Probabilités

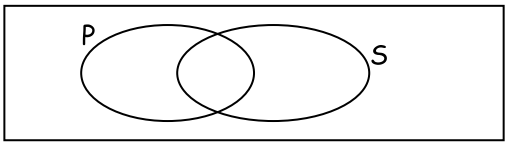
Fiche(1)

Revoir le vocabulaire des ensembles et des probabilités

Exemple 1

Dans une classe de 30 élèves, un professeur de mathématiques a donné deux exercices à faire pour la séance suivante. 12 ont fait le premier et 14 ont fait le second. On en dénombre 4 qui ont fait les deux. On désigne par P l'ensemble des élèves qui ont fait le premier et par S l'ensemble de ceux qui ont fait le second.

On désigne par $\bar{P}$ le complémentaire de l'ensemble P ; c'est-à-dire l'ensemble des élèves qui n'ont pas fait le premier exercice et par $\bar{S}$ le complémentaire de S.



1) Dans le schéma ci-dessous, colorier en bleu l'ensemble $P \cap S$, en jaune l'ensemble $P \cap \bar{S}$ en vert l'ensemble $\bar{P} \cap S$.
2) Quel est le nombre d'élèves qui n'ont fait ni le premier ni le deuxième exercice ?
3) Donner une relation entre card($P \cup S$) et les 3 nombres card(P), card(S) et card($P \cap S$).
4) Le professeur interroge au hasard un élève de cette classe.
   a) Quelle est la probabilité que cet élève ait fait :
      - les deux exercices ?
      - un seul exercice ?
      - aucun exercice?
   b) Déterminer une relation entre ces trois nombres.
5) Les élèves n'ayant pas fait les deux exercices sont punis. On sélectionne au hasard un élève puni.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'il n'ait fait :
      - qu'un exercice ?
      - aucun exercice ?
   b) Déterminer une relation entre ces deux nombres.

Exemple 2

Une urne contient un certain nombre de boules jaunes, rouges, vertes et noires.
Une expérience consiste à extraire une boule de cette urne et à noter sa couleur.
Une simulation de cette expérience a été réalisée sur ordinateur un grand nombre de fois. Certaines fréquences obtenues sont consignées dans le tableau suivant.

Couleur	jaune	rouge	verte	noire
Fréquence	0,15		0,3	0,2

1) Si l'on prend comme univers l'ensemble {jaune, rouge, verte, noire} est-on en situation d'équiprobabilité ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule jaune ou verte ?
3) Quelle est la probabilité de ne pas avoir tiré une boule noire ?
4) À propos, quel est le nombre effacé?

Exemple 3

Une expérience consiste à jeter simultanément deux dés à 6 faces non pipés.

1) Donner quatre éléments de l'univers Ω lié à cette expérience. Quel est le nombre d'éléments de Ω ?
2) Quelle est la probabilité de l'événement élémentaire (2 ; 4) ?
3) Déterminer la probabilité de l'événement A : « Le plus grand des deux nombres est égal à 5 ».

Exemple 4

Un dé à six faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de sorte que le « 6 » a une probabilité d'apparition double de celles des autres numéros. Quelle est avec ce dé la probabilité d'obtenir un résultat pair ?

Exemple 5

Parmi les 80 filles qui étaient en classe de Terminale au Lycée des Iles il y a 10 ans : 36 sont aujourd'hui salariées ; 39 sont mères de famille ; 15 sont salariées et mères de famille. On choisit au hasard une de ces 80 femmes.
Considérons les événements A : « la femme choisie est salariée » et B : « la femme choisie est mère de famille ».
Quelle est la probabilité pour que la femme choisie ne soit ni salariée ni mère de famille ?

Solution 1 : diagramme de Venn

Solution 2 : tableau de Caroll (A ; $\bar{A}$; B ; $\bar{B}$)

Solution 3 : événement contraire de $A \cup B$

Probabilités

Fiche(2)

Exercice 1

Dans chacune des situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné.

1. dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. A : « les deux élèves sont des filles »

2. Dans un groupe de suisses et de belges, on discute avec une personne.

B : « la personne est un homme belge ».

3. Au restaurant, Arthur prend un plat et un dessert.

C : « Arthur prend une viande et une glace ».

4. A une loterie, Elise achète trois billets.

D : « l'un des billets au moins est gagnant »,

E : « Deux billet au maximum sont gagnants ».

Exercice 2

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « Tirer une boule blanche »

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge »

C : « Tirer une boule noire ou une boule rouge »

1. A et B sont-ils incompatibles ?

2. B et C sont-ils incompatible ?

3. Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 3

Lors d'un jet de deux dés cubiques, on s'intéresse aux événements suivants :

A : « la somme obtenue est au moins égale à 5 »

B : « la somme obtenue est au plus égale à 5 »

C : « la somme obtenue est strictement inférieur à 3 »

1. A et B sont-ils contraire ?

2. $\overline{B}$ et C sont-ils incompatibles ?

3. Traduire $\overline{C}$ par une phrase.

4. A et $\overline{C}$ sont-ils incompatibles ?

Exercice 4

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On note :

A l'évènement : « La carte choisie est un pique »

B l'évènement : « La carte choisie est rouge »

C l'évènement : « La carte choisie est une figure »

1. Déterminer les probabilités de A, B, C, $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cup B$, $A\cup C$

2. Déterminer la probabilité de l'événement D : « la carte choisie n'est ni une figure, ni un pique ».

Exercice 5

On jette une pièce de monnaie trois fois de suite.

1. Donner la liste de tous les résultats possible en notant P pour pile et F pour face.

2. Donner la probabilité des événements suivants : A : « le tirage ne comporte que des Piles », B : « Le tirage comporte au moins une fois Face ».

Exercice 6

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate. On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1. Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate ?

2. Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate ?

3. Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate ?

4. Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

Exercice 7

Lors d'un référendum, deux questions étaient posées. 65% des personnes ont répondu « oui » à la première question, 51% ont répondu « oui » à la seconde question, et 46% ont répondu « oui » aux deux questions.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « oui » à l'une ou l'autre des questions ?

2. Quelle est la probabilité qu'une personne ait répondu « non » aux deux questions ?

Exercice 8

On lance un dé à six faces. On note pi la probabilité de sortie de la face marquée i. Ce dé est truqué de telle sorte que les probabilités des faces sont $p_1=0,1$; $p_2=0,2$; $p_3=0,3$; $p_4=0,1$; $p_5=0,15$

Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice 9

On lance un dé à six faces. On suppose que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro inscrit sur elle.

Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Probabilités

Fiche(3)

Probabilités conditionnelles

A. Risque médical

Dans l'étude d'une certaine maladie, on voudrait savoir si le fait de fumer joue un rôle aggravant.
On dispose de la statistique ci-contre concernant une population de 20 000 personnes.

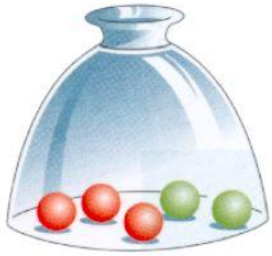
	Malades	Sains
Fumeurs	400	4 600
Non fumeurs	600	14 400

On choisit au hasard une personne de cette population.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
2. Si l'on sait que c'est un fumeur, quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
3. Si l'on sait que ce n'est pas un fumeur, quelle est la probabilité qu'elle soit malade?
4. Quelle conclusion peut-on tirer de ces résultats ?

B. Tirages successifs

Une urne contient trois boules rouges et deux boules vertes.



1. Un jeu consiste à tirer deux boules au hasard successivement **sans remise.** On gagne si la deuxième boule tirée est rouge.
   - **a.** Quelle est la probabilité de gagner ?
   - **b.** Blaise tire une première boule : elle est rouge. Est-il en droit de se réjouir ?
   - **c.** Simon tire une première boule : elle est verte. Est-il en droit de se réjouir ?
2. Les deux tirages se font maintenant **avec remise.** Répondre aux mêmes questions que précédemment.

Probabilités conditionnelles

Fiche(3)

A. Risque médical

Dans l'étude d'une certaine maladie, on voudrait savoir si le fait de fumer joue un rôle aggravant.
On dispose de la statistique ci-contre concernant une population de 20 000 personnes.

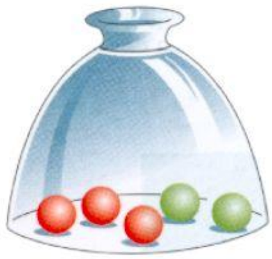
	Malades	Sains
Fumeurs	400	4 600
Non fumeurs	600	14 400

On choisit au hasard une personne de cette population.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
2. Si l'on sait que c'est un fumeur, quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
3. Si l'on sait que ce n'est pas un fumeur, quelle est la probabilité qu'elle soit malade?
4. Quelle conclusion peut-on tirer de ces résultats ?

B. Tirages successifs

Une urne contient trois boules rouges et deux boules vertes.



1. Un jeu consiste à tirer deux boules au hasard successivement **sans remise.** On gagne si la deuxième boule tirée est rouge.
   - **a.** Quelle est la probabilité de gagner ?
   - **b.** Blaise tire une première boule : elle est rouge. Est-il en droit de se réjouir ?
   - **c.** Simon tire une première boule : elle est verte. Est-il en droit de se réjouir ?
2. Les deux tirages se font maintenant **avec remise.** Répondre aux mêmes questions que précédemment.

Probabilités

Fiche(4)

Probabilité conditionnelle (avec un tableau)

Exercice 1

Une enquête portant sur 5 000 clients d'une grande surface spécialisée en informatique a montré que 80 % des clients avaient bénéficié des conseils d'un vendeur.

De plus 70 % des clients qui ont bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat alors que 20 % seulement des clients qui n'ont pas bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat.

1) a) Combien de clients ont bénéficié des conseils d'un vendeur?

   b) Parmi les clients ayant bénéficié des conseils d'un vendeur, combien ont effectué un achat?

Compléter le tableau suivant:

	Ont effectué un achat	N'ont pas effectué d'achat	Total
Ont bénéficié des conseils d'un vendeur			
N'ont pas bénéficié des conseils d'un vendeur			
Total			5 000

2) On interroge au hasard un des clients sur lequel a porté l'enquête et on admet qu'il y a équiprobabilité.

   On considère les évènements suivants:

   A: « le client a bénéficié des conseils d'un vendeur » ,

   B : « le client a effectué un achat ».

   a) Déterminer la probabilité de l'événement A puis celle de l'événement B.

   b) Définir par une phrase les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$.

   c) Calculer les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$ des événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

3) On interroge au hasard un des clients qui a effectué un achat et on admet qu'il y a équiprobabilité.

   Quelle est la probabilité qu'il ait bénéficié des conseils d'un vendeur?

Exercice 2

Tous les résultats des probabilités seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Le personnel d'une entreprise est constitué de 180 femmes et de 200 hommes. Afin d'appliquer la loi antitabac, on réalise une étude dans l'entreprise, sur le comportement des employés face au tabac.

Les résultats de l'étude indiquent que :

- parmi les hommes, la moitié fume régulièrement et 20 % sont des fumeurs occasionnels ;
- une femme sur trois fume régulièrement ;
- autant d'hommes que de femmes fument occasionnellement.

1. Compléter le tableau suivant, en justifiant les calculs :

	Hommes	Femmes	Total
Fumeurs réguliers			
Fumeurs occasionnels	40		
Non fumeurs			140
Total			380

2. On choisit au hasard une personne de l'entreprise. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

a. Calculer la probabilité des événements suivants :

A: « la personne choisie est non fumeur » ;

B : « la personne choisie est une femme ».

b. Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.

c. Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement $A \cup B$, puis calculer sa probabilité.

3. Calculer la probabilité $P_B(A)$. Que représente-t-elle ?

Exercice 3

Dans un lycée qui ne reçoit pas d'interne, la répartition des 895 élèves se fait de la façon suivante:

1. Compléter le tableau ci-contre.

Niveau	Seconde	Première	Terminale	Total
Externes	50		85	195
Demi-pensionnaires	285	220		
Total			280	

2. On rencontre un élève du lycée au hasard. On note :

E l'événement « l'élève rencontré est externe » ;

S l'événement « l'élève rencontré est en seconde »

T l'événement « l'élève rencontré est en terminale ».

En supposant que tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés, calculer les probabilités suivantes *(les résultats numériques seront donnés sous forme décimale, arrondie à 10^{-2})* :

a) $P(E \cap S)$. b) $P(E \cap T)$.

3. a) Les événements E et T sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

b) Citer deux événements incompatibles.

4. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes (*les résultats numériques seront donnés sous forme décimale, arrondie au centième*)

a) $P_S(\bar{E})$. b) $P_E(T)$.

Probabilités

Fiche(4)

Probabilité conditionnelle (avec un tableau) *CORRIGE*

Exercice 1

Une enquête portant sur 5 000 clients d'une grande surface spécialisée en informatique a montré que 80 % des clients avaient bénéficié des conseils d'un vendeur.

De plus 70 % des clients qui ont bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat alors que 20 % seulement des clients qui n'ont pas bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat.

1) a) Combien de clients ont bénéficié des conseils d'un vendeur?
4000
   a) Parmi les clients ayant bénéficié des conseils d'un vendeur, combien ont effectué un achat? 2800
   b) Compléter le tableau suivant:

	Ont effectué un achat	N'ont pas effectué d'achat	Total
Ont bénéficié des conseils d'un vendeur	2800	1200	4000
N'ont pas bénéficié des conseils d'un vendeur	200	800	1000
Total	3000	2000	5 000

2) On interroge au hasard un des clients sur lequel a porté l'enquête et on admet qu'il y a équiprobabilité.
On considère les évènements suivants:
A: « le client a bénéficié des conseils d'un vendeur »
B : « le client a effectué un achat ».
   a) Déterminer la probabilité de l'événement A puis celle de l'événement B. p(A)=4/5=0,8 p(B)=3/5=0,6
   b) Définir par une phrase les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$.
   $A \cap B$: « le client a bénéficié des conseil d'un vendeur et a effectué un achat »
   $A \cup B$: « le client a bénéficié des conseil d'un vendeur ou a effectué un achat »
   c) Calculer les probabilités p $(A \cap B)$ et p $(A \cup B)$ des événements $A \cap B$ et $A \cup B$.
   $P(A \cap B)$=28/50=0,56 $p(A \cup B)$=(28+40-26)/50=0,84
3) On interroge au hasard un des clients qui a effectué un achat et on admet qu'il y a équiprobabilité.
Quelle est la probabilité qu'il ait bénéficié des conseils d'un vendeur? 26/28=0,93

Exercice 2

Tous les résultats des probabilités seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Le personnel d'une entreprise est constitué de 180 femmes et de 200 hommes. Afin d'appliquer la loi antitabac, on réalise une étude dans l'entreprise, sur le comportement des employés face au tabac.

Les résultats de l'étude indiquent que :

- parmi les hommes, la moitié fume régulièrement et 20 % sont des fumeurs occasionnels ;
- une femme sur trois fume régulièrement ;
- autant d'hommes que de femmes fument occasionnellement.

1) Compléter le tableau suivant, en justifiant les calculs :

	Hommes	Femmes	Total
Fumeurs réguliers	100	60	160
Fumeurs occasionnels	40	40	80
Non fumeurs	60	80	140
Total	200	180	380

2) On choisit au hasard une personne de l'entreprise. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.
   a) Calculer la probabilité des événements suivants :
A: « la personne choisie est non fumeur » ; p(A)=7/19
B : « la personne choisie est une femme ». p(B)=9/19
   b) Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.
$A \cap B$: « la personne choisie est une femme non-fumeur » et $p(A \cap B)$=4/19
   c) Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement $A \cup B$, puis calculer sa probabilité.
$A \cup B$: « la personne choisie est une femme ou un non-fumeur » et $p(A \cup B)$=(9+7-4)/19=12/19
3) Calculer la probabilité $P_B(A)$. Que représente-t-elle ?
C'est la probabilité que la personne choisie soit non-fumeur sachant que c'est une femme $P_B(A)$=4/9

Exercice 3

Niveau	Seconde	Première	Terminale	Total
Externes	50	60	85	195
Demi-pensionnaires	285	220	195	700
Total	335	280	280	895

Dans un lycée qui ne reçoit pas d'interne, la répartition des 895 élèves se fait de la façon suivante:
1) Compléter le tableau ci-dessus.
2) On rencontre un élève du lycée au hasard. On note :
E l'événement « l'élève rencontré est externe » ; S l'événement « l'élève rencontré est en seconde » T l'événement « l'élève rencontré est en terminale ».
En supposant que tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés, calculer les probabilités suivantes *(les résultats numériques seront donnés sous forme décimale, arrondie à 10^{-2})* :
   a) $P(E \cap S)$ = 50/895 = 0,06. b) $P(E \cap T)$ = 85/895 = 0,09.
3) a) Les événements E et T sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
P(E) × P(T) = 195/895 × 280/895 = 54600/801025 = 0,68 donc les évènements ne sont pas indépendants.
   b) Citer deux événements incompatibles. Les évènements S et T sont incompatibles.
4) Calculer les probabilités conditionnelles suivantes (*les résultats numériques seront donnés sous forme décimale, arrondie au centième*)
   a) $p_S(E) = \frac{285}{335} = 0{,}85$ b) $p_E(T) = \frac{85}{195} = 0{,}44$

Probabilités

Fiche(5)

Probabilité conditionnelle (avec un arbre)

Exercice 1

Une enquête a montré que:

- avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire (le code), 75 % des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve ;
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80 % des cas;
- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique (on rappelle que les résultats sont connus dès la fin de l'épreuve). On note T l'événement : « Le candidat a travaillé très sérieusement » et R l'événement : « Le candidat a réussi le code ».

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies éventuellement au millième.

1. Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a) Calculer la probabilité de l'événement « Le candidat a travaillé très sérieusement et il a obtenu le code ».

b) Montrer que la probabilité p(R) qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à 0,675.

3. Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?

Exercice 2

Pour fabriquer un appareil on utilise successivement et dans cet ordre deux machines M_1 et M_2.

Partie A : La machine M_1 peut provoquer deux défauts d_1 et d_2. Un relevé statistique permet d'estimer que :

- 4 % des appareils présentent le défaut d_1 et lui seul ;
- 2 % des appareils présentent le défaut d_2 et lui seul ;
- 1 % des appareils présentent à la fois les défauts d_1 et d_2.

On prélève au hasard un appareil à la sortie de M_1.

On note A l'événement : « l'appareil présente le défaut d_1 » ; B l'événement : « l'appareil présente le défaut d_2 ».

a. Calculer les probabilités des événements A et B notées respectivement p(A) et p(B).

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

b. Soit D l'événement : « l'appareil présente au moins un défaut ». Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à 0,07.

c. Quelle est la probabilité pour que l'appareil ne présente aucun défaut ?

Partie B : A la sortie de la machine M_1 les appareils en cours de fabrication passent par la machine M_2 qui peut provoquer un défaut d_3 dans les conditions suivantes :

- 60 % des appareils ayant au moins un défaut en sortant de M_1 présentent le défaut d_3 ;
- 3 % des appareils sans défaut à la sortie de M_1 présentent le défaut d_3.

On prélève au hasard un appareil après les passages successifs dans les machines M_1 et M_2.

On note C l'événement : « l'appareil présente le défaut d_3 ».

a. Traduire les informations précédentes à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Quelle est la probabilité qu'un appareil fabriqué soit sans défaut ?

Exercice 3

Tous les résultats des probabilités seront donnés sous la forme d'un nombre décimal.

Un magasin vend des salons de jardin. Une enquête statistique a montré que :

- 10 % des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table ;
- parmi les personnes qui achètent une table, 80 % achètent un lot de chaises ;
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10 % achètent un lot de chaises.

Une personne entre dans le magasin. Soit T l'événement « la personne achète une table » et C l'événement « la personne achète un lot de chaises ».

1. a) Traduire les indications données à l'aide de probabilités.

b) Traduire cette situation par d'un arbre pondéré.

2. a) Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement $T \cap C$, puis calculer sa probabilité.

b) Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à 0,17.

c) Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a acheté un lot de chaises ?

3. Le magasin vend aussi des appareils électroménagers.

On constate que 15 % des personnes en achètent un et que 1,5 % des personnes achètent à la fois une table et un de ces appareils.

On note E l'événement « la personne achète un appareil électroménager ».

a) Montrer que les événements E et T sont indépendants.

b) Trouver la probabilité que la personne achète un appareil électroménager mais pas de table.

Probabilités

Exercice 4

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.

Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées. Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre. Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient quelles sont bien mélangées.

Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ».

Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.

On appellera F_1 l'événement: « la pomme prélevée provient du premier producteur » ;

F_2 l'événement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur » ;

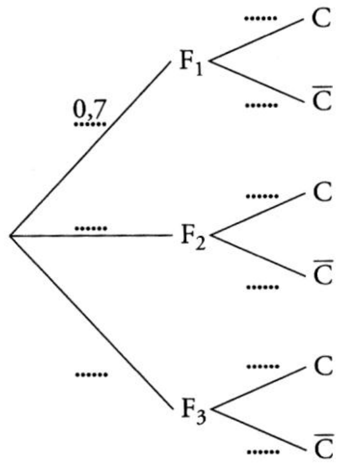
F_3 l'événement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur » ;

C l'événement : « la pomme prélevée a un bon calibre » ;

$\bar{C}$ l'événement : « la pomme prélevée est hors calibre ».

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} près.

1. Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3.
2. Recopier et compléter l'arbre suivant :



3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,144 0.
4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est 0,846 5.
5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».
   Quel calcul permet de justifier cette affirmation ?
   Faire ce calcul et conclure.

Probabilités
Probabilité conditionnelle (avec un arbre)–**CORRIGE**

Fiche(5)

Exercice 1

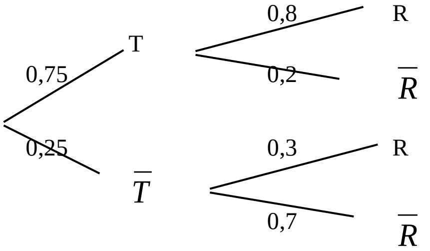
Une enquête a montré que:

- avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire, 75 % des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve ;
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80 % des cas;
- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique (on rappelle que les résultats sont connus dès la fin de l'épreuve). On note T l'événement : « Le candidat a travaillé très sérieusement » et R l'événement : « Le candidat a réussi le code ».

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies éventuellement au millième.

1) Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.



2) a) Calculer la probabilité de l'événement « Le candidat a travaillé très sérieusement et il a obtenu le code ».

$p(T \cap R) = 0,75 \times 0,8 = 0,6$

b) Montrer que la probabilité p(R) qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à 0,675.

$p(R) = p(T \cap R) + p(\overline{T} \cap R) = 0,6 + 0,25 \times 0,3 = 0,675$

3) Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?

$p_{\overline{R}}(T) = \frac{p(\overline{R} \cap T)}{p(\overline{R})} = \frac{0,2 \times 0,75}{1-0,675} = 0,46$

Exercice 2

Pour fabriquer un appareil on utilise successivement et dans cet ordre deux machines M_1 et M_2.

Partie A : La machine M_1 peut provoquer deux défauts d_1 et d_2. Un relevé statistique permet d'estimer que :

- 4 % des appareils présentent le défaut d_1 et lui seul ;
- 2 % des appareils présentent le défaut d_2 et lui seul ;
- 1 % des appareils présentent à la fois les défauts d_1 et d_2.

On prélève au hasard un appareil à la sortie de M_1.

On note A l'événement : « l'appareil présente le défaut d_1 » ; B l'événement : « l'appareil présente le défaut d_2 ».

a) Calculer les probabilités des événements A et B notées respectivement p(A) et p(B). Les événements A et B sont-ils indépendants ?

$p(A) = 0,05$; $p(B) = 0,03$ et $p(A \cap B) = 0,01$ donc les évènements ne sont pas indépendants.

b) Soit D l'événement : « l'appareil présente au moins un défaut ». Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à 0,07.

$p(D) = p(A \cup B) = p(A) \times p(B) - p(A \cap B) = 0,07$

c) Quelle est la probabilité pour que l'appareil ne présente aucun défaut ? $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 0,93$

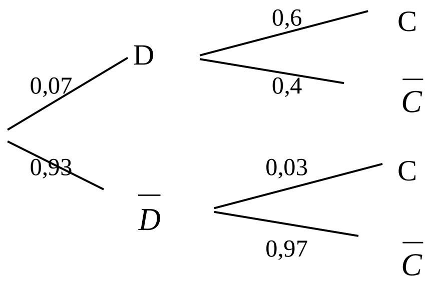
Partie B : A la sortie de la machine M_1 les appareils en cours de fabrication passent par la machine M_2 qui peut provoquer un défaut d_3 dans les conditions suivantes :

- 60 % des appareils ayant au moins un défaut en sortant de M_1 présentent le défaut d_3 ;
- 3 % des appareils sans défaut à la sortie de M_1 présentent le défaut d_3.

On prélève au hasard un appareil après les passages successifs dans les machines M_1 et M_2.

On note C l'événement : « l'appareil présente le défaut d_3 ».

a) Traduire les informations précédentes à l'aide d'un arbre pondéré. →



b) Quelle est la probabilité qu'un appareil fabriqué soit sans défaut ?

On cherche $P(\overline{D} \cap \overline{C}) = 0,93 \times 0,97 = 0,9021$

Exercice 3

Tous les résultats des probabilités seront donnés sous la forme d'un nombre décimal.

Un magasin vend des salons de jardin. Une enquête statistique a montré que :

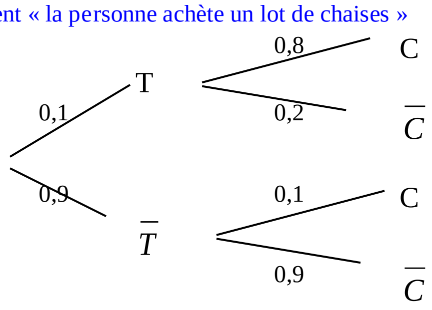
- 10 % des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table ;
- parmi les personnes qui achètent une table, 80 % achètent un lot de chaises ;
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10 % achètent un lot de chaises.

Une personne entre dans le magasin. Soit T l'événement « la personne achète une table » et C l'événement « la personne achète un lot de chaises »

1) a) Traduire les indications données à l'aide de probabilités.

$P(T)=0,1$ $P_T(C)=0,8$ $p_{\overline{T}}(C)=0,1$

b) Traduire cette situation par d'un arbre pondéré. →



2) a) Définir, à l'aide d'une phrase, l'événement $T \cap C$, puis calculer sa probabilité.

$T \cap C$: « la personne achète une table et un lot de chaise »

$P(T \cap C) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$

b) Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à 0,17.

$P(C) = P(T \cap C) + P(\overline{T} \cap C) = 0,08 + 0,9 \times 0,1 = 0,17$

c) Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a acheté un lot de chaises ?

$p_C(\overline{T}) = \frac{p(\overline{T} \cap C)}{p(C)} = \frac{0,09}{0,17} = 0,53$

3) Le magasin vend aussi des appareils électroménagers. On constate que 15 % des personnes en achètent un et que 1,5 % des personnes achètent à la fois une table et un de ces appareils. On note E l'événement « la personne achète un appareil électroménager ».

a) Montrer que les événements E et T sont indépendants.

$P(T \cap E) = 0,015$ $P(T) \times P(E) = 0,1 \times 0,15 = 0,015$ on a $P(T \cap E) = P(T) \times P(E)$ donc les évènements sont indépendants.

b) Trouver la probabilité que la personne achète un appareil électroménager mais pas de table. $P(\overline{T} \cap E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135$

Probabilités

Exercice 4

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.

Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées. Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre. Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient quelles sont bien mélangées.

Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ».

Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.

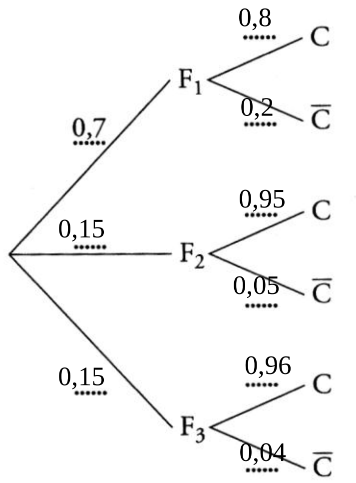
On appellera F_1 l'événement: « la pomme prélevée provient du premier producteur » ;
F_2 l'événement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur » ;
F_3 l'événement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur » ;
C l'événement : « la pomme prélevée a un bon calibre » ;
$\bar{C}$ l'événement : « la pomme prélevée est hors calibre ».

Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} près.

1) Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3.

$P(F_2)=0{,}15$ et $P(F_3)=0{,}15$

2) Recopier et compléter l'arbre suivant :



3) Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,144.

$P(F_3 \cap C)=0{,}96\times0{,}15=0{,}144$

4) Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est 0,8465.

$P(C)=P(F_1\cap C)+ P(F_2\cap C)+ P(F_3\cap C)=0{,}7\times0{,}8+0{,}15\times0{,}95+0{,}144=0{,}8465$

5) La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ». Quel calcul permet de justifier cette affirmation ? Faire ce calcul et conclure.

$P_{\bar{C}}(F_1)=\frac{0{,}7\times0{,}2}{1-0{,}8465}\approx 0{,}912$ $P_{\bar{C}}(F_2)=\frac{0{,}15\times0{,}05}{1-0{,}8465}\approx 0{,}049$ $P_{\bar{C}}(F_3)=\frac{0{,}15\times0{,}04}{1-0{,}8465}\approx 0{,}039$

Probabilités

Fiche(6)

Exercices de bac

Exercice 1 (France – Juin 2010)

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur.
Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.
Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, pour chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.
Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.
- On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.

On note :

- A l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- B l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- C l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- S l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.
3. Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.
4. Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

Exercice 2 (France – septembre 2010)

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2006.
Dans cette population :

- 58 % sont des femmes ;
- 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable appelée maladie A et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.
On note :
F l'évènement : « la personne choisie est une femme » ;
H l'évènement : « la personne choisie est un homme » ;
A l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie A » ;
$\overline{A}$ l'évènement : « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie A ».
Les résultats seront arrondis au millième.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement F et celle de l'évènement A.
   Donner la probabilité de l'évènement F sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(F)$
   b. Définir par une phrase l'évènement $A \cap F$ puis calculer sa probabilité.
   c. Montrer que la probabilité de l'évènement A sachant que F est réalisé est égale à 0,057 à 10^{-3} près.
2. La personne choisie est un homme. Démontrer que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie A est égale à 0,040 à 10^{-3} près.

Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2006, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie A qu'un homme ? Justifier.

Probabilités

Exercices de bac – CORRIGE

Exercice 1 (France – Juin 2010)

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur. Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.
Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, pour chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.
Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.
- On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.

On note :

- A l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- B l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- C l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- S l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

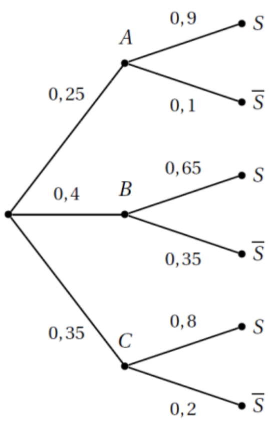
1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

25 % des employés ont un ordinateur Aliet d'où p(A)=0,25
40 % des employés ont un ordinateur Balart d'où p(B)=0,4
le reste des employés a un ordinateur Celt d'où p(C)=1-p(A)+p(B) soit p(C)=1-0,25+0,4=0,35
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance d'où $p_A(S)=0,9$
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance d'où $p_B(S)=0,65$
Parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance d'où $p_C(S)=0,8$

2. Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.

$p(A\cap S)=p_A(S)\times p(A)=0,9\times 0,25=0,225$
La probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance est 0,225

3. Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.



Les évènements A, B et C déterminent une partition de l'ensemble des résultats de l'expérience aléatoire, alors d'après la formule des probabilités totales :
$p(S)=p(A\cap S)+p(B\cap S)+p(C\cap S)$
Or : $p(B\cap S)=p_B(S)\times p(B)=0,65\times 0,4=0,26$ et
$p(C\cap S)=p_C(S)\times p(C)=0,35\times 0,8=0,28$
D'où $p(S)=0,225+0,26+0,28=0,765$
Ainsi, la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.

4. Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt. *Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.*

$p_S(C)=p(C\cap S)/p(S)=0,28/0,765\approx 0,366$
Arrondie à 10^{-3} près, la probabilité que parmi les fiches des employés satisfaits du service de maintenance, la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur de la marque Celt est 0,366.

Exercice 2 (France – septembre 2010)

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2006.
Dans cette population :

- 58 % sont des femmes ;
- 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable appelée maladie A et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On note :
F l'évènement : « la personne choisie est une femme » ;
H l'évènement : « la personne choisie est un homme » ;
A l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie A » ;
$\bar{A}$ l'évènement : « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie A ».
Les résultats seront arrondis au millième.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement F et celle de l'évènement A.
Donner la probabilité de l'évènement F sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(F)$

D'après les données de l'énoncé :
58 % de la population des personnes âgées de plus de 65 ans sont des femmes donc p(F)=0,58

Probabilités

5 % des personnes âgées de plus de 65 ans sont atteintes de la maladie donc $p(A)=0,05$

deux tiers des personnes atteintes de la maladie A sont des femmes donc $p_A(F)=2/3\approx0,667$

b. Définir par une phrase l'évènement $A\cap F$ puis calculer sa probabilité.

$A\cap F$ est l'évènement : « la personne choisie est une femme atteinte de la maladie A»

D'après la formule des probabilités composées, $p(A\cap F)=p_A(F)\times p(A)=23\times0,05\approx0,033$

Arrondie au millième près, la probabilité qu'une femme soit atteinte de la maladie A est 0,033.

c. Montrer que la probabilité de l'évènement *A* sachant que *F* est réalisé est égale à 0,057 à 10^{-3} près.

$p_F(A)=p(A\cap F)/p(F)=0,033/0,58\approx0,057$

Arrondie au millième près, la probabilité de l'évènement *A* sachant que *F* est réalisé est égale à 0,057.

2. La personne choisie est un homme. Démontrer que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie *A* est égale à 0,040 à 10^{-3} près.

$p_H(A)=p(A\cap H)/p(H)$

Or d'après la formule des probabilités totales :$p(A)=p(A\cap F)+p(A\cap H)\Leftrightarrow p(A\cap H)=p(A)-p(A\cap F)=0,05-0,033=0,017$

D'autre part, $p(H)=1-p(F)=1-0,58=0,42$

D'où : $p_H(A)=0,017/0,42\approx0,040$

Arrondie au millième près, la probabilité de l'évènement *A* sachant que *H* est réalisé est égale à 0,040.

3. Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2006, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie *A* qu'un homme ? Justifier.

$p_F(A)=0,057$ signifie qu'environ 5,7% des femmes âgées de plus de 65 ans ont développé la maladie A et $p_H(A)=0,040$ signifie qu'environ 4% des hommes âgés de plus de 65 ans ont développé la maladie A.

Une femme risque davantage de développer la maladie *A* qu'un homme.