin(-x) + \cos(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x)$.
2. $B = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos(-x) + \sin(-x))^2$.
3. $C = \cos^4 x - \sin^4 x - 2\cos^2 x$.

EXERCICE 2

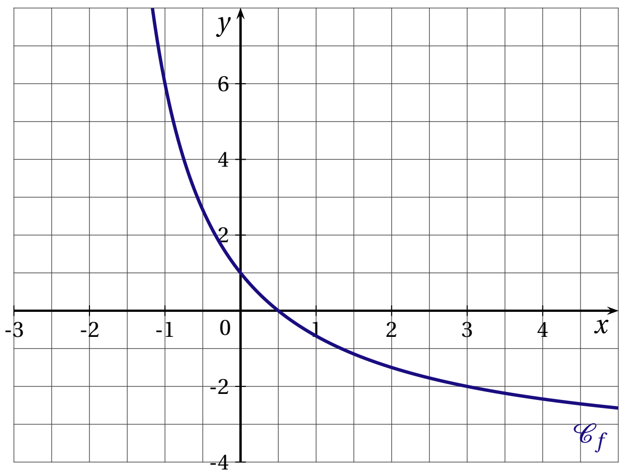
Sur le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(\mathrm{O}; I, J)$, on a tracé le polygone régulier $ABCDEFGH$.



1. Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique le point A est l'image du réel $\dfrac{\pi}{6}$.
   À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce polygone ?
2. Donner les coordonnées des points A et C.
3. Quel est le point de coordonnées $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$?
4. Les points B et F sont-ils symétriques par rapport à l'origine O du repère $(\mathrm{O}; I, J)$?
5. On donne $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
   a) Calculer $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$. En déduire les coordonnées du point B.
   b) Calculer les coordonnées du point F.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2-4x}{x+2}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Résoudre l'équation $f(x) = -3$.
2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1{,}5) = 7$ et $g(1) = 2$.
   a) Tracer la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction g dans le repère précédent.
   b) Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.
3. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$ on a $f(x) - g(x) = \dfrac{2(x-3)(x+1)}{x+2}$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$. En déduire les positions relatives de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.