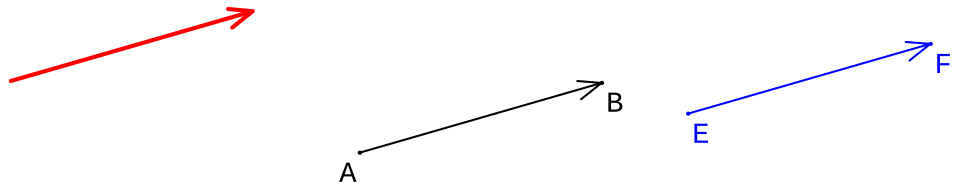
Chapitre 3 : Vecteurs. Géométrie analytique

I. Vecteurs

Un vecteur permet de caractériser un déplacement :
Il est défini par une direction, un sens sur cette direction et une longueur.

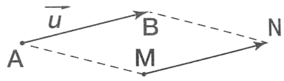


Il n'est en aucun cas lié à un point de départ ou d'arrivée

Egalités de vecteurs : On dit que deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont : même direction , même sens et même longueur.

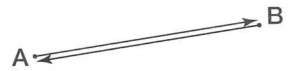
On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

Pour représenter un vecteur $\vec{u}$, je peux choisir une origine quelconque .
Par un point M quelconque , je peux tracer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.



Vecteurs particuliers

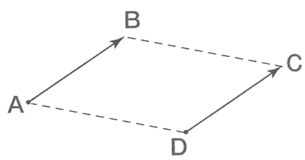
- Le vecteur **nul** $\vec{0}$: pour tout point M , $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui à la même direction et la même longueur que $\overrightarrow{AB}$ mais un sens opposé .
  C'est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$. On note : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.



Vecteurs égaux et parallélogrammes

- Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à dire que ABCD est un parallélogramme .

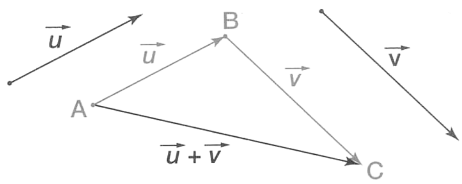
Remarque : ABCD parallélogramme équivaut aussi à $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$



Addition et soustraction de vecteurs :

la **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ défini ainsi :

A étant un point quelconque , on place le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$
puis le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$; alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

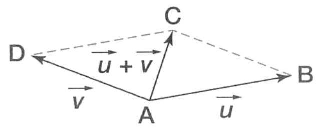


- L'égalité $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}$ est appelée **relation de Chasles** .

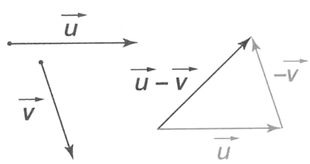
Représentation de $\vec{u}+\vec{v}$ par la règle du parallélogramme

- Lorsque les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même origine A ,

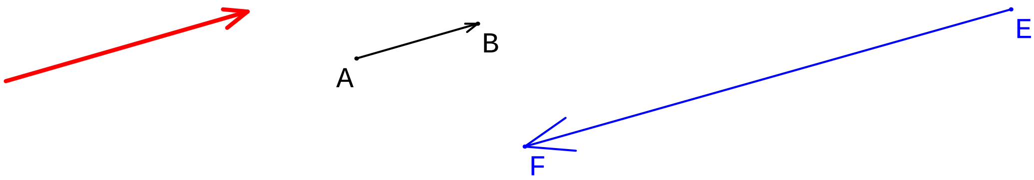
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est égal à $\overrightarrow{AC}$, où C est le point tel que ABCD est un parallélogramme .



la **différence** du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ s'obtient en ajoutant au vecteur $\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$



II. Produit d'un vecteur par un réel

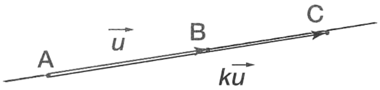


Définition : $\vec{u}$ désigne un vecteur non nul et k un réel non nul .

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $k.\vec{u}$ tel que :

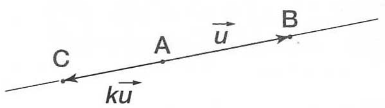
lorsque $k > 0$

- $k.\vec{u}$ a même sens que $\vec{u}$
- la longueur de $k.\vec{u}$ est le produit de k par la longueur de $\vec{u}$.



lorsque $k < 0$

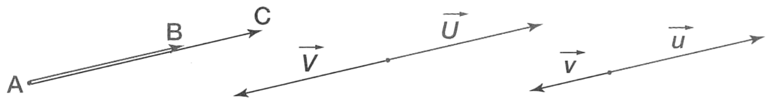
- $k.\vec{u}$ est de sens opposé à celui de $\vec{u}$
- la longueur de $k.\vec{u}$ est le produit de l'opposé de k par la longueur de $\vec{u}$.



les égalités de longueurs peuvent se résumer par AC = $|\,k\,|$ AB .

Remarque : lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, par convention : $k.\vec{u} = \vec{0}$.

Ex : $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{V} = -\vec{U}$, $\vec{v} = -\dfrac{1}{2}\vec{u}$.



Règles de calcul : (admises)

- $k.\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à : $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ (1)
- pour tous les réels k , k' et tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$k.(\vec{u}+\vec{v}) = k.\vec{u} + k.\vec{v}$ (2)

$(k+k').\vec{u} = k.\vec{u} + k'.\vec{u}$ (3)

$k.(k'.\vec{u}) = (k\,k').\vec{u}$ (4)

$1.\vec{u} = \vec{u}$ (5)

Ex :

- $2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB} = (2+5)\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AB}$ (règle 3) ;
- $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 3\overrightarrow{AC}$ (règle 2 puis relation de Chasles) ;
- $-3 \times \left(\dfrac{2}{3}\vec{v}\right) = \left(-3 \times \dfrac{2}{3}\right)\vec{v} = -2\vec{v}$ (règle 4) ;
- $3\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ soit M = A (règle 1) ;
- $-5(\vec{i} + \vec{j}) = -5\vec{i} - 5\vec{j}$ (règle 2) ;
- Pour tout nombre réel x, $(x+2)\vec{i} = x\vec{i} + 2\vec{i}$ (règle 3).

Comment représenter une somme de vecteurs ?

- En utilisant la règle du parallélogramme dans le cas de deux vecteurs de même origine .
- En enchaînant « bout à bout » les vecteurs .

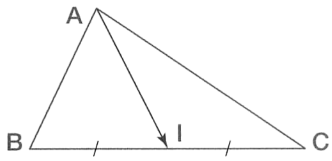
Pourquoi utiliser la relation de Chasles ?

- Elle permet de simplifier une somme de vecteurs .
- Elle permet de décomposer un vecteur en somme de plusieurs vecteurs .

Comment démontrer une égalité vectorielle ?

1. Démontrez que pour tous points O, A et B, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ [1].

2. A, B et C sont trois points ; I est le milieu de [BC].
Démontrez que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ [2].



SOLUTION COMMENTÉE

1. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.
Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$,
donc : $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

2. Pour exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on décompose $\overrightarrow{AI}$ en somme de vecteurs de façon à introduire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ (introduction du vecteur $\overrightarrow{AB}$).
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$ (introduction du vecteur $\overrightarrow{AC}$).

Par addition : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}$.
Or I est milieu de [BC], donc $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont opposés : $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$.
Finalement : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Remarque : Retenez ces relations ainsi que leur démonstration.

COMMENT traduire vectoriellement ?

1. Le milieu de [AB]

Le milieu de [AB] est le point I tel que : $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

Autres traductions : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{IA} = -\,\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

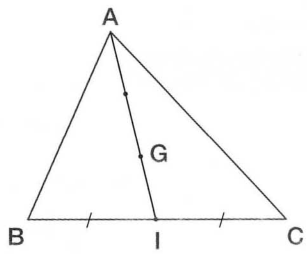
2. Le centre de gravité du triangle ABC

Le centre de gravité du triangle ABC est le point G tel que :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GI}$, lorsque [AI] est la médiane issue de A.

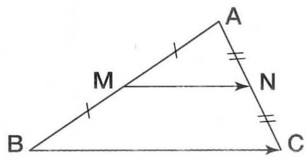
Autres traductions : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GA}$.

Remarque : On obtient des traductions analogues à partir des médianes issues de B et C.



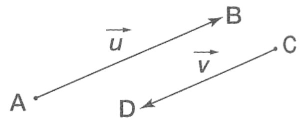
3. Le théorème des milieux

ABC est un triangle.
Si M est le milieu de [AB] et N celui de [AC] alors : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$.



III. Colinéarité de deux vecteurs

Vecteurs colinéaires : dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont la même direction .



Cela signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues .

Théorème : dire que les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$

Remarque : par convention , on dit que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

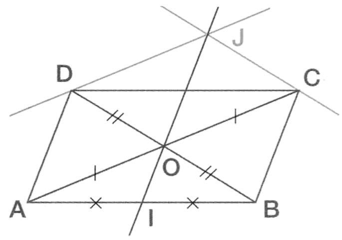
Parallélisme et alignement :

- Dire que les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$
- Dire que les points distincts A , B , C sont **alignés** équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

Remarque : la colinéarité de deux vecteurs traduit le parallélisme ou l'alignement qui sont des questions essentielles en géométrie .

Comment démontrer que trois points sont alignés ?

ABCD est un parallélogramme de centre O, I est le milieu de [AB]. La parallèle à la droite (AC) passant par D coupe la parallèle à la droite (BD) passant par C au point J. Démontrez que O, I et J sont alignés.



POINT MÉTHODE

Pour démontrer que les points O, I et J sont alignés, il suffit d'établir une relation de colinéarité : $\overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{OJ}$.

SOLUTION COMMENTÉE

L'examen de la figure montre que le vecteur $\overrightarrow{OI}$ peut s'exprimer, par exemple, en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$. En effet dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et O celui de [BD] ; donc d'après le théorème des milieux, $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [1].

Exprimons $\overrightarrow{OJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

Par construction, OCJD est un parallélogramme, d'où l'égalité : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$.

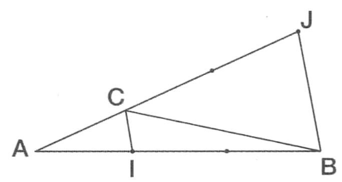
Comme O est le milieu de [BD], $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$.

On en déduit que $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$ [2].

Les égalités [1] et [2] permettent alors d'écrire que $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$ donc les points O, I et J sont alignés.

Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

ABC est un triangle, les points I et J sont tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.



1. Exprimez $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Déduisez-en que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

SOLUTION COMMENTÉE

1. $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles). Par hypothèse, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. De même : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$. Or $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

2. Pour démontrer que (IC) est parallèle à (BJ), il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires (théorème 4).

Nous remarquons que :

$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ soit $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires donc les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

Remarque : On peut aussi utiliser la réciproque du théorème de Thalès.

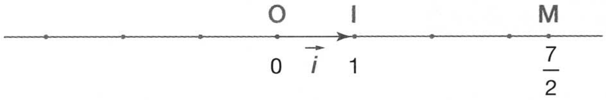
IV. Repérage d'un point

Repérage d'une droite : choisir un repère sur une droite Δ , c'est se donner deux points distincts O et I de Δ , pris dans cet ordre . O est l'**origine du repère**. Posons alors $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, le vecteur $\vec{i}$ est appelé le **vecteur de base** le repère sera noté (O ; $\vec{i}$) .

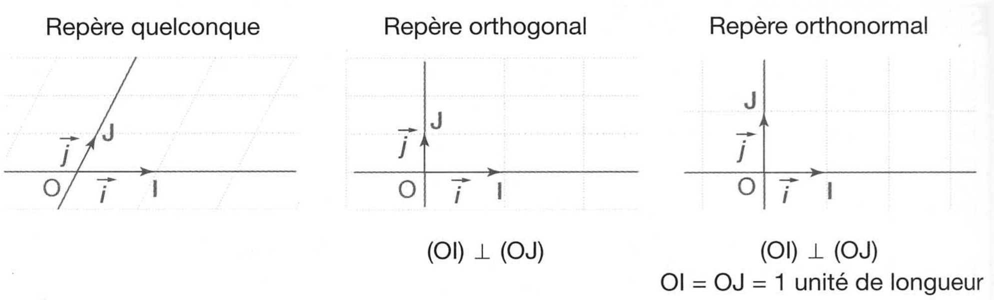
l'**abscisse** d'un point M de Δ dans le repère (O ; $\vec{i}$) est **le réel** x tel que $\overrightarrow{OM} = x\,.\,\vec{i}$

Ex :

$\overrightarrow{OM} = \frac{7}{2}\vec{i}$ signifie que M a pour abscisse $\frac{7}{2}$ dans le repère (O ; $\vec{i}$).



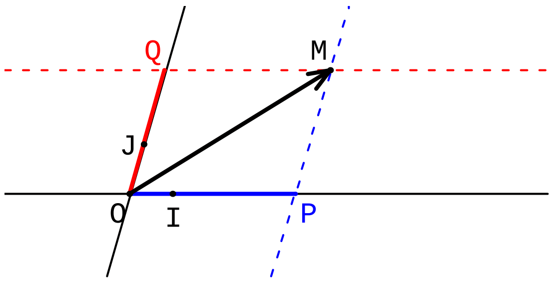
Repérage dans le plan : choisir un repère du plan , c'est se donner trois points O , I et J non alignés , pris dans cet ordre . O est l'origine du repère. Posons alors $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$,
les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non colinéaires ; ils sont appelés **vecteurs de base** . Le repère sera noté (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) .
(OI) est l'**axe des abscisses** et (OJ) est l'**axe des ordonnées** .



Coordonnées d'un point M dans un repère

le plan est rapporté à un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) et M est un point quelconque du plan .

- si M est un point non situé sur les axes , menons par M la parallèle à (OJ) qui coupe (OI) en P et la parallèle à (OI) qui coupe (OJ) en Q .
OPMQ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$
il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{OP} = x\,.\,\vec{i}$ et $\overrightarrow{OQ} = y\,.\,\vec{j}$
donc $\overrightarrow{OM} = x\,.\,\vec{i} + y\,.\,\vec{j}$ .On admettra que le couple (x ; y) de réels associé à M est **unique** .



- si M est sur l'axe des abscisses , il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\,.\,\vec{i}$
et si M est sur l'axe des ordonnées, il existe un réel y tel que $\overrightarrow{OM} = y\,.\,\vec{j}$

Définition : dire que le point M a pour **coordonnées (x ; y)** dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)
équivaut à dire que $\overrightarrow{OM} = x\,.\,\vec{i} + y\,.\,\vec{j}$ on note M (x ; y) , **x** est l'**abscisse** , y l'**ordonnée** .

Comment passer des coordonnées à une égalité vectorielle ?

Dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on donne les points A(– 5 ; 1), B(2 ; – 3), C(– 1 ; 0).
Exprimez les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

V. Coordonnées de vecteurs

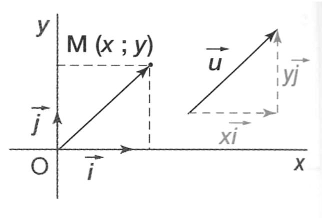
un repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ du plan est fixé

$\vec{u}$ est un vecteur donné ; M est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Notons (x ; y) les coordonnées de M , alors $\overrightarrow{OM} = x \, . \, \vec{i} + y \, . \, \vec{j}$

donc $\vec{u} = x \, . \, \vec{i} + y \, . \, \vec{j}$

ainsi tout vecteur $\vec{u}$ du plan s'écrit sous la forme $\vec{u} = x \, . \, \vec{i} + y \, . \, \vec{j}$



Définition : dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées (x ; y)** dans le repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$

signifie que $\vec{u} = x \, . \, \vec{i} + y \, . \, \vec{j}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Théorème : dire que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **égaux**

équivaut à dire que leurs couples de coordonnées sont égaux : **x = x' et y = y'**

Preuve :

notons M et M' les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$ alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ équivaut à M = M' c'est-à-dire x = x' et y = y'

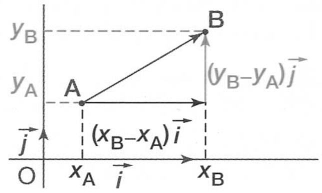
Règles de calcul :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs et k est un réel quelconque alors : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $k.\vec{u}\begin{pmatrix} k.x \\ k.y \end{pmatrix}$

Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points

le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



Preuve :

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$. Or $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Par hypothèse $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$ donc $\overrightarrow{OB}$ $(x_B ; y_B)$ et $\overrightarrow{OA}$ $(x_A ; y_A)$.

, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

Traduction analytique de la colinéarité : dire que les vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires**

équivaut à dire que **x y' – x' y = 0**

Remarque : lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls , la condition de colinéarité xy' – x'y = 0
qui s'écrit encore xy' = x'y traduit la proportionnalité des cordonnées .

Calcul de la distance entre deux points : $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$

sont deux points dans un **repère orthonormal** $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

la distance de A à B est donné par : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$