Les équations de droite

Exercice 1

Dans un repère (O, i, j), soit A(2 ; -1) et $\vec{u}$(-2 ; 2).

a) Déterminer une équation de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) Tracer la droite d' d'équation x + y + 2 = 0.

c) Les droites d et d' sont-elles parallèles ?

Exercice 2

Soit A(4 ; -3), B(7 ; 2) et u(6 ; -2).

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ ainsi que des points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NB} = \vec{u}$.

Exercice 3

On donne A(-2 ; 7), B(-3 ; 5) et C(4 ; 6).

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 4

Ecrire une équation de la droite (AB) où A(-1 ; -2) et B(-5 ; -4).

Exercice 5 - Vrai ou Faux ?

La droite d a pour équation 2x + 3y - 5 = 0.

a) d passe par l'origine du repère.

b) d passe par A(2 ; 1/3).

c) d a pour vecteur directeur $\vec{u}$(-1 ; $\frac{2}{3}$).

d) d a pour coefficient directeur $\frac{2}{3}$.

Exercice 6

Soit la droite (d) d'équation $5x - y - 2 = 0$.

Déterminer une équation de la droite (d') passant par A(2 ; -1) et parallèle à (d).

Exercice 7

Déterminer un vecteur directeur de la droite d'équation :

a) 3x - 7y + 4 = 0

b) x = -y

c) 8y - 4x = 0

d) x = 4

e) y - 5 = 0

f) x = y

Exercice 8

On considère les deux droites d et d' d'équations respectives 2x - y + 3 = 0 et 2x - y - 1 = 0.

Que peut-on dire des droites d et d' ?

Exercice 9

Soit B(-5 ; 1) et C(2 ; -4).

Trouver les coordonnées du point A commun à (BC) et à l'axe des abscisses.

Exercice 10

On donne les points M(-1 ; 3), N(8 ; -4) et X(5 ; a) où a est un réel.
Comment choisir a pour que les points M, N et X soient alignés ?

Exercice 11

Déterminer y pour que D soit situé sur la parallèle à (AB) passant par C lorsque
A(7 ; 2), B(3 ; -3), C(0 ; 2) et D(8 ; y).

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

a) Placer les points A(1,5 ; 1,5), B(0 ; 3), C(-1 ; 0) et D(0 ; -3).

b) Ecrire une équation pour chacune des droites (BC) et (AD).
Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

c) Soit M le milieu de [AB] et N celui de [CD]. Calculer les coordonnées de M et de N.
Montrer que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$ où k est un réel que l'on précisera.
Que peut-on en déduire pour la droite (MN) ? Montrer que (MN) passe par O.

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère quatre points A(-1 ; 2), B(1 ; -1), C(2 ; 4) et D(6 ; -2).

a) Faire une figure.

b) Montrer que ABDC est un trapèze et non un parallélogramme.

c) Soit I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB).

d) Soit K le milieu de [BC] et L le point tel que $2\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD}$. Monter que les points I, J, K et L sont alignés.

Exercice 14

Dans un plan muni d'un repère, on considère un triangle ABC où A(-3 ;0), B(5 ; 0) et C(6 ; -6).
Soit A', B' et C' les milieux des côtés [BC], [AC] et [AB].

a) Calculer les coordonnées des points A', B' et C'.

b) Déterminer une équation de la droite (AA'), de la droite (BB') et de la droite (CC').

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection G des droites (AA') et (BB').

d) Le point G est-il sur la droite (CC') ?

e) L'équation x - y + 4 = 0 est-elle une équation de (AC') ?

Correction

Exercice 1

Rappel :
La droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.
Réciproquement ; la droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$ a une équation de la forme ax + by + c = 0 ; le coefficient c étant à déterminer avec un point de la droite.

a) Une équation de (d) est de la forme : $2x + 2y + c = 0$. Déterminons c :
A appartient à (d) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d) :
2 × 2 + 2 × (-1) + c = 0 ; on obtient : c = -2.
donc (d) : $2x + 2y - 2 = 0$ ou encore : $x + y - 1 = 0$ et l'équation réduite de (d) est : $y = -x + 1$.

b) Pour tracer la droite d'équation $x + y + 2 = 0$, il suffit de connaître deux points de cette droite et de les relier.

x	0	-2
y	-2	0

Il suffit donc de placer les points A(0,-2) et B(-2,0). La droite (d') est la droite (AB).

c)

Deux droites d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulemnt si $m = m'$. Ou encore, si elles ont pour équation : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c = 0$, elles sont parallèles si et seulemrnt si $ab' = a'b$.

Le coefficient directeur de (d) est -1 et celui de (d') est -1. Les droites d et (d') sont donc parallèles.

Exercice 2

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$: $\overrightarrow{AB}(3; 5)$.
Soit $M(x, y)$.

$$\overrightarrow{AM} = \vec{u} \iff \begin{cases} x - x_A = x_{\vec{u}} \\ y - y_A = y_{\vec{u}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6 + 4 \\ y = -2 + (-3) \end{cases}.$$

D'où : M(10 ; -5).

De même : Soit $N(a, b)$:

$$\overrightarrow{NB} = \vec{u} \iff \begin{cases} x_B - a = x_{\vec{u}} \\ y_B - b = y_{\vec{u}} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 7 - 6 \\ b = 2 - (-2) \end{cases}.$$

D'où : N(1 ; 4).

Exercice 3

$$\text{ABCD parallèlogramme} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = x_A - x_B + x_C \\ y_D = y_A - y_B + y_C \end{cases}$$

Ainsi : D(-2 - (-3) + 4 ; 7 - 5 + 6)
Donc : D(5 ; 8).

Exercice 4

Deux méthodes possibles (même encore plus).
• **1$^{\text{ère}}$ méthode :**
A et B appartiennent à la droite (AB) donc leurs coordonnées vérifient l'équation de la droite (d), on a donc

le système :
$\begin{cases} -2 = -a + b \\ -4 = -5a + b \end{cases}$ et il nous faut déterminer a et b :
En soustrayant les deux équations on obtient facilement la valeur de a et en remplaçant dans une des deux équations on obtient b :
$\begin{cases} -2 = -a + b \\ 2 = 4a \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = b - a \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$
Une équation de la droite (AB) est : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

• **2$^{\text{ème}}$ méthode :**
On a $x_A \neq x_B$, donc une équation de la droite (AB) est de la forme : $y = ax + b$.
Déterminons le coefficient directeur de (AB) : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$. L'équation de (AB) est donc de la forme $y = \dfrac{x}{2} + b$. Reste à déterminer b, pour cela comme précédemment, on dit que A appartient à (AB) et donc ses coordonnées vérifient l'équation :
$-2 = \dfrac{1}{2} \times (-1) + b$; soit $b = -\dfrac{3}{2}$.
Et on conclut de la même façon.

Exercice 5

a) FAUX (le couple (0 ; 0) n'est pas solution de l'équation, ou encore, ce n'est pas une fonction linéaire !)
b) VRAI 2×2+3×(1/3)-5 = 0.
c) VRAI
d) FAUX (-2/3).

Exercice 6

La droite (d) a pour équation $5x - y - 2 = 0$ ou encore $y = 5x - 2$.
Le coefficient directeur est donc $m = 5$.
Comme (d') est parallèle à (d), alors le coefficient directeur m' de (d') vérifie : m' = m = 5.
Donc une équation de (d') est de la forme : $y = 5x + p$.
De plus, A(2 ; -1) appartient à (d') donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d') : -1 = 5 × 2 + p. Soit : p = -11.
Ainsi, l'équation réduite de (d') est : $y = 5x - 11$. Une autre équation de (d') est : $5x - y - 11 = 0$.

Exercice 7

> Si (d) : ax+by+c = 0 alors un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}$(-b ; a)

a) 3x-7y+4 = 0 ; vecteur directeur : $\vec{u}$(7 ;3)
b) x=-y ; vecteur directeur : $\vec{u}$(-1 ;1)
c) 8y-4x =0 ; vecteur directeur : $\vec{u}$(-8 ;-4) ou encore : $\vec{v}$(2 ;1)
d) x = 4 ; vecteur directeur : $\vec{u}$(0 ;1)
e) y -5= 0 ; vecteur directeur : $\vec{u}$(-1 ; 0)
f) x=y ; vecteur directeur : $\vec{u}$(1 ;1)

Exercice 8

(d) : 2x-y+3 = 0 ; coefficient directeur : m=2

(d') : 2x-y-1 = 0 ; coefficient directeur : m'=2.
m=m'. Les droites (d) et (d') sont donc parallèles.

Exercice 9

- Déterminons une équation de (BC) par une des deux méthodes de l'exercice 4 . (BC) : 5x+7y-18 = 0.
- axe des abscisses : y = 0.

Le point A vérifie ces deux équations : $y_A = 0$ et $5x_A - 18 = 0$. On en déduit : A(18/5 ; 0).

Exercice 10

Deux méthodes :

- **1ère méthode** (qui concerne le thème choisi ici : équations de droite) :

On détermine l'éqaution de la droite (MN) puis on détermine a pour que X appartienne à cette droite :
(MN) : coefficient directeur : m=$-\frac{7}{9}$; 9y = -7x + p.
M appartient à (MN) donc : 27 =7 + p ; soit p = 20.
Une équation de (MN) est : 7x+9y-20=0.
X appartient à (MN) $\iff 7\times5 + 9\times a - 20 = 0 \iff 9a = -15 \iff a = -\frac{5}{3}$

- **2ème méthode** (avec les vecteurs) :

M,N et X alignés $\iff \overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MX}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{MN}(9 ;-7)$ et $\overrightarrow{MX}(6 ;a-3)$.
M,N et X alignés $\iff$ il existe un réel k non nul tel que : 9 = 6k et -7 = k(a-3) $\iff k = \frac{3}{2}$ et $a = -\frac{5}{3}$.

Exercice 11

Déterminons l'équation de la droite (d) parallèle à (AB) et passant par C.

- coefficient directeur de (AB) : m=$\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$. Et (d) parallèle à (AB) $\iff$ m'=m=$\frac{5}{4}$.
- L'équation de (d) est donc de la forme : y = $\frac{5}{4}$x + p.

C appartient à (d) donc : 2 = 0+p soit p=2.
L'équation réduite de (d) est : y = $\frac{5}{4}$x+2.
D appartient à (d) $\iff y = \frac{5}{4}\times 8 + 2 \iff y = 12$. Donc D(8 ;12).

Exercice 12

b) * droite (BC) :
- coefficient directeur : m = $\frac{-3}{-1}$=3.
- Une équation de (BC) est de la forme : y = 3x + p.
- B appartient à (BC) donc 3 = 0+p soit p=3.
- donc (BC) : y = 3x+3.

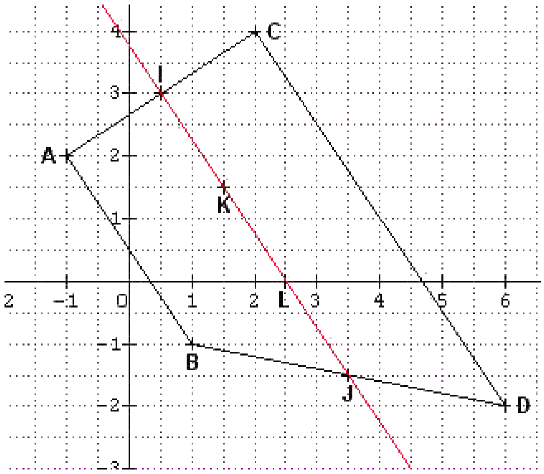
* droite (AD) : y=3x-3.
Ces deux droites ont même coefficient directeur égal à 3, elles sont donc parallèles.

c) M milieu de [AB] : M$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$; soit M(0,75 ; 2,25).
N milieu de [CD] : N$\left(\frac{x_C+x_D}{2}; \frac{y_C+y_D}{2}\right)$; soit N(-0,5 ; -1,5).
$\overrightarrow{MN}$(-1,25 ; -3,75) et $\overrightarrow{BC}$(-1 ;-3). donc : $\overrightarrow{MN}$=-1,25 $\overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Donc le coefficient directeur de la droite (MN) est 3.

Une équation de (MN) est donc de la forme : y = 3x+p. Et M appartient à (MN) donc : 2,25 = 3×0,75 + p ; soit p = 0.
Ainsi, (MN) : y = 3x. Donc (MN) est une droite représentée par une fonction linéaire ; elle passe donc par l'origine O.

Exercice 13

a)



b) Montrons que (AB)//(CD) mais que (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.
coefficients directeurs : $m_{(AB)}=\frac{-3}{2}$ $m_{(AC)}=\frac{2}{3}$ $m_{(CD)}=\frac{-3}{2}$ $m_{(BD)}=\frac{-1}{5}$.
Ce qui montre bien que (AB) et (CD) sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur mais que (AC= et (BD) ne le sont pas.
Donc ABDC est un trapèze.

c) I(0,5 ; 3) et J(3,5 ; -1,5). donc $m_{(IJ)}=\frac{-4,5}{3}=-\frac{3}{2}=m_{(AB)}=m_{(CD)}$.
Donc (IJ) est parallèle à (AB) et (CD).

d) K(1,5 ; 1,5). Il faut montrer que I,J,K et L sont alignés.
L est défini par $2\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AD}$, donc D est le milieu de [AD] et L(2,5 ; 0).
équation de (IJ) : $y=-\frac{3}{2}\times x+p$; $3=-\frac{3}{2}\times 0,5+P$ soit p = 3,75. ; donc (IJ) : $y=-\frac{3}{2}x+3,75$.
et (KL) : $m_{(KL)}=\frac{-1,5}{1}=-\frac{3}{2}$. $y=-\frac{3}{2}\times x+p'$ et $\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}+p'$ soit p' = 3,75. donc (IJ) et (KL) sont confondues (même équation de droite).
On en conclut que les points I, J, K et L sont alignés.

Exercice 14

a) A'(5,5 ; -3) ; B'(1,5 ; -3) ; C'(1 ; 0).

b) (AA') : $m_{(AA')}=\frac{-3}{8,5}=\frac{-6}{17}$. une équation de (AA') : 6x + 17y + 18 = 0.
(BB') : $m_{(BB')}=\frac{-3}{-3,5}=\frac{6}{7}$ une équation de (BB') : -6x + 7y + 30 = 0.
(CC') : $m_{(CC')}=\frac{6}{-5}$; une équation de (CC') : 6x+5y - 6 = 0.

c) Les coordonnées du point G vérifient les équations de (AA') et (BB') donc sont solutions du système :

S$\begin{cases} 6x + 17y + 18 = 0 \\ -6x + 7y + 30 = 0 \end{cases}$

Soit :

S$\begin{cases} x = \dfrac{-17y - 18}{6} \\ 24y + 48 = 0 \end{cases}$

S$\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = -2 \end{cases}$

G(8/3 ; -2)

d) 1$^{\text{ère}}$ méthode : G est l'intersection de (AA') et (BB') qui sont deux médianes du triangle ABC ; donc G est le centre de gravité du triangle et (CC') la troisième médiane donc G appartient à (CC').
2$^{\text{ème}}$ méthode : 6×(8/3)+5×(-2)-6 = 16 - 10-6 = 0. Les coordonnées de G vérifient l'équation de (CC') donc G appartient à la droite (CC').

e) Les coordonnées de A et C' sont-elles solutions de l'équation x-y+4 = 0 ?
-3-0+4 = 1 donc A n'est pas sur cette droite ; donc l'équation x-y+4 = 0 n'est pas une équation de la droite (AC').