

Multiples, diviseurs. Critères de divisibilité. Nombres premiers

I) Division Euclidienne

Définition

Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier a , appelé **dividende**, par un nombre entier b ($b \neq 0$), appelé **diviseur**, revient à trouver deux nombres entiers q et r , appelés respectivement **quotient** et **reste** vérifiant l'égalité :

$$\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}$$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ r & q \\ \hline \text{dividende} & \text{diviseur} \\ \text{reste} & \text{quotient} \end{array}$$

ATTENTION : Le **reste** doit toujours être **inférieur** au **diviseur**

Exemple :

Effectuer la division euclidienne de 169 par 3 :

$$\begin{array}{r|l} \overline{169} & 3 \\ \downarrow & \\ 19 & 56 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Le quotient est 56 le reste est 1}$$

On peut vérifier la division euclidienne on a : $3 \times 56 + 1 = 168 + 1 = 169$
avec $1 < 3$

II) Multiples et diviseurs.

1) Définitions

a et b désignent deux nombres entiers positifs ($b \neq 0$):

Lorsque le **reste** de la **division euclidienne** de a par b est égale à **0**, on dit que :

- a est un **multiple** de b .
- b est un **diviseur** de a .
- a est **divisible** par b .

Exemples

8 est multiple de 4
4 est un diviseur de 8
8 est divisible par 4 car :

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ 0 & 2 \end{array}$$

$$8 = 4 \times 2$$

217 est un multiple de 7
7 est un diviseur de 217
217 est divisible par 7 car :

$$\begin{array}{r|l} \overline{217} & 7 \\ 07 & 31 \\ 0 & \end{array}$$

Autre explication :

$$217 = 7 \times 31$$

III) Critère de divisibilité par 2 ; 3 ; 5 ; 9 et 10

Critère de divisibilité par 2 :	Un nombre est divisible par 2 (ou est un multiple de 2) si son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.	<ul style="list-style-type: none">• 1 798 est divisible par 2 car son chiffre des unités est 2• 11 257 n'est pas divisible par 2 son chiffre des unités n'est ni 0 ; ni 2 ; ni 4 ; ni 6 ; ni 8
Critère de divisibilité par 3 :	Un nombre est divisible par 3 (ou est un multiple de 3) si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3 .	<ul style="list-style-type: none">• 12654 est divisible par 3 car $1+2+6+5+4=18$ et 18 est divisible par 3 ($6 \times 3 = 18$)• 17 452 n'est pas divisible par 3 car $1+7+4+5+2 = 19$ et 19 n'est pas divisible par 3.
Critère de divisibilité par 5 :	Un nombre est divisible par 5 (ou est un multiple de 5) si son chiffre des unités est 0 ou 5.	<ul style="list-style-type: none">• 2 795 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5 ;• 12 501 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités n'est pas égal à 0 ni à 5.
Critère de divisibilité par 9 :	Un nombre est divisible par 9 (ou est un multiple de 9) si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9 .	<ul style="list-style-type: none">• 12654 est divisible par 9 car $1+2+6+5+4=18$ et 18 est divisible par 9 ($9 \times 2 = 18$)• 10 531 n'est divisible par 9 car $1+0+5+3+1 = 10$ et 10 n'est pas divisible par 9.
Critères de divisibilités par 10	Un nombre est divisible par 10 (ou est un multiple de 10) si son chiffre des unités est 0.	<ul style="list-style-type: none">• 12650 est divisible par 10 car son chiffre des unités est 0.• 153 n'est pas divisible par 10 car son chiffre des unités n'est pas égal à 0.

IV) Nombres premiers

1) Définition

Un nombre premier est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarques :

- **0 n'est pas un nombre premier** : Il possède une infinité de diviseurs (1 ; 2 ; 3 ; 4 ...)
- **1 n'est pas un nombre premier** : il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Exemples :

3 est un nombre premier. Ses seuls diviseurs sont 1 et 3

5 est un nombre premier. Ses seuls diviseurs sont 1 et 5.

4 n'est pas un nombre premier : ses diviseurs sont 1 ; 2 et 4

2) Cribles d'Eratosthène

Il existe une infinité de nombres premiers.

Le crible d'Eratosthène est un algorithme qui permet de trouver les nombres premiers selon une technique bien précise :

- On barre le chiffre 1 puisqu'il n'est pas premier.
- 2 n'est pas barré, on l'entoure et on barre tous les multiples de 2 (sauf 2)
- 3 n'est pas barré, on l'entoure et on barre tous les multiples de 3 (sauf 3)
- Le nombre suivant non barré est 5. On l'entoure et on barre tous ses multiples (sauf 5) et on continue ainsi de suite

Remarques : On obtient la liste de tous les nombres premiers (les nombres qui ne sont pas barrés (voir le tableau ci-dessous avec les nombres inférieurs ou égaux à 100) :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97

Cette liste n'est pas à apprendre par cœur il suffit juste de savoir retrouver les nombres premiers.

3) Décomposition en produits de facteurs premiers

Décomposer un nombre entier en produits de facteurs premiers revient à écrire ce nombre entier sous la forme de produits de nombres premiers.

Pour cela il faut bien connaître le début de la liste des nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 19.

Exemples et méthode :

Exemple 1 : Décomposer 60 en produit de facteurs premiers

- Nous devons tester si 60 est **divisible par 2** (premier nombre premier),

Oui c'est bien le cas puisque son chiffre des unités est 0

$$60 \div 2 = 30$$

$$\begin{array}{l|l} 60 & 2 \\ \hline 30 & \end{array}$$

- On teste si 30 est **divisible par 2**.

Oui c'est bien le cas puisque son chiffre des unités est 0.

$$30 \div 2 = 15$$

60	2
30	2
15	

- On teste si 15 est **divisible par 2**

Non ce n'est pas le cas alors on teste s'il est **divisible par le nombre premier suivant** qui est **3**.

Oui c'est le cas et $15 \div 3 = 5$

60	2
30	2
15	3
5	

- On teste si 5 est **divisible par 3**.

Non ce n'est pas le cas alors on teste s'il est **divisible par le nombre premier suivant** qui est **5**.

Oui c'est le cas et $5 \div 5 = 1$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Dès que l'on arrive à un quotient égal à 1, on a terminé.

La décomposition en produits de facteurs premiers est : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Exemple 2 : Décomposer 132 en produit de facteurs premiers

- On teste si 132 est **divisible par 2**

(premier nombre premier),

Oui c'est bien le cas puisque son chiffre des unités est 2

$$132 \div 2 = 66$$

132	2
66	

- On teste si 66 est **divisible par 2**.

Oui c'est bien le cas puisque son chiffre des unités est 6.

$$66 \div 2 = 33$$

132	2
66	2
33	

- On teste si 33 est **divisible par 2**

Non ce n'est pas le cas alors on teste

s'il est **divisible par le nombre premier suivant** qui est **3**.

Oui c'est le cas et $33 \div 3 = 11$

132	2
66	2
33	3
11	

- On teste si 11 est **divisible par 3**.

Non ce n'est pas le cas alors on teste

s'il est **divisible par le nombre premier**

suivant qui est **7, il n'est pas divisible par 7, le nombre premier suivant est 11**.

Oui il est divisible par 11 et $11 \div 11 = 1$

132	2
66	2
33	3
11	11
1	

Dès que l'on arrive à un quotient égal à 1, on a terminé.

La décomposition en produits de facteurs premiers est : $132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11$

Remarque : La décomposition en produit de facteurs premiers est utile pour simplifier des fractions, lorsqu'on les multiplie ainsi que pour trouver un dénominateur commun lors des comparaisons de fractions, lorsqu'on le additionne ou les soustrait.