Probabilités

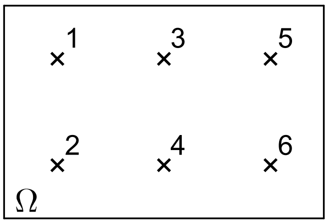
1. Univers et événements d'une expérience aléatoire

Définitions.

- *Une <u>expérience aléatoire</u> est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse savoir lequel sera réalisé.*
- *Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé <u>issue</u> ou <u>éventualité</u>.*
- *L'ensemble des issues constitue l'<u>univers</u> de l'expérience aléatoire. On le note souvent Ω.*

Exemple A

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées $1, 2, 3, 4, 5, 6$ et on note le numéro de la face supérieure.
Cette expérience est une <u>expérience aléatoire</u> dont les <u>issues</u> sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
L'ensemble des issues, appelé <u>univers</u> de cette expérience aléatoire, est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.



Exemple B

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et on note les côtés obtenus, dans l'ordre d'apparition. L'univers de cette expérience aléatoire est

$$\Omega = \{(\text{Pile} ; \text{Pile}) ; (\text{Pile} ; \text{Face}) ; (\text{Face} ; \text{Pile}); (\text{Face} ; \text{Face})\}.$$

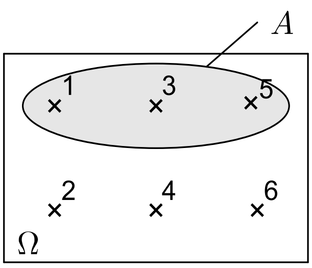
Pour alléger l'écriture, on désigne pile par P et face par F, et l'on écrit PP pour (Pile ; Pile) si bien que $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$.

Définitions.

- *Un <u>événement</u> A est un sous-ensemble de l'univers Ω. On note $A \subset \Omega$ et on lit « A est inclus dans Ω ».*
- *Dire qu'une issue a <u>réalise</u> l'événement A signifie que a est un élément de A. On note $a \in A$.*
- *On note $\emptyset$ l'<u>événement impossible</u> ; aucune issue ne le réalise. Au contraire, Ω est l'<u>événement certain</u>, toutes les issues le réalisent.*

Exemple A

On considère l'événement A : « obtenir un nombre impair ».
Les issues qui réalisent A (ou qui sont favorables à A) sont 1, 3 et 5. On note $A = \{1; 3; 5\}$.
On a $1 \in A$, mais $2 \notin A$, c'est-à-dire que 2 ne réalise pas A.
L'événement « obtenir un nombre positif » est l'événement certain.
L'événement « obtenir 7 » est l'événement impossible.



2. Probabilité

❖ Choix d'un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire

Définition. *Définir un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire consiste :*

- *à préciser l'univers* $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *;*
- *à attribuer à chacune des issues* x_i *un nombre* p_i *positif, appelé* <u>*probabilité*</u> *de* x_i*, de sorte que l'on ait* $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ *(c'est-à-dire la somme des probabilités de toutes les issues fait 1). On parle de* <u>*loi de probabilité*</u>*.*

Il y a deux façons de déterminer les probabilités p_i associées aux issues x_i.

➢ *Par l'observation statistique des fréquences*

Lorsque l'on répète un grand nombre de fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence f d'une issue à tendance à se stabiliser autour d'une valeur p. On prend alors p comme probabilité de l'issue.

<u>Exemple A</u>

En lançant un grand nombre de fois un dé cubique, on a observé que les fréquences d'apparition des faces $2, 3, 4, 5, 6$ étaient les mêmes, mais que la face 1 apparaissait une fois sur deux lancers. La loi de probabilité à choisir sur l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ est :

Issue						
Probabilité						

<u>Exemple</u>

On lance 500 fois une pièce de monnaie et on note le côté obtenu : 160 fois pile et 340 fois face. On choisit alors une loi de probabilité en accord avec l'observation.

Issue	Face	Pile
Probabilité	0,32	0,68

L'usage de la simulation informatique sera une aide précieuse pour proposer un modèle sur une expérience difficilement répétable un grand nombre de fois « à la main ». Voir TP.

➢ *Par le choix de l'équiprobabilité.*

Dans une situation d'équiprobabilité, les n issues de l'expérience aléatoire ont la même probabilité de se produire. La probabilité d'une issue est $\frac{1}{n}$.

Le choix de ce modèle de probabilité doit être fait lorsque la description de l'expérience comporte les termes « on tire au hasard », « les dés sont supposés équilibrés », ou encore « les boules sont indiscernables au toucher » etc.

<u>Exemple</u>

Si on lance une pièce de monnaie équilibrée et que l'on s'intéresse au côté obtenu, la loi de probabilité à choisir est l'équiprobabilité.

Issue	Face	Pile
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Attention ! Il importe de bien identifier où intervient l'équiprobabilité.

Exemple

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher portant les numéros $1, 1, 2, 3, 4, 4$. On tire au hasard une boule et on note son numéro. L'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ et la loi de probabilité décrivant la situation est :

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

L'expérience aléatoire n'est donc pas équiprobable, bien qu'on ait autant de chance de tirer une boule qu'une autre.

❖ Probabilité d'un événement

Définition. *La <u>probabilité d'un événement</u> $A \subset \Omega$ est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. On la note $P(A)$.*

Propriété. $P(\emptyset) = 0$ *et* $P(\Omega) = 1$.

Exemple A

La probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre impair » est $0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}7$.
Si le dé était équilibré, elle serait de $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
L'événement « obtenir 7 » est impossible car $7 \notin \Omega$. Bien sûr la probabilité de cet événement est 0.
L'événement « obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6 » est l'événement certain, sa probabilité est 1.

Propriété. *Dans le cas où l'on est dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est*

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}.$$

3. Opérations sur les événements

❖ Intersection et réunion

Définition. *Soit A et B deux événements.*

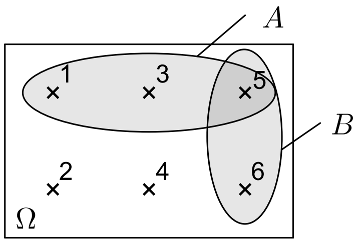
- *L'<u>intersection</u> des événements A et B est l'événement noté $A \cap B$ formé des issues qui réalisent à la fois A et B.*
  Lorsqu'aucune issue ne réalise à la fois A et B on dit que A et B sont <u>incompatibles</u> (on a donc $A \cap B = \emptyset$).
- *La <u>réunion</u> des événements A et B est l'événement noté $A \cup B$ formé des issues qui réalisent A ou B (c'est-à-dire soit A mais pas B, soit B mais pas A, soit A et B).*
- *L'événement <u>contraire</u> de A est l'événement noté $\bar{A}$ formé des issues qui ne réalisent pas A.*

Exemple A

Soit A l'événement « obtenir un nombre impair » et B l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 ». On a $\mathrm{A} = \{1; 3; 5\}$ et $\mathrm{B} = \{5; 6\}$.

Alors

- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{5\}$;
- $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1; 3; 5; 6\}$;
- $\overline{\mathrm{A}}$ = « obtenir un nombre pair » $= \{2; 4; 6\}$;
- $\overline{\mathrm{B}}$ = « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 » $= \{1; 2; 3; 4\}$.



Les événements B et « obtenir un multiple de 4 » sont incompatibles.

Théorème. Pour tous événements A et B, on a $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

On retiendra l'idée que le contraire de « ou » est « et », et celui de « et » est « ou ».

Exemple

Soit Ω l'ensemble des jours de la semaine, S l'événement « on est samedi » et D « on est dimanche ». L'événement $S \cup D$ est « être samedi ou dimanche », soit encore « être en week-end ». Le contraire de $S \cup D$ est « ne pas être en week-end », c'est-à-dire « ne pas être samedi et ne pas être dimanche », ce qui s'écrit $\bar{S} \cap \bar{D}$.

❖ **Probabilité et opérations sur les événements**

Théorème. Pour tout événement A, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Théorème (Formule de Poincaré). Pour tous événements A et B on a

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Conséquences.

- Si A et B sont incompatibles, on a $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ et <u>seulement dans ce cas</u>.
- La formule de Poincaré s'utilise souvent pour calculer $P(A \cup B)$ quand on connaît $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ par $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration. Soit j le nombre d'issues réalisant A, k le nombre d'issues réalisant B et l le nombre d'issues réalisant $A \cap B$ (donc $l = 0$ si $A \cap B = \emptyset$).

On appelle

- $x_1, x_2, \dots, x_l$ les issues réalisant $A \cap B$ et $p_1, p_2, \dots, p_l$ leur probabilité ;
- $y_1, y_2, \dots, y_{j-l}$ les issues réalisant A mais pas B et $q_1, q_2, \dots, q_{j-l}$ leur probabilité ;
- $z_1, z_2, \dots, z_{k-l}$ les issues réalisant B mais pas A et $r_1, r_2, \dots, r_{k-l}$ leur probabilité.

On a alors

- $P(A \cap B) = p_1 + p_2 + \cdots + p_j$;
- $P(A) = p_1 + p_2 + \cdots + p_j + q_1 + q_2 + \cdots q_{j-l}$;
- $P(B) = p_1 + p_2 + \cdots + p_j + r_1 + r_2 + \cdots + r_{k-l}$.

L'événement $A \cup B$ est constitué des $j + k - l$ issues

$$x_1, x_2, \dots, x_l,\ y_1, y_2, \dots, y_{j-l},\ z_1, z_2, \dots, z_{k-l}$$

donc

$$P(A \cup B) = p_1 + p_2 + \cdots + p_l + q_1 + q_2 + \cdots + q_{j-l} + r_1 + r_2 + \cdots + r_{k-l}.$$

Ainsi on a bien

$$\begin{aligned} P(A \cup B) + P(A \cap B) &= 2(p_1 + p_2 + \cdots + p_l) + q_1 + q_2 + \cdots + q_{j-l} + r_1 + r_2 + \cdots + r_{k-l} \\ &= P(A) + P(B). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

1. **a.** Calculer la probabilité des événements
   $$A = \text{« la carte tirée est un as » et } B = \text{« la carte tirée est rouge ».}$$
   b. Énoncer les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ et calculer leur probabilité.
2. On note C l'événement « la carte tirée n'est ni un as, ni rouge ». Écrire C en fonction de $A \cup B$ et calculer sa probabilité.

Réponse. L'univers Ω est constitué des 32 cartes. Le tirage se fait au hasard, donc les issues sont équiprobables.

1. **a.** $P(A) = \frac{\text{nombre d'as}}{\text{nombre de cartes}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(B) = \frac{\text{nombre de cartes rouges}}{\text{nombre de carte}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.
   b. $A \cap B$ est l'événement « tirer un as rouge », donc $P(A \cap B) = \frac{\text{nombre d'as rouges}}{\text{nombre de cartes}} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$. L'événement $A \cup B$ est « tirer un as ou une carte rouge ». On calcule sa probabilité grâce à la formule de Poincaré
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{16}{32} - \frac{2}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}.$$
2. On a $C = \bar{A} \cap \bar{B}$, ce qui encore égale à $\overline{A \cup B}$. Donc
   $$P(E) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

4. Des outils pour dénombrer les issues

Lorsqu'une expérience consiste en plusieurs lancers, tirages, etc. on pourra utiliser un tableau ou un arbre pour lister les issues possibles.

Exemple

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on s'intéresse à la somme des deux numéros obtenus. Déterminer un modèle de probabilité adapté à la situation.

Réponse. L'univers de cette expérience est $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. Il faut compter de combien de façons on peut obtenir chacune des issues. Pour ce faire on construit un tableau à double entrée.

		Numéro du premier dé					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Numéro du deuxième dé	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Par exemple l'issue 3 peut s'obtenir de deux façons : en ayant 1 sur le premier dé et 2 sur le second, ou l'inverse. Il existe $6 \times 6 = 36$ façons de lancer les deux dés. La loi de probabilité est la suivante.

Issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On notera que l'expérience n'est pas équiprobable bien que les dés soient équilibrés.

Exemple

Un examinateur doit interroger, dans un certain ordre, quatre candidats : Arthur, Béatrice, Chloé et David. Il doit donc établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de liste possible.
2. L'examinateur tire au hasard une liste ordonnée de quatre noms, chaque liste ayant la même probabilité. Déterminer la probabilité les événements suivants :
   - E = « Béatrice est interrogée en premier » ;
   - F = « Chloé est interrogé en dernier » ;
   - G = « David est interrogé avant Béatrice » ;
   - H = « Les deux garçons sont interrogés successivement ».
3. Décrire en une phrase l'événement $E \cap F$ et donner sa probabilité.

Réponse.

1. Voir ci-contre. On constate qu'il y a 24 listes possibles.
2. Les probabilités sont les suivantes.
   - On compte 6 issues commençant par la lettre B donc $P(E) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.
   - On compte 6 issues se terminant par la lettre C donc $P(F) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.
   - Il faut compter le nombre de mot où la lettre D apparaît avant la lettre B. Il y en a 12, donc $P(G) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.
   - Dix mots comporte la séquence DA ou AD, donc $P(H) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.
3. L'événement $E \cap F$ est « Béatrice est interrogé en premier et Chloé en dernier. Donc $E \cap F = \{BADC\,;BDAC\}$ et $P(E \cap F) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.