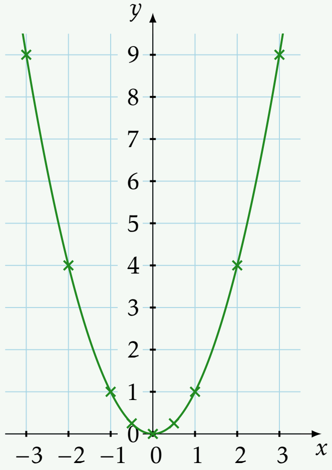
A Fonctions carré et racine carrée

A.1 Découverte

1 Compléter le tableau de valeurs, tracer une allure de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$, puis dresser son tableau de variations et son tableau de signes.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

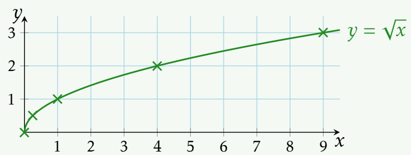
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	
$f(x)$		$+$	0	$+$	



2 Compléter le tableau de valeurs, tracer une allure de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, puis dresser son tableau de variations et son tableau de signes.

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	
$f(x)$		$+$	



A.2 Faire ses gammes

3 Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice. *Justifier*.

1. 3^2 ; 4^2
2. $(-7)^2$; $(-5)^2$
3. $(-8{,}05)^2$; $8{,}05^2$
4. $(-\pi)^2$; $(-4)^2$

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc :

1. $3 < 4 \Rightarrow 3^2 < 4^2$.
2. $-7 < -5 \Rightarrow (-7)^2 > (-5)^2$.
3. $-8{,}05 = 8{,}05 \Rightarrow (-8{,}05)^2 = 8{,}05^2$.
4. $-4 < -\pi \Rightarrow (-4)^2 > (-\pi)^2$.

4 Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant, sans effectuer de calcul :

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 ; \pi^2 ; (-6)^2 ; 3{,}14^2 ; (-1)^2$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 < (-1)^2 < 3{,}14^2 < \pi^2 < (-6)^2$$

5 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Calculer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(9)$.
2. Pourquoi ne peut-on pas calculer la racine d'un nombre négatif ?
3. Quel est le domaine de définition de f ?
4. Déterminer l'ordonnée à l'origine et le zéro de f.
5. Répondre aux deux question précédentes pour la fonction $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.
   NB : $\sqrt[3]{x}$, qui se lit « racine cubique de x » est le nombre qui élevé au cube vaut x.

1. $f(-2)$ n'existe pas.
   $f(0) = 0$ et $f(9) = 3$.
2. Car un nombre élevé au carré est toujours positif.
3. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.
4. $f(0) = 0$, donc l'ordonnée à l'origine de f est zéro.
   $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 0^2 = x$. Donc le zéro de f est 0.
5. Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$, en effet, contrairement à la fonction racine carrée, la racine cubique d'un nombre négatif existe.
   Ordonnée à l'origine : $\sqrt[3]{0} = 0$ car $0^3 = 0$.

$\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0^3 \Leftrightarrow x = 0$. Donc le zéro de g est 0.

6 Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sqrt{18}$ 2. $\sqrt{\frac{16}{3}}$ 3. $\sqrt{48}$ 4. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

1. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2}}$
2. $\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{3}}}$.
3. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \boxed{4\sqrt{3}}$
4. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

7 En justifiant, et sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres suivants :

1. $\sqrt{25}$; $\sqrt{49}$ 2. $\sqrt{12{,}1}$; $\sqrt{12{,}12}$ 3. $\sqrt{\frac{4}{17}}$; $\sqrt{\frac{3}{17}}$ 4. $2\sqrt{8}$; 7

1. $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{49} = 7$ donc $\sqrt{25} < \sqrt{49}$.
2. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   Donc :
$$12{,}1 < 12{,}12 \Rightarrow \sqrt{12{,}1} < \sqrt{12{,}12}$$
3. De même :
$$\frac{4}{17} > \frac{3}{17} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{17}} > \sqrt{\frac{3}{17}}$$
4.
$$\begin{aligned} \sqrt{8} < \sqrt{9} &\Rightarrow 2\sqrt{8} < 2\sqrt{9} \\ &\Rightarrow 2\sqrt{8} < 6 \\ &\Rightarrow 2\sqrt{8} < 7 \end{aligned}$$

A.3 Repérer des erreurs

Toutes les productions suivantes sont fausses. Expliquez pourquoi.

8 Si $-3 \le x \le 5$, alors on peut affirmer que $9 \le x^2 \le 25$.

Si $-3 \le x \le 5$, alors x^2 est compris entre 0 et 25, soit $0 \le x^2 \le 25$.

x	$-\infty$	-3	0	5	$+\infty$
$f(x)$	↘	9 ↘	0	↗ 25	↗

A.4 Exercices d'entraînement

9 Soit x un réel tel que $3 < x \le 7$.
En justifiant, déterminer un encadrement de :

1. x^2 2. $7x^2$ 3. x^2+2

1. La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   Donc :
$$\begin{aligned} 3 < x \le 7 &\Rightarrow 3^2 < x^2 \le 7^2 \\ &\Rightarrow 9 < x^2 \le 49 \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} 9 < x^2 \le 49 &\Rightarrow 7 \times 9 < 7x^2 \le 7 \times 49 \\ &\Rightarrow 63 < 7x^2 \le 343 \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} 9 < x^2 \le 49 &\Rightarrow 9+2 < x^2+2 \le 49+2 \\ &\Rightarrow 11 < x^2+2 \le 51 \end{aligned}$$

10 Soit x un réel tel que $-5 \le x < -2$. En justifiant, déterminer un encadrement de :

1. x^2 2. $2x^2-1$ 3. $-x^2+3$

1. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
   Donc :
$$\begin{aligned} -5 \le x < -2 &\Rightarrow (-5)^2 \ge x^2 > (-2)^2 \quad \text{(le sens est inversé)} \\ &\Rightarrow 25 \ge x^2 > 4 \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} 25 \ge x^2 > 4 &\Rightarrow 50 \ge 2x^2 > 8 \\ &\Rightarrow 49 \ge 2x^2 - 1 > 7 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}25 \geq x^2 > 4 &\Rightarrow -25 \leq -x^2 < -4\\ &\Rightarrow -22 \leq -x^2+3 < -1\end{aligned}$$

11 Soit x un réel tel que $-1 \leq x < -\frac{1}{3}$. En justifiant, déterminer un encadrement de :

1. $x^2+\frac{1}{2}$ 2. $-5x^2-1$ 3. $-\frac{1}{4}x^2$

1. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
Donc :

$$-1 \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow 1 \geq x^2 > \frac{1}{9}$$

2.

$$\begin{aligned}1 \geq x^2 > \frac{1}{9} &\Rightarrow -5 \leq -5x^2 < -\frac{5}{9}\\ &\Rightarrow -6 \leq -5x^2-1 < -\frac{14}{9}\end{aligned}$$

3.

$$1 \geq x^2 > \frac{1}{9} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4}x^2 < -\frac{1}{36}$$

12 Dans chacun des cas, donner, en justifiant, un encadrement de $\sqrt{x}$.

1. $1 < x < 2$ 2. $7 \leq 4x < 16$ 3. $4 < x < 12$
4. $1{,}44 \leq x < \pi^2+2\pi+1$

1. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ (cette justification est valable pour toutes les questions suivantes).
Donc :

$$\begin{aligned}1 < x < 2 &\Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{x} < \sqrt{2}\\ &\Rightarrow 1 < \sqrt{x} < \sqrt{2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}7 \leq 4x < 16 &\Rightarrow \sqrt{7} \leq \sqrt{4x} < \sqrt{16}\\ &\Rightarrow \sqrt{7} \leq \sqrt{4}\times\sqrt{x} < 4\\ &\Rightarrow \sqrt{7} \leq 2\sqrt{x} < 4\\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{2} \leq \sqrt{x} < 2\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}4 < x < 12 &\Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{x} < \sqrt{12}\\ &\Rightarrow 2 < \sqrt{x} < \sqrt{4\times 3}\\ &\Rightarrow 2 < \sqrt{x} < 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

4.

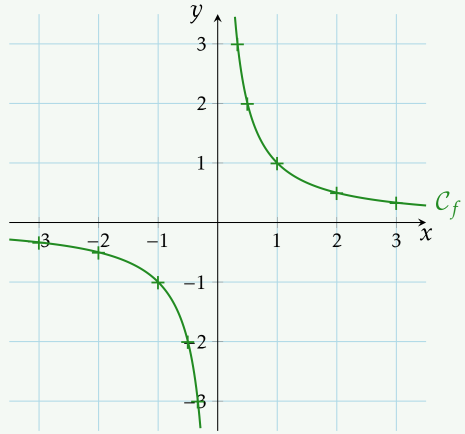
$$\begin{aligned}1{,}44 \leq x < \pi^2+2\pi+1 &\Rightarrow 1{,}44 \leq x < (\pi+1)^2\\ &\Rightarrow \sqrt{1{,}44} \leq \sqrt{x} < \sqrt{(\pi+1)^2}\\ &\Rightarrow 1{,}2 \leq \sqrt{x} < \pi+1\end{aligned}$$

B Fonction inverse

B.1 Découverte

13 Compléter le tableau de valeurs ci-dessous, dresser une allure de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, puis dresser son tableau de variations.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$
$f(x)$	$-$	‖	$+$

B.2 Faire ses gammes

14 En justifiant, et sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres suivants :

1. $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$
2. $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{9}$
3. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi-1}$
4. $-\frac{11}{35}$; $\frac{7}{24}$

1. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
Donc :
$$7 < 8 \Rightarrow \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$$
2. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.
Donc :
$$-9 < -5 \Rightarrow -\frac{1}{9} > \frac{1}{5}$$
3. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
Donc :
$$\pi - 1 < \pi \Rightarrow \frac{1}{\pi-1} > \frac{1}{\pi}$$
4. $-\frac{11}{35} < 0$ et $\frac{7}{24} > 0$, donc $-\frac{11}{35} < \frac{7}{24}$.

15 Ranger l'inverse des nombres suivants dans l'ordre croissant :
$$-0{,}4;\frac{4}{7};-1;\frac{4}{9};-1{,}06;-0{,}03;\frac{5}{4};-1{,}6;\frac{11}{4}$$

Trions déjà les nombres négatifs.
$$-1{,}6 < -1{,}06 < -1 < -0{,}4 - 0{,}03$$
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$, donc :
$$-\frac{1}{1{,}6} > -\frac{1}{1{,}06} > -1 > -\frac{1}{0{,}4} > -\frac{1}{0{,}03}$$
Trions ensuite les nombres positifs.
$$\frac{4}{9} < \frac{4}{7} < \frac{5}{4} < \frac{11}{4}$$
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc :
$$\frac{1}{\frac{4}{9}} > \frac{1}{\frac{4}{7}} > \frac{1}{\frac{5}{4}} > \frac{1}{\frac{11}{4}}$$
Soit :
$$\frac{9}{4} > \frac{7}{4} > \frac{4}{5} > \frac{4}{11}$$
On a donc finalement :
$$-\frac{1}{0{,}03} < -\frac{1}{0{,}4} < -1 < -\frac{1}{1{,}06} < -\frac{1}{1{,}6} < \frac{4}{11} < \frac{4}{5} < \frac{7}{4} < \frac{9}{4}$$

B.3 Repérer des erreurs

Toutes les productions suivantes sont fausses. Expliquez pourquoi.

16 La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction inverse n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, elle est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ (aussi noté $\mathbb{R}^*$).
Il est en revanche correct d'affirmer : "la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

B.4 Exercices d'entraînement

17 Déterminer un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas, en justifiant :

1. $\frac{2}{7} < x \leq \frac{5}{8}$
2. $-\frac{3}{2} \geq x > -\frac{5}{3}$

1. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc :
$$\frac{2}{7} < x \leq \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{1}{\frac{2}{7}} > \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\frac{5}{8}}$$
$$\Rightarrow \frac{7}{2} > \frac{1}{x} \geq \frac{8}{5}$$
2. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$, donc :
$$-\frac{3}{2} \geq x > -\frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{1}{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{x} < -\frac{1}{\frac{5}{3}}$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{1}{x} < -\frac{3}{5}$$

18 Déterminer le plus petit ensemble qui contient l'inverse de x dans chacun des cas :

1. $7 < x$
2. $-5 \leq x < 0$
3. $\frac{7}{2} \geq x > 0$
4. $-\frac{1}{6} \leq x$

1. $\frac{1}{x} \in \left]0; \frac{1}{7}\right[$.
2. $\frac{1}{x} \in \left]-\infty; -\frac{1}{5}\right]$.
3. $\frac{1}{x} \in \left[\frac{2}{7}; +\infty\right[$.
4. $\frac{1}{x} \in]-\infty; +\infty[$.

C Fonction cube

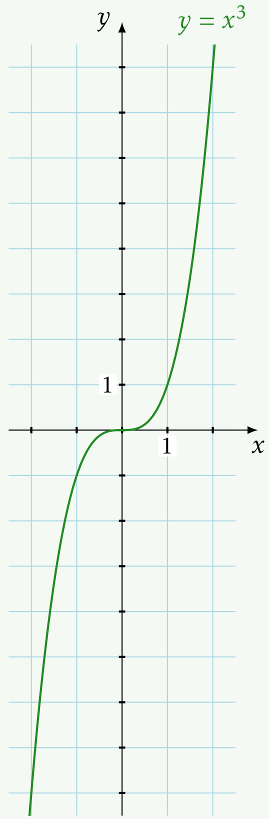
C.1 Découverte

19 Compléter le tableau de valeurs ci-dessous, dresser une allure de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3$, puis dresser son tableau de variations.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	



C.2 Faire ses gammes

20 En justifiant, et sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres suivants :

1. 3^3 ; 5^3
2. $(-2)^3$; 2^3
3. $(-45)^3$; $(-47)^3$
4. $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{4}{7}\right)^3$

1. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Donc : $3 < 5 \Rightarrow 3^3 < 5^3$
2. $-2 < 2 \Rightarrow (-2)^3 < 2^3$
3. $-45 > -47 \Rightarrow (-45)^3 > (-47)^3$.
4. $-\frac{4}{3} < -\frac{4}{7} \Rightarrow \left(-\frac{4}{3}\right)^3 < \left(-\frac{4}{7}\right)^3$.

21 Sans utiliser la calculatrice, ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant :

$$(-3)^3; \pi^3; \sqrt{3}^3; \left(\sqrt{2}-2\right)^3; 0$$

$$-3 < \sqrt{2}-2 < 0 < \sqrt{3} < \pi$$

Donc :

$$(-3)^3 < \left(\sqrt{2}-2\right)^3 < 0 < \sqrt{3}^3 < \pi^3$$

22 Sans utiliser la calculatrice, ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant :

$$-\frac{\pi^3}{8}; 5\sqrt{5}; 8; -\frac{27}{8}; -\frac{64}{125}; \sqrt{2}^3$$

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{3}{2} < -\frac{4}{5} < \sqrt{2} < \sqrt{5}$$

Donc :

$$-\frac{\pi^3}{8} < -\frac{27}{8} < -\frac{64}{125} < \sqrt{2}^3 < \underbrace{5\sqrt{5}}_{\sqrt{5}^3}$$

23 Déterminer les racines cubiques des nombres suivants :

1. -64
2. $\frac{27}{8}$
3. -8
4. $\frac{64\pi^3}{125}$

1. -4
2. $\frac{3}{2}$
3. -2
4. $\frac{4\pi}{5}$

24 Déterminer les racines cubiques des nombres suivants :

1. $7\sqrt{7}$
2. $\sqrt{216}$

1. $7\sqrt{7} = \sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}$.
   Donc : $\sqrt[3]{7\sqrt{7}} = \sqrt{7}$.
2. $\sqrt{216} = \sqrt{6\times 6\times 6} = \sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}$.
   Donc $\sqrt[3]{\sqrt{216}} = \sqrt{6}$

D Fonction valeur absolue

25 Soit $f : x \mapsto |x|$.

1. Calculer $|8|$, $|-8|$, $|0|$ et $|16-31|$.
2. Que représente géométrique $|a-b|$, avec $a,b \in \mathbb{R}$?
3. Tracer le graphique de f sur $[-5;5]$ dans un repère orthonormé.
4. Soit $g : x \mapsto \sqrt{x^2}$. A-t-on $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

1. $|8| = 8$.
   $|-8| = -(-8) = 8$.
   $|0| = 0$.
   $|16-31| = |-15| = -(-15) = 15$.
2. $|a-b|$ représente la distance entre les réels a et b sur la droite des réels.
3. *Voir courbe représentative du cours.*
4. Oui, c'est un point sur lequel il faut être vigilant.
   Il est faux d'écrire que $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En effet, lorsque $x < 0$, alors $\sqrt{x^2} = -x$.
   Par contre, on a bien $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

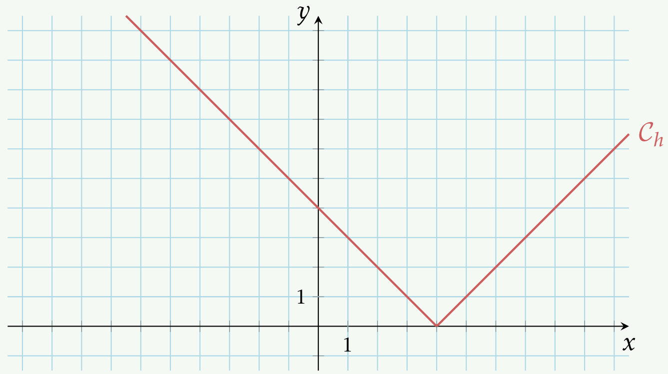
26 Soit $h : x \mapsto |x-4|$

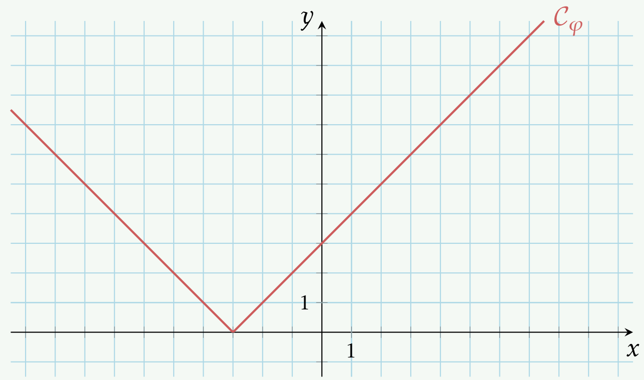
1. Compléter : $h(x) = \begin{cases} \dots & \text{si} \quad \dots \\ \dots & \text{si} \quad \dots \end{cases}$
2. Détermine le domaine de définition, le(s) zéro(s) et l'ordonnée à l'origine de h.
3. Tracer le graphique de h sur $[-10;10]$ dans un repère orthonormé.

1. $h(x) = \begin{cases} x-4 \text{ si } x-4 \geq 0 \\ -(x-4) \text{ si } x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 \text{ si } x \geq 4 \\ -x+4 \text{ si } x < 4 \end{cases}.$
2. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow |x-4| = 0 \\ &\Leftrightarrow x-4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

   Donc h admet un zéro : 4.
   $h(0) = |0-4| = |-4| = -(-4) = 4$.
   L'ordonnée à l'origine de h est 4.
3.





27 Soit $\varphi : x \mapsto |x+3|$

1. Compléter : $\varphi(x) = \begin{cases} \dots & \text{si} \quad \dots \\ \dots & \text{si} \quad \dots \end{cases}$
2. Détermine le domaine de définition, le(s) zéro(s) et l'ordonnée à l'origine de φ.
3. Tracer le graphique de φ sur $[-10;10]$ dans un repère orthonormé.

1. $\varphi(x) = \begin{cases} x-3 \text{ si } x+3 \geq 0 \\ -(x+3) \text{ si } x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3 \text{ si } x \geq -3 \\ -x-3 \text{ si } x < -3 \end{cases}.$
2. $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 0 &\Leftrightarrow |x+3| = 0 \\ &\Leftrightarrow x+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \end{aligned}$$

   Donc φ admet un zéro : -3.
   $\varphi(0) = |0+3| = |3| = 3$.
   L'ordonnée à l'origine de k est 3.
3.