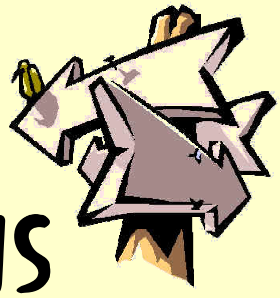
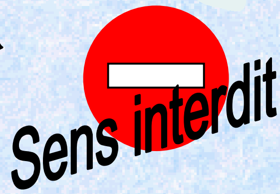
THEME 8

VECTEURS-TRANSLATIONS
DEFINITIONS - PROPRIETES



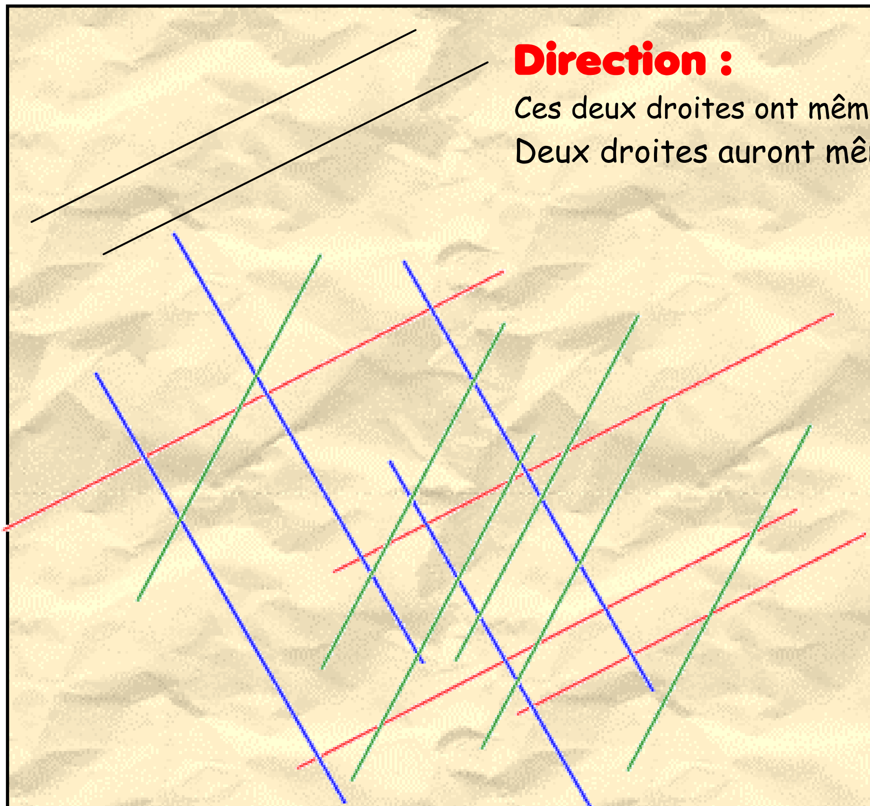
Notion de direction et de sens :

Direction (n.f.) Orientation vers un point donné
« *La direction de l'aiguille aimantée* »
Sens : (n.m.) Direction, orientation
« Aller en sens contraire »
Petit Larousse



Dans le langage courant, les deux notions de sens et de direction sont trop souvent confondues.

En mathématiques, il ne faut pas utiliser indifféremment direction et sens.



Direction :

Ces deux droites ont même direction.

Deux droites auront même direction si elles sont parallèles.

Mais une direction n'est pas une droite.
Parmi toutes les droites existantes dans le plan, certaines ont une particularité : celle d'être parallèles entre elles.
Regroupons toutes les droites parallèles.
Nous aurons ainsi plusieurs groupes, plusieurs *classes* de droites.
(toutes les droites d'une même classe seront parallèles entre elles).
Chacun de ces groupes s'appelle une direction.

Une direction est donc un ensemble de droites parallèles entre elles.

Comment représenter une direction ?

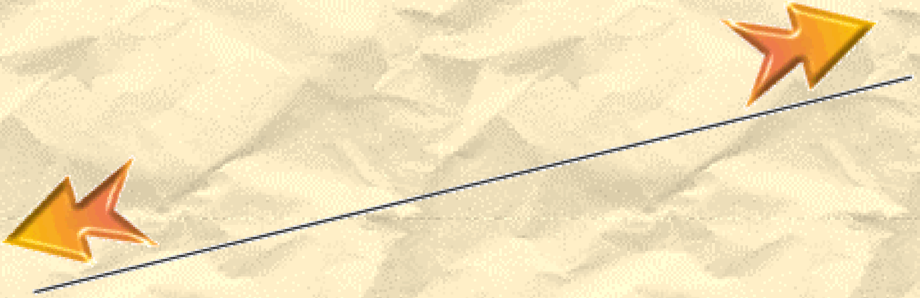
Comme dans tout groupe, il suffit de prendre un représentant. Dans une classe, la représentation est confiée à un délégué. Dans une commune , le maire est le représentant, Etc..

Une direction n'est pas une figure géométrique. Elle est représentée par une droite (quelconque) de son groupe.

Sens :

Sur une droite, il y a deux sens.

Ces sens sont dits contraires ou opposés.



Comparaison des sens de deux droites :

Si les droites ont même direction, c'est à dire si elles sont parallèles, nous pourrons comparer les sens et préciser si les sens choisis sur les droites sont les mêmes sens ou sont opposés.

Si les droites n'ont pas même direction, nous ne comparerons pas les sens des droites.

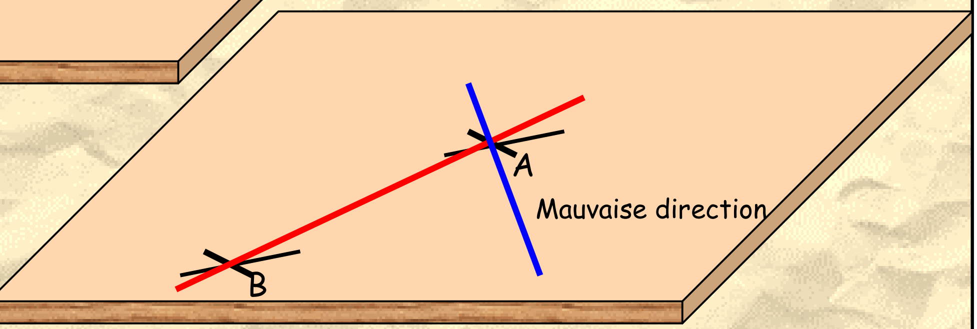
▶ NOTION DE VECTEUR

Nom utilisé par Hamilton en 1865.

Comment pouvons-nous définir un déplacement en Mathématiques ? Notre problème est de décrire le déplacement de la tasse de café de sa position initiale à une position finale (la croix sur l'exemple)

Pour « aller » de A à B, il faut définir

- une direction (la droite (AB))
- un sens (de A vers B).
- une longueur (la longueur AB)



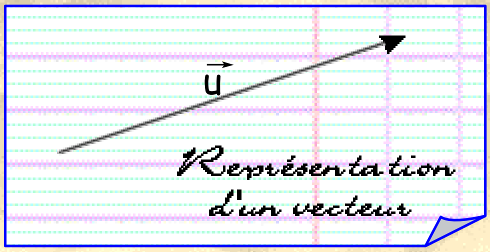
Ce nouvel objet géométrique sera représenté, sur un dessin, par :
(A sera appelé l'origine et B l'extrémité)

Dans le texte, ce vecteur sera noté $\overrightarrow{AB}$.

Remarque :

En géométrie, une droite passant par les deux points A et B sera notée (AB). Si nous désirons une droite quelconque, non définie par des points particuliers, nous pourrons la noter D ou Δ (delta majuscule) ou d ou δ (delta minuscule).

Si nous désirons faire appel à un vecteur quelconque, donc non défini par une origine et une extrémité, nous pourrons noter ce vecteur $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ ou $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ ou ... (généralement une lettre minuscule surmontée par une flèche).



Remarque : Vecteurs opposés

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{BA}$ ont même direction , même « longueur » mais des sens différents. Ces deux vecteurs sont dits opposés.

Attention, ne pas écrire : $\overleftarrow{AB}$. Un vecteur, lorsque l'on connaît l'origine et l'extrémité sera toujours noté par deux points surmontés d'une flèche (toujours dirigée vers la droite), le premier point étant l'origine et le second, l'extrémité.

Remarque : Vecteur nul

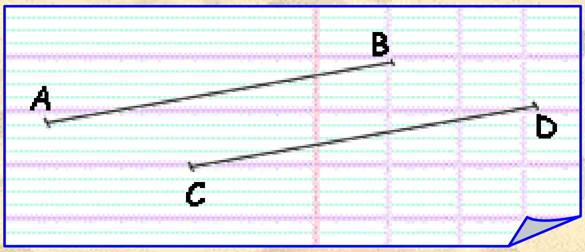
Il existe un déplacement particulier : celui qui permet de « passer » de A à A , ou de B à B . Il est difficile de parler de direction et de sens pour ce déplacement très singulier, mais la « longueur » qui le caractérise est égale à 0.

Un tel vecteur sera noté : $\vec{0}$

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Remarque importante :

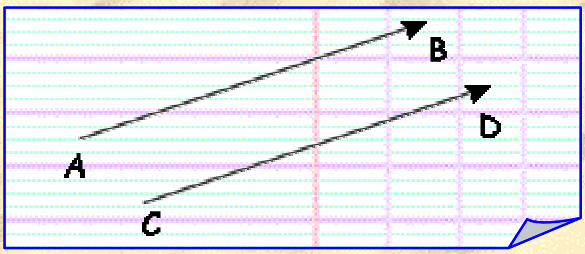
Un vecteur est un être géométrique très particulier.



Si nous comparons les deux segments représentés ci-contre, nous pouvons écrire qu'ils ont même longueur (et nous écrirons AB = CD) , qu'ils ont des supports parallèles (ou, par abus, qu'ils sont parallèles), mais nous ne pouvons pas écrire que

~~[AB] = [CD]~~.

Les deux segments sont différents parce qu'ils ne sont pas « à la même place » , c'est à dire parce qu'ils ont des extrémités différentes.



Par contre, les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ définissent le même déplacement. Ces deux vecteurs ont même direction (les droites (AB) et (CD) sont parallèles) , même sens et même longueur.

Nous pourrons donc écrire :

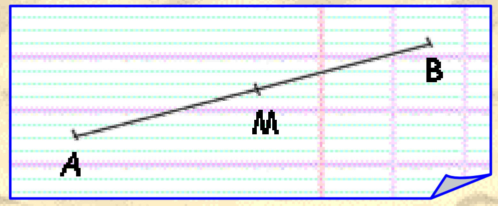
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Si deux points A et B sont donnés, la droite (AB), le segment [AB] sont parfaitement définis sur le dessin. Par contre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'a pas un emplacement précis. Il est possible de le tracer en plaçant l'origine en A, mais vous pouvez également le tracer à un autre endroit de votre dessin .

Retenons qu'un vecteur n'a pas d'emplacement précis sur un dessin géométrique.

Un vecteur n'est pas constitué de points, c'est à dire un vecteur n'est pas une figure géométrique.

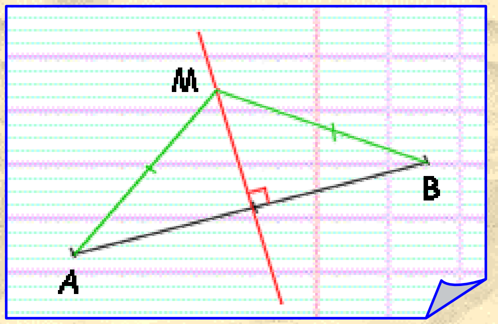
▶ MILIEU D'UN SEGMENT



Le point M est milieu de [AB] s'il vérifie deux conditions

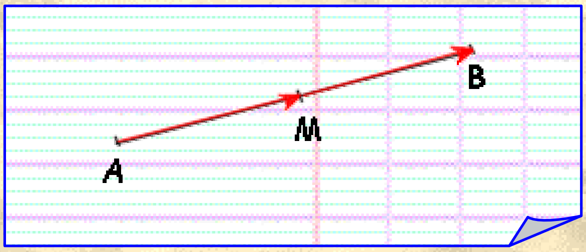
- AM = MB
- A, M et B sont alignés.

La dernière condition est souvent oubliée.



Si AM = MB , alors M n'est pas nécessairement le milieu de [AB]
Si AM = MB , alors M est un point de la médiatrice de [AB]

<u>Définition du milieu d'un segment avec les vecteurs :</u>

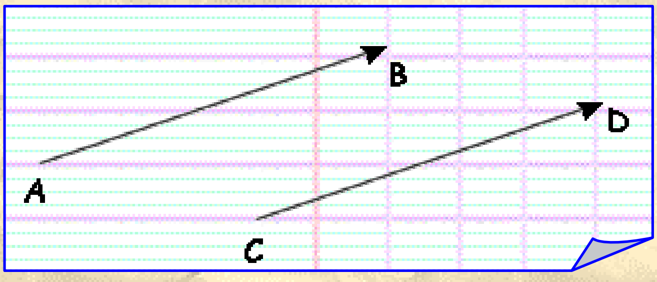


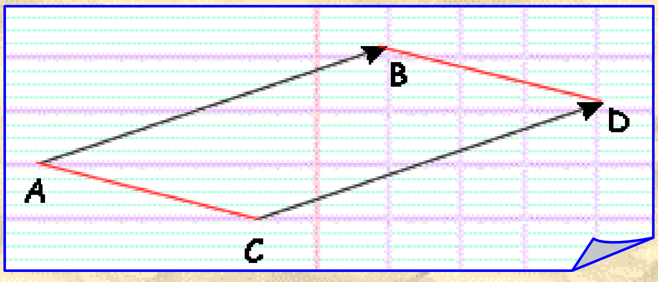
Si M est milieu de [AB] alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors M est milieu de [AB]

Il est inutile de préciser l'alignement des points A , M et B.
La notation vectorielle inclut, dans sa définition , l'égalité des longueurs, mais également la direction identique des deux droites (AM) et (MB) (Si ces deux droites sont parallèles, comme elles ont un point commun M, elles sont confondues et alors les points A, M et B sont alignés.)

▶ EGALITE DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens, et même longueur.





Propriété :

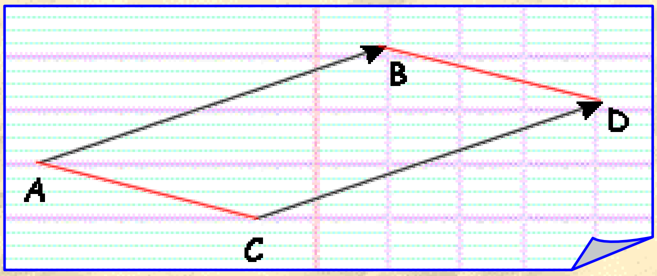
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors ABDC est un parallélogramme
Si ABDC est un parallélogramme , alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

<u>Remarque :</u>
Cette propriété permet de relier cette nouvelle notion à des connaissances antérieures. Pour démontrer que des vecteurs sont égaux, il suffira de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

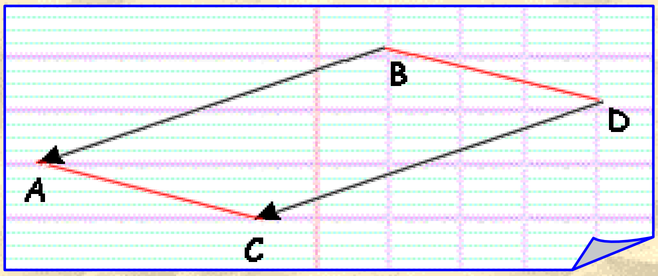
Conséquence :

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$

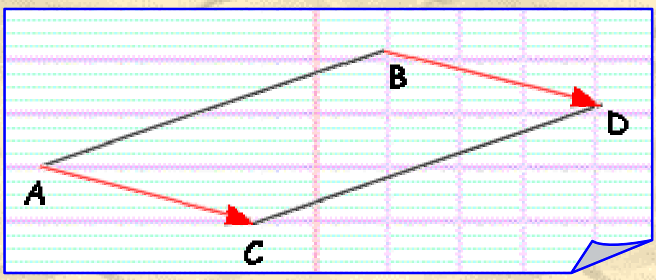
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



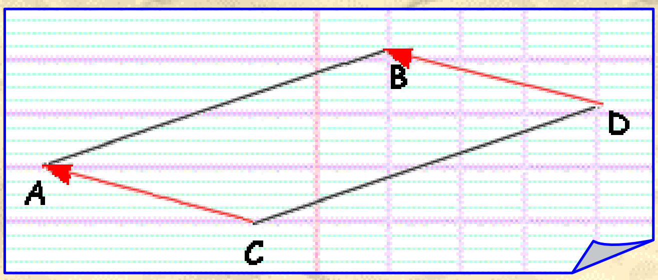
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$



$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$

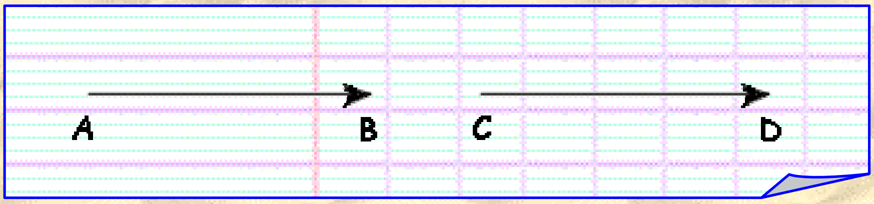


$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$



Remarque :

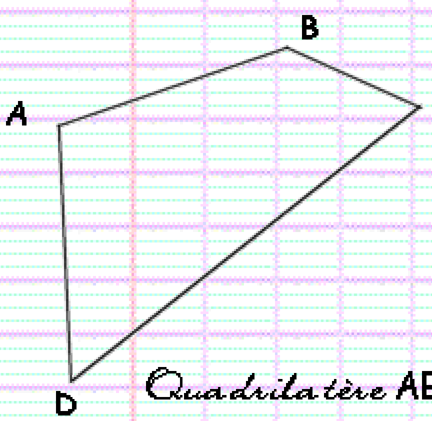
Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentés sur la figure ci-dessous :



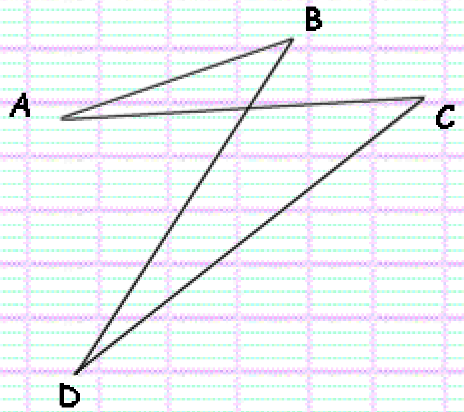
Sont-ils égaux ? Ils ont même direction (A, B , C et D sont alignés, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles), même sens et même longueur.
La propriété citée ci-dessus peut-elle être utilisée ?
Nous définirons, pour cela, le parallélogramme aplati.

Quadrilatère *(du latin quadrilaterus avec quadri, préfixe signifiant quatre et lateris, signifiant côté.)*

Un quadrilatère est donc une figure à quatre côtés. Nous pouvons également le définir par la donnée de quatre points ordonnés. Attention, le quadrilatère ABCD est différent du quadrilatère ABDC.

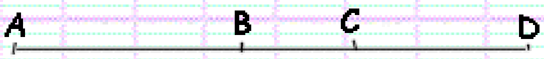


Quadrilatère ABCD



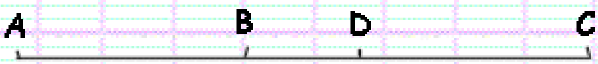
Quadrilatère (croisé) ABDC

Les quatre points peuvent-ils être alignés ? Rien, dans la définition, ne l'interdit.
Les quatre points alignés de la figure suivante forment donc un quadrilatère, que nous appellerons <u>quadrilatère aplati</u>.



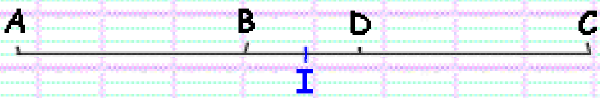
ABCD *est un quadrilatère !*

Ces quadrilatères présentent peu d'intérêt, si ce n'est le <u>parallélogramme aplati</u>.



ABCD *est un parallélogramme aplati .*

Un quadrilatère est un parallélogramme si les côtés opposés sont parallèles.
Si nous conservons cette définition, quatre points alignés formeront toujours un parallélogramme. Les côtés [AB] et [CD] sont parallèles et les côtés [AD] et [BC] sont parallèles.
Nous ne conserverons pas cette définition pour le parallélogramme aplati.
Un quadrilatère est un parallélogramme si les diagonales ont même milieu.
En utilisant cette définition, nous constatons que la figure ABCD suivante est un parallélogramme (aplati)

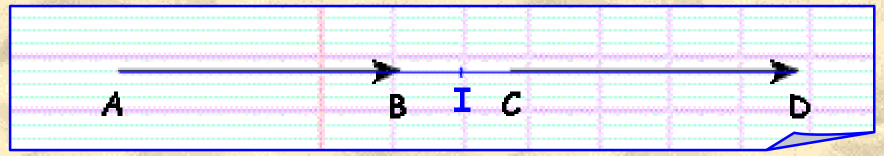


I est milieu de [AC] et de [BD]

Tandis que ce quadrilatère ABCD (figure ci-dessous) n'est pas un parallélogramme (aplati).

I est milieu de [AC] J milieu de [BD]

Revenons aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Ces deux vecteurs sont égaux si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.
Nous constatons que les diagonales [AD] et [BC] ont même milieu. Donc ABDC est un parallélogramme . Et donc, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



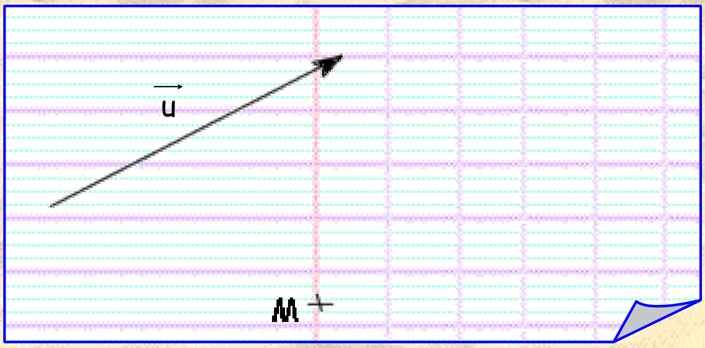
▶ TRANSLATION

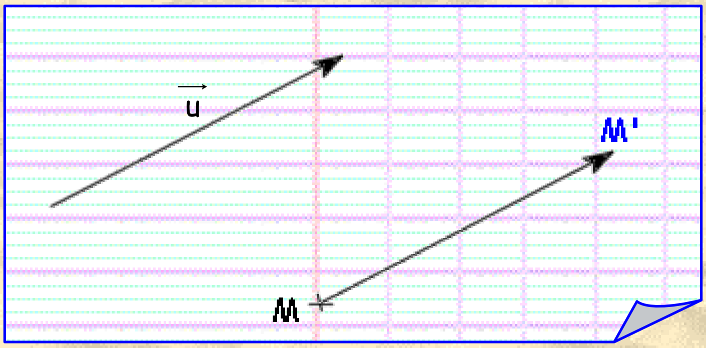
Nous avons « défini » un vecteur comme un objet qui caractérisait un déplacement. Un vecteur n'est donc pas un déplacement. Le déplacement, en Mathématiques, s'appelle une translation.

Définition : Translaté

Soit $\vec{u}$ un vecteur.
Soit M un point.
On appelle translaté de M selon le vecteur $\vec{u}$, l'unique point M' qui vérifie :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$





Vocabulaire :

La transformation du plan qui, à tout point M associe son translaté M'selon le vecteur $\vec{u}$, s'appelle la translation de vecteur $\vec{u}$. la translation se note souvent $t_{\vec{u}}$ ou $\mathscr{T}_{\vec{u}}$.

M' s'appelle le translaté de M dans la translation de vecteur $\vec{u}$. Plus généralement, ce point M' s'appelle l'image (ou le » transformé) du point M dans la translation de vecteur $\vec{u}$.

Remarque : Différence entre translation et translaté

« Je creuse un trou » .

Dans cette phrase, le verbe « creuse » représente l'action et «trou » représente le résultat de cette action.

De même, une translation, qui est une transformation du plan, une correspondance entre points du plan, représente une « action », tandis que le translaté est le résultat.

De la même façon, la symétrie (centrale ou axiale) est la transformation , le programme que vous allez suivre et le résultat s'appelle le symétrique (même nom pour les deux symétries).

Dans le dictionnaire :

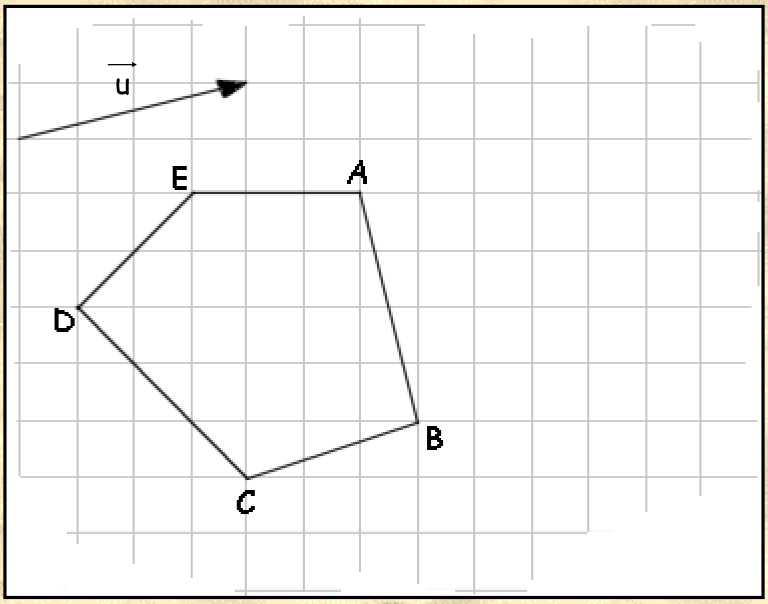
Translation (n.f.) (du latin *translatio* , transfert)

Action de transférer d'un lieu dans un autre.

« La translation des reliques d'un saint »

▶ IMAGE D'UNE FIGURE DANS UNE TRANSLATION

Exemple 1 : Avec quadrillage

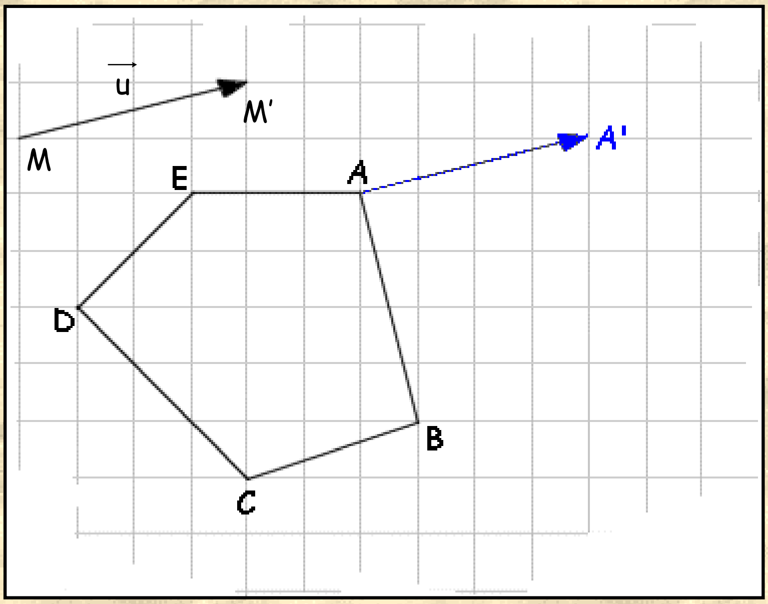


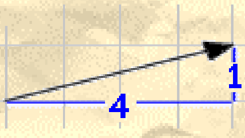
Déterminez l'image de la figure ABCDE dans la translation de vecteur $\vec{u}$.

Il suffit de déterminer les images (ou translatés) de tous les sommets de cette figure.

Image de A :
Pour construire, l'image du point A, il suffit de construire le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ égal au vecteur $\vec{u}$.
Si nous considérons que le vecteur $\vec{u}$ représenté sur le dessin est un vecteur s'appelant $\overrightarrow{MM'}$, le point A' est le quatrième point d'un parallélogramme dont nous connaissons déjà trois points M , M' et A (voir construction d'un parallélogramme).

Méthode pratique avec quadrillage :
La translation de vecteur $\vec{u}$ correspond à un « déplacement » de 4 carreaux vers la droite et de 1 carreau vers le haut.

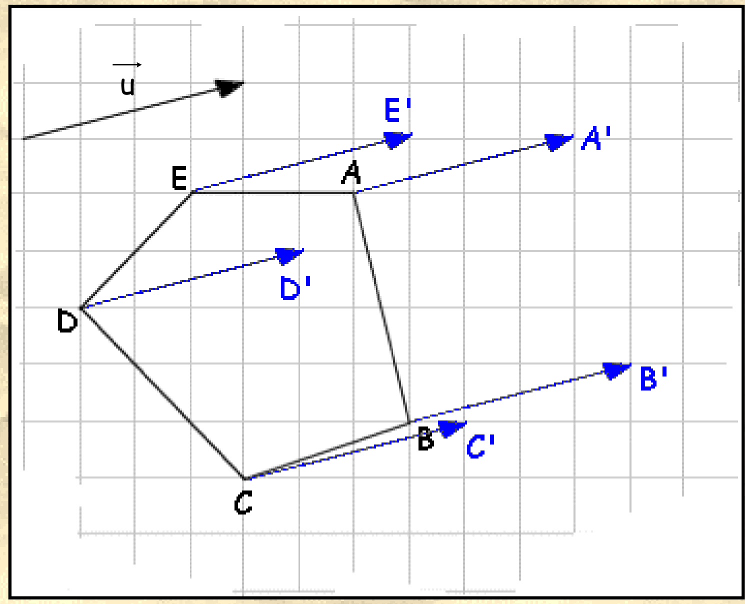


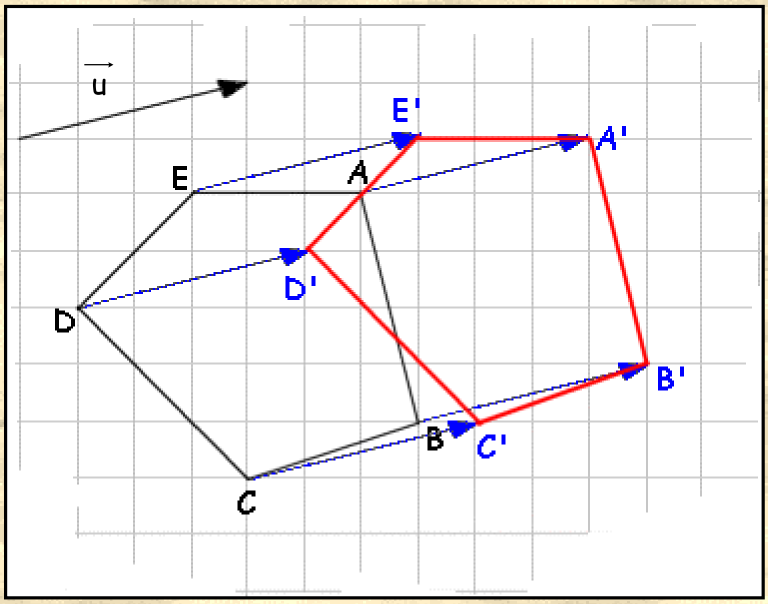


Il suffit donc de « déplacer » le point A de ces mêmes quantités (4 vers la droite et 1 vers le haut)

Remarque :
Les mots « déplacement » et « déplacer » sont entre guillemets car une translation, en toute rigueur, n'est pas un déplacement.

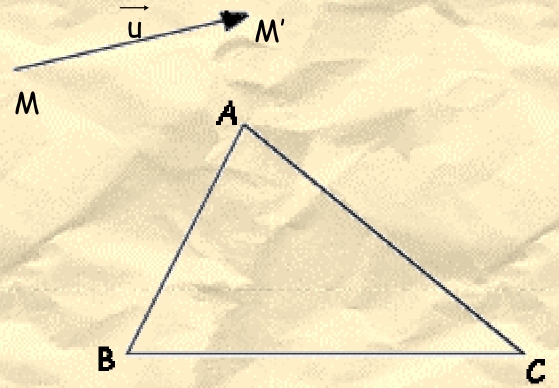
Nous obtenons alors





Exemple 2 : Sans quadrillage

Déterminez l'image du triangle ABC dans la translation de vecteur $\vec{u}$.
Appelons $\overrightarrow{MM'}$ le vecteur $\vec{u}$.

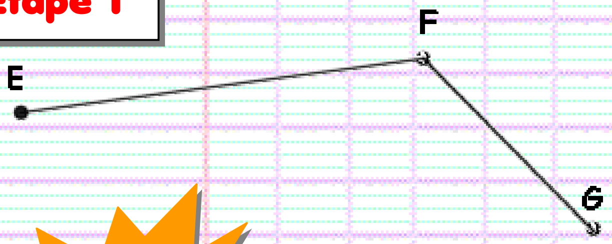


Construction d'un parallélogramme connaissant trois points :

Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont même longueur (et inversement).
Nous utiliserons cette propriété pour construire un parallélogramme.

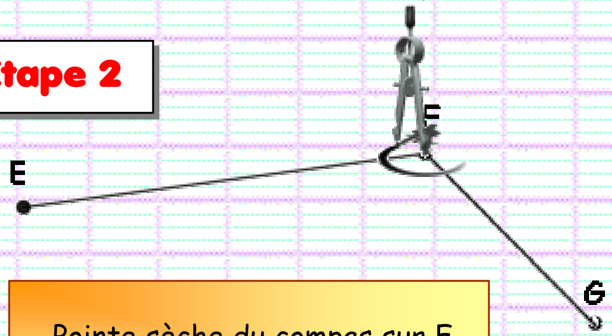
Soit E, F et G trois points du plan. Construire le point H tel que EFGH soit un parallélogramme.

Etape 1



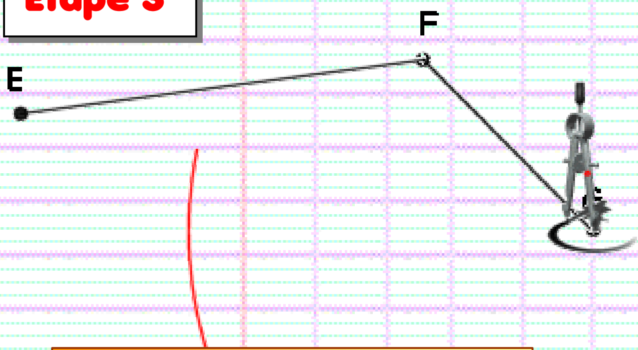
Position du point H

Etape 2



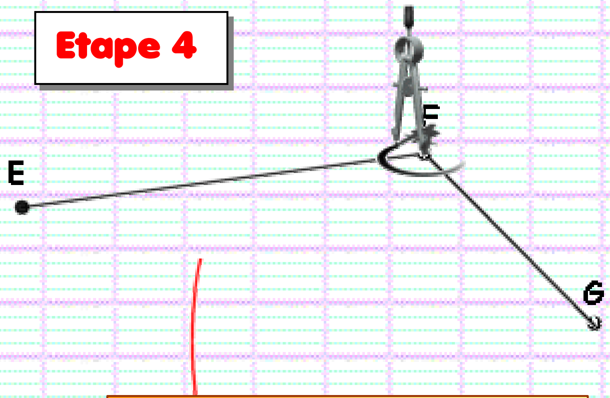
Pointe sèche du compas sur F.
Ecartement égal à EF.

Etape 3



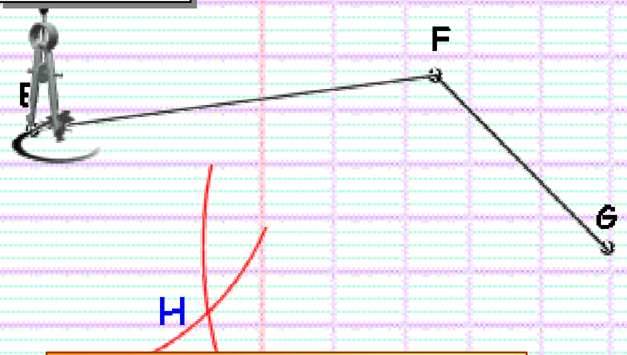
Pointe sèche du compas sur G.
On trace un arc de cercle de rayon FE (les deux côtés opposés [EF] et [GH] ont même longueur)

Etape 4



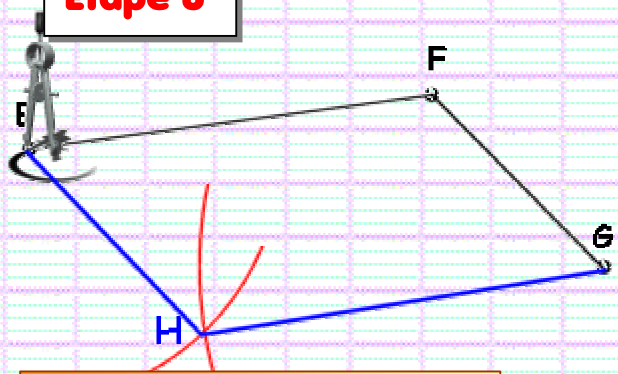
Pointe sèche du compas sur F.
Ecartement égal à EG.

Etape 5



Pointe sèche du compas sur E.
On trace un arc de cercle de rayon FG (les deux côtés opposés [EH] et [FH] ont même longueur)

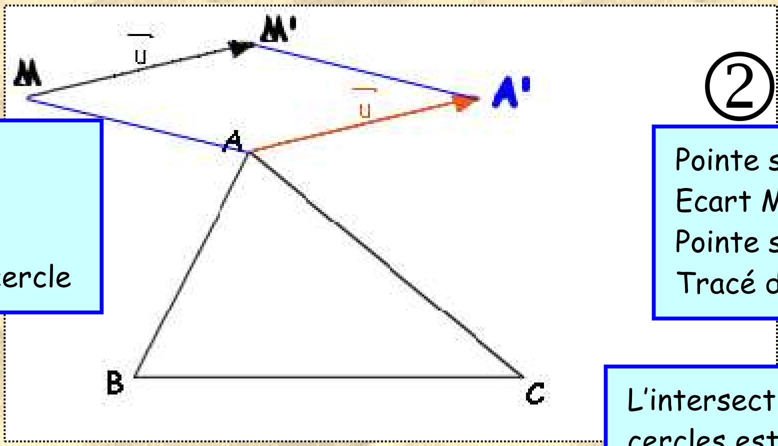
Etape 6



Il suffit de tracer les côtés [EH] et [GH]. Nous obtenons le parallélogramme EFGH

①

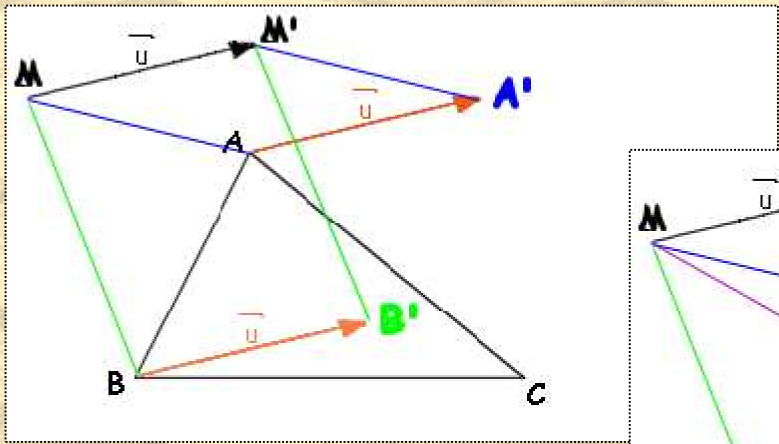
Pointe sèche en M
Ecart MA
Pointe sèche en M’
Tracé d’un arc de cercle

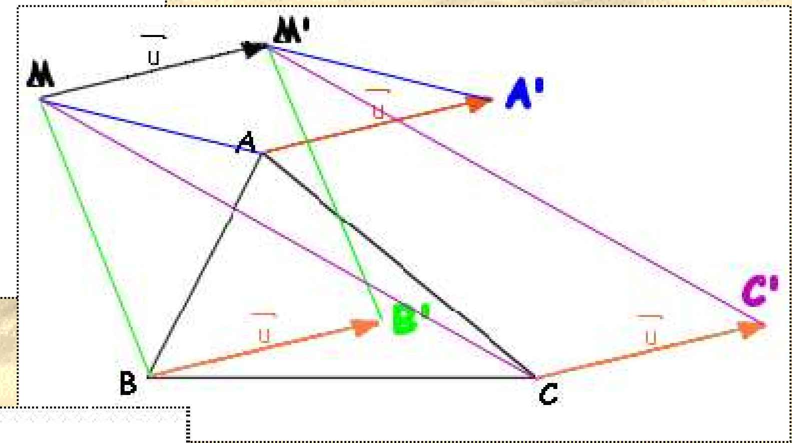


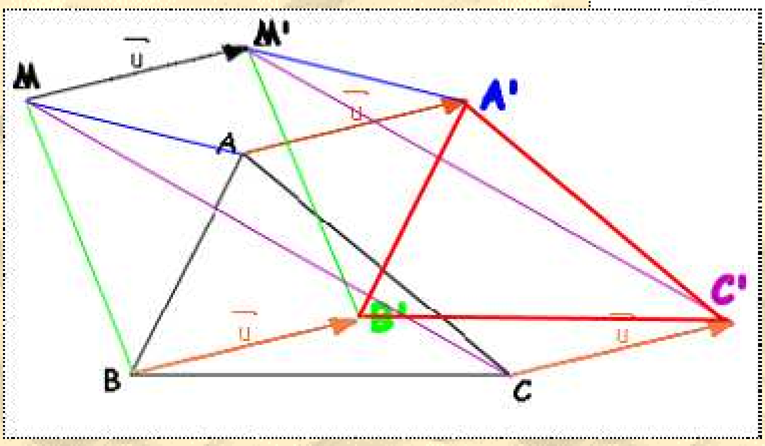
②

Pointe sèche en M
Ecart MM’
Pointe sèche en A
Tracé d’un arc de cercle

L’intersection des deux arcs de cercles est le point A’ cherché.

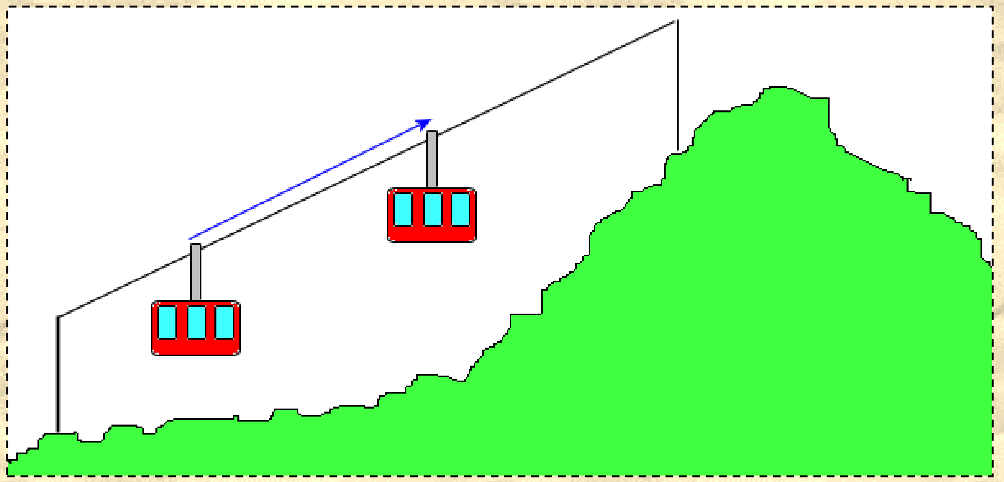






Pour construire l’image d’une figure géométrique, il suffit de construire les images des points caractéristiques.

▶ PROPRIETES D’UNE TRANSLATION



Si l'on considère le déplacement d'un téléphérique entre deux positions, nous disposons d'un objet et de son image dans une translation. Une translation correspond à un déplacement, un glissement. Ce type de déplacement ne produit pas de déformation.

Propriété 1 :

La translation conserve les longueurs.

Remarque :

Comme pour les deux symétries étudiées les années précédentes, la translation conserve les longueurs, les distances. Ces trois transformations (du plan) seront appelées des isométries (isos, même et metrum, mesure).

Autres propriétés :

Pour se convaincre des propriétés suivantes, imaginez le déplacement du téléphérique .

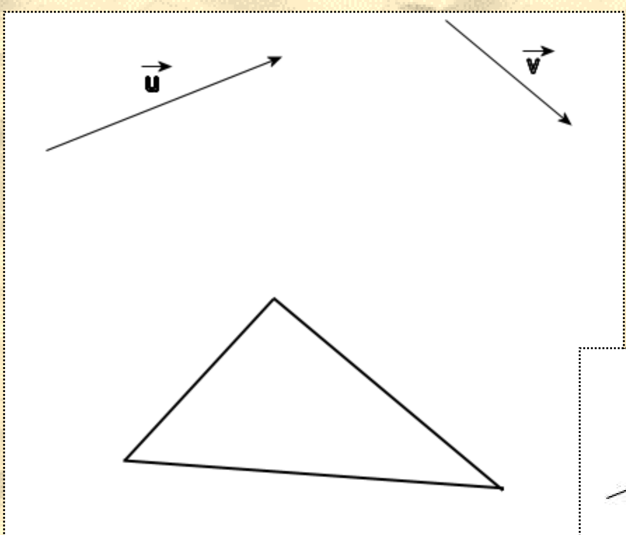
- L'image d'une droite, par une translation, est une droite parallèle.
- La translation conserve le parallélisme.
- La translation conserve l'orthogonalité.
- La translation conserve les angles.
- L'image d'un cercle, par une translation, est cercle de même rayon.

En d'autres termes , la translation conserve « tout » . L'image d'une figure, par une translation, est une figure « semblable » .

▶ SOMME DE DEUX VECTEURS – COMPOSEE DE DEUX TRANSLATIONS

Composée de deux translations :

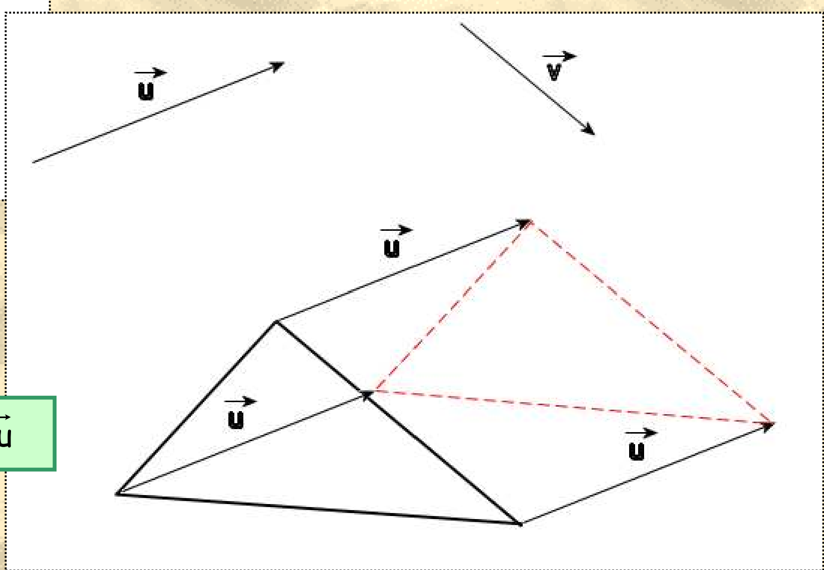
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs (quelconques).



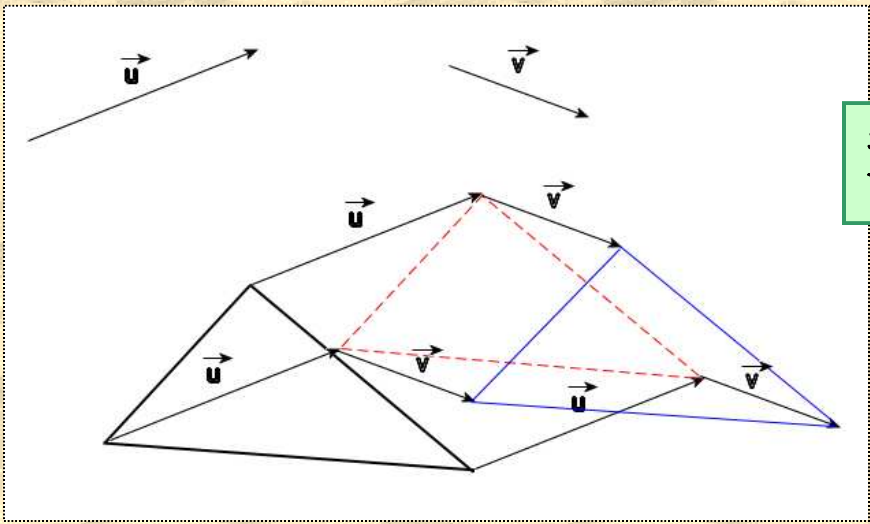
Cherchons l'image , par exemple, d'un triangle dans la translation de vecteur $\vec{u}$. Puis , à partir de cette nouvelle figure, cherchons son image dans la translation de vecteur $\vec{v}$.

Nous dirons souvent :

« Chercher l'image de la figure dans la translation de vecteur $\vec{u}$, suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$. »



Translation de vecteur $\vec{u}$



Suivie de :
Translation de vecteur $\vec{v}$

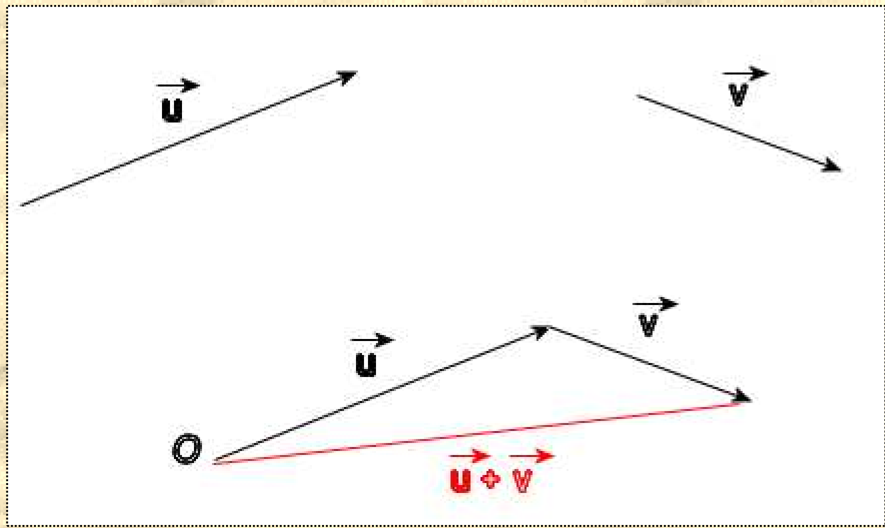
Nous obtenons un triangle qui est l'image du triangle initial par une nouvelle translation.
Le vecteur de cette nouvelle translation est appelé somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $\vec{u}+\vec{v}$.

Remarque :

La nouvelle translation s'appelle composée de deux translations.
Nous pouvons donc dire que :
La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Somme de deux vecteurs :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur appelé $\vec{u}+\vec{v}$ et construit comme suit :



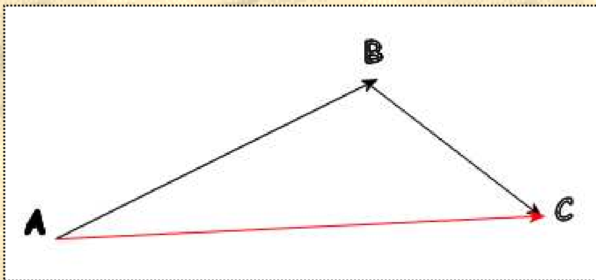
Remarque :

Notez que le vecteur $\vec{v}$ est placé « au bout » du vecteur $\vec{u}$, c'est à dire que l'origine du vecteur $\vec{v}$ est l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.

Relation de Chasles :

Soient A, B et C trois points du plan. Nous avons :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$



Il est né en 1793 dans la ville d'Épernon (Eure-et-Loir), située non loin de Chartres. Après des études secondaires brillantes, Chasles entre à l'École polytechnique en 1812. Il y devient professeur en 1841. En 1846, une chaire de géométrie supérieure est créée pour lui à la Sorbonne. Il est élu en 1851 membre de l'Académie des sciences.
En 1837, il publie un ouvrage intitulé *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*
Son nom est attaché à la relation de Chasles mais cette propriété était déjà utilisée longtemps avant lui.
Ses travaux de géométrie lui valurent la Médaille Copley en 1865.
Il meurt le 18 décembre 1880 à Paris.

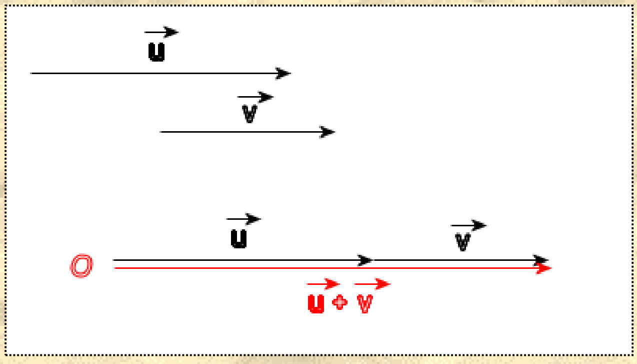
Lalande, Bresse, Lagrange, Belanger, Cuvier, Laplace, Dulong, Chaptal, Chasles, Lavoisier, Ampère, Chevreul, Flachat, Navier... Ces inscriptions se situent sur la frise des quatre façades de la dame de fer (la Tour Eiffel). Ce sont les noms de 72 savants inscrits par Gustave Eiffel afin de rendre hommage aux hommes de sciences.

Exemples :

- $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$ (relation de Chasles)
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ (vecteur nul)
- $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{AB}$

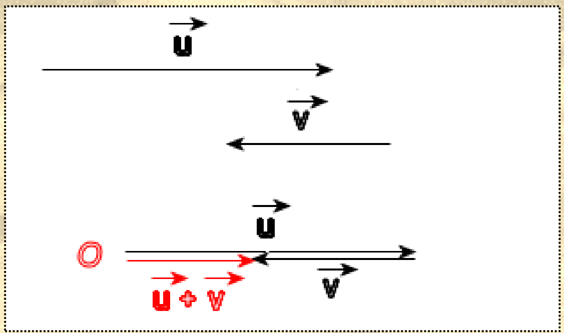
Remarque : Longueur du vecteur somme

▶ Vecteurs de même direction et de même sens :



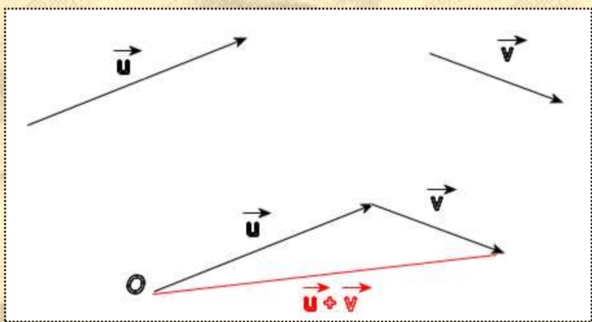
La longueur du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est égale à la somme des longueurs des deux vecteurs .

▶ Vecteurs de même direction et de sens opposés :



La longueur du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est égale à la différence des longueurs des deux vecteurs .

▶ Vecteurs de directions différentes :



La longueur du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est inférieure à la somme des longueurs des deux vecteurs . (conséquence avec l'inégalité triangulaire)

▶ Conclusion :

La longueur du vecteur somme n'est généralement pas égale à la somme des longueurs des deux autres vecteurs. Sa longueur est comprise entre la différence et la somme des longueurs des deux autres vecteurs !

Somme et parallélogramme :

Propriété :

Si ABCD est un parallélogramme , alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Démonstration :

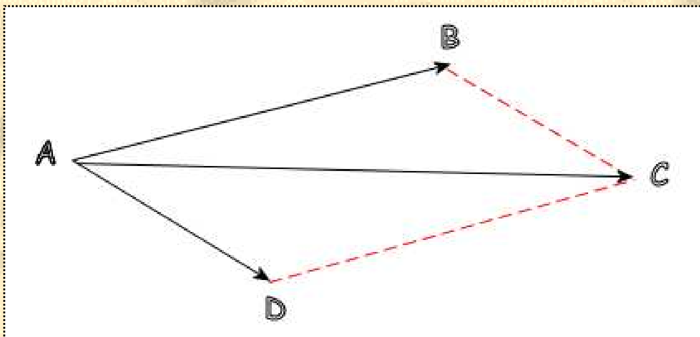
Quels que soient les points A, B et C , nous avons :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (égalité 1)

Comme ABCD est un parallélogramme , alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Donc , en reprenant l'égalité (1) , nous avons :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



Propriété (réciproque):

Si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, alors ABCD est un parallélogramme.

Démonstration :

Si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,

alors (comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ - relation de Chasles) , nous avons :

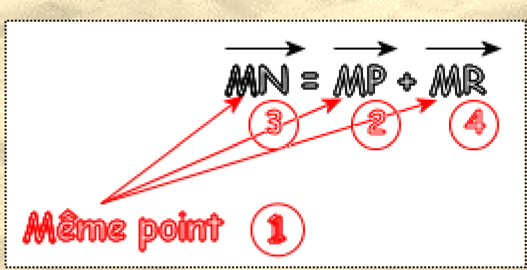
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Soit, en supprimant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans les deux membres de cette égalité :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

Donc ABCD est un parallélogramme.

Remarque : Attention à l'ordre des points.

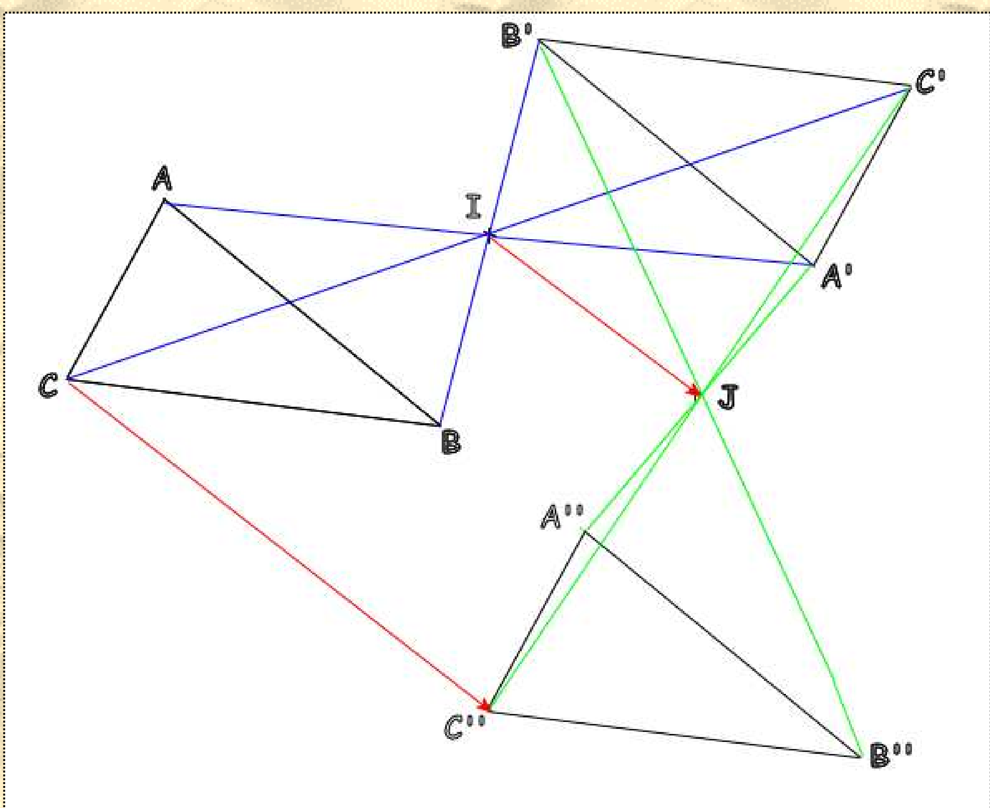


alors MPNR est un parallélogramme

Afin de se souvenir de cette formule, il est bon de faire rapidement un dessin.

▶ COMPOSEE DE DEUX SYMETRIES CENTRALES

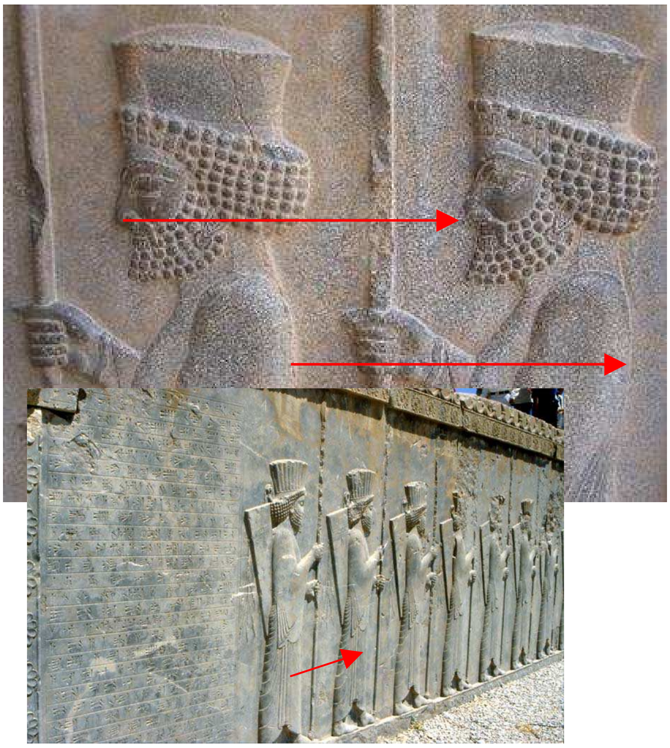
Considérons une figure (dans notre exemple, nous prendrons un triangle ABC.
Soit I et J deux points.
Construisons l'image de la figure ABC dans la symétrie de centre I , puis l'image de cette nouvelle figure dans la symétrie de centre J.
Nous constatons que l'image A''B''C'' est un triangle « semblable » au triangle ABC.



La transformation du plan qui transforme ABC en A''B''C'' est une translation dont le vecteur est de même direction que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$, de même sens également, mais dont la longueur est double.

Propriété :

I et J étant deux points du plan, la composée de la symétrie de centre I suivie de la symétrie de centre J est la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ}$,que l'on note $2\overrightarrow{IJ}$.



Persépolis (figures obtenus par translation)

Dessins de Escher
(A noter, en particulier, les translations)