Chapitre 10 Probabilités

I. Le vocabulaire des probabilités

Définition: Une expérience est dite aléatoire lorsqu'il est impossible de prévoir le résultat: celui-ci est soumis au hasard. On connaît cependant l'ensemble des résultats possibles.

Un résultat possible pour une expérience aléatoire est appelé issue de cette expérience.

L'ensemble de tous les résultats possibles est appelé univers. On le note en général Ω.

Exemple: Une urne contient deux billes portant le numéro 1, deux le numéro 2, trois le numéro 3 et une bille le numéro 4.

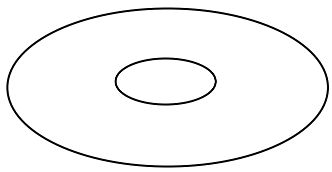
Tirer une bille de l'urne et noter le numéro sorti , est une expérience aléatoire . On ne peut pas dire d'avance le nombre qui sortira. Pourtant on connaît tous les résultats possibles: 1, 2, 3 ou 4.

Pour la situation précédente, l'univers est constitué des issues 1, 2, 3 et 4.

On note $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$

Définition: Un évènement est une partie (ou sous ensemble) de l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Si une issue appartient à l'évènement A, on dit qu'elle réalise A ou que A est réalisé par cette issue.



On note $A \subset \Omega$

Exemple: Dans l'expérience qui consiste à lancer un dé à 6 faces, l'évènement A: "obtenir un nombre pair" est défini par $A = \{2; 4; 6\}$

L'issue 2 réalise l'évènement A, en revanche A n'est pas réalisé par l'issue 1.

Cas particuliers:

- L'évènement qui ne contient aucune éventualité, noté $\emptyset$ est appelé évènement impossible. Il n'est jamais réalisé puisqu'il ne contient aucune issue.
- Ω est appelé évènement certain, il est toujours réalisé puisqu'il contient toutes les issues.
- Un évènement formé d'une seule issue est un évènement élémentaire.

Exemple: On lance un dé équilibré à 6 faces.

L'univers de cette expérience est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
L'évènement P: "obtenir un nombre pair" est $P = \{2; 4; 6\}$
L'évènement 'Obtenir un 7" est un évènement impossible
L'évènement "obtenir un nombre inférieur ou égal à 6" est Ω.
L'évènement "Obtenir un 3" est un évènement élémentaire.

Act 1 p 328

II. Loi de probabilité

Définition: Définir une loi de probabilité pour une expérience aléatoire sur l'univers $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$, c'est associer à chaque issue e_i un nombre p_i dans l'intervalle [0;1] tel que: $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$
Ce nombre p_i est appelé probabilité de l'issue e_i.

Remarque: *La probabilité d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 : $0 \leq p(A) \leq 1$
*La probabilité d'un évènement impossible est égale à 0
*La probabilité d'un évènement certain est égale à 1

Exemple : On dispose de deux urnes opaques. L'une contenant un papier portant le numéro 2 et un papier portant le numéro 3. L'autre urne contient un papier portant le numéro 0 et un papier portant le numéro 1. On tire au hasard un papier de l'urne 1 et un papier de l'urne 2 et on note le produit des numéros obtenus.

Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire et la loi de probabilité associée.

$2 \times 0 = 0$ $2 \times 1 = 2$ $3 \times 0 = 0$ $3 \times 1 = 3$

L'univers est donc $E = \{0; 2; 3\}$.

La loi de probabilité est donc :

Issue	0	2	3
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Propriété: Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues ont la même probabilité p de se réaliser, on dit qu'il y a équiprobabilité. Les n issues de l'expérience aléatoire ont la même probabilité de se produire, donc $p = \frac{1}{n}$.

Exemple: Soit un dé équilibré à 6 faces. Alors, chaque face à autant de chances qu'une autre d'apparaître.
Donc $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$

Issue x_i	1	2	3	4	5	6	TOTAL
Probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Définition: La probabilité d'un événement A, notée p(A), est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Exemple: On lance un dé équilibré à 6 faces. Déterminer la probabilité de l'évènement A: "Obtenir un multiple de 3 "

$A = \{3,6\}$ donc la probabilité de l'évènement est $p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

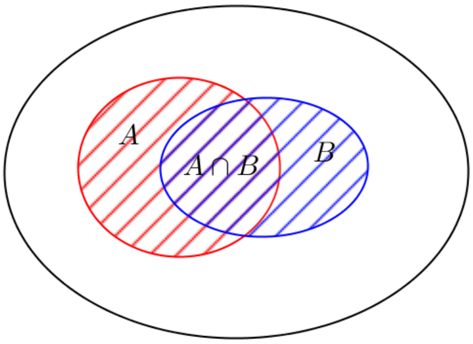
6, 7, 8 p 333
39, 40, 41, 42, 43, 44, 47, 49, 51 p 342
10 p 334

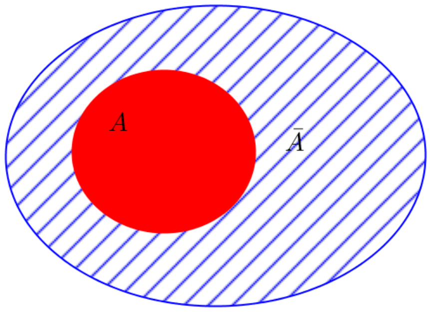
Act 4 p 329

III. Calculer des probabilités

Définition: Soit A et B deux évènements

- L'intersection des deux évènements A et B est l'événement, noté $A \cap B$, formé des issues qui réalisent à la fois l'évènement A **et** l'évènement B.
- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont incompatibles.
- L'union des événements A et B est l'évènement, noté $A \cup B$, formé des issues qui réalisent l'évènement A ou l'évènement B ou les deux.
- L'évènement contraire d'un événement A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note $\bar{A}$.





Exemple: On tire au hasard l'un des nombres entiers de 1 à 10. On considère les évènements:

A:"Le nombre tiré est divisible par 5" et B:"Le nombre tiré est strictement inférieur à 6."

$A = \{5; 10\}$ $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ $A \cap B = \{5\}$ $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 10\}$

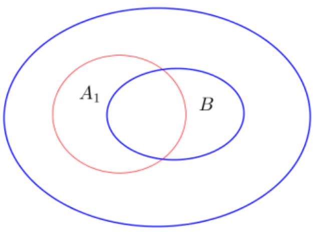
$\bar{A}$:"Le nombre tiré n'est pas divisible par 5" $\bar{A} = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$

$\bar{B}$:"Le nombre tiré est supérieur ou égal à 6" $\bar{B} = \{6; 7; 8; 9; 10\}$

Propriété: Pour tous les évènements A et B on a $P(A \cup B) = P(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Pour tout évènement A, $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Démonstration: Soit A_1 l'évènement formé des issues de A qui ne sont pas dans B



Alors $P(A) = P(A_1) + P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A_1) + P(B)$

Ainsi, $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A_1) + P(B) + P(A) - P(A_1)$

$= P(B) + P(A)$

Démonstration: $A \cup \bar{A} = \Omega$ et A *et* $\bar{A}$ sont incompatibles ($A \cap \bar{A} = \emptyset$) donc : $p(A) + p(\bar{A}) = p(\Omega) = 1$.

Remarque: Deux évènements A et B sont incompatibles lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun : $A \cap B = \emptyset$

On a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exemple: Dans un jeu de 32 cartes, soit A l'évènement "Tirer un cœur"

Soit B l'évènement "Tirer une dame"

Quelle est la probabilité de tirer une dame ou un cœur" ?

Alors $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $\quad P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{32}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

La probabilité de tirer une dame ou un cœur est de $\frac{13}{32}$

64, 65, 66 p 346
14, 16, 17 p 337
67, 68, 69, 71, 72 p 346
73, 74, 75, 76, 77 p 347

Problèmes : 86, 87, 90, 92, 93, 94, 99, 100, 101 p 351