

# Chapitre 2 : Arithmétique – Nombres premiers

## FICHE DE COURS

### 1. Multiples et diviseurs

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers non nuls.

Si l'on a :  $a = k \times b$  avec  $k$  nombre entier

On dit que :

- $a$  est un multiple de  $b$
- $b$  est un diviseur de  $a$

Méthode : Déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier  $N$

On teste la division entière avec tous les nombres entiers compris entre 1 et  $\sqrt{N}$

### 2. Division euclidienne

Définition : Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers non nuls.

Réaliser la division euclidienne de  $a$  par  $b$  c'est déterminer le couple de nombres entiers positifs  $q$  et  $r$  tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad r < b$$

### 3. Critères de divisibilité

- divisibilité par 2 : le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair)
- divisibilité par 3 : la somme des chiffres est un multiple de 3
- divisibilité par 4 : les deux derniers chiffres sont multiples de 4
- divisibilité par 5 : le chiffre des unités est 0 ou 5
- divisibilité par 9 : la somme des chiffres est un multiple de 9
- divisibilité par 10 : le chiffre des unités est 0

### 4. Les nombres premiers

Définition : Un nombre est premier s'il a 2 diviseurs 1 et lui-même.

Premiers nombres premiers : 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41

Crible d'Eratostène : Le crible d'Eratostène indique les nombres premiers inférieurs à 100

- on écrit la liste de tous les nombres jusqu'à 100
- on élimine 1
- on souligne 2 et on élimine tous les multiples de 2
- puis on fait de même avec 3, 5 et 7

**Nombres premiers inférieurs à 100 .**

	<u>2</u>	<u>3</u>		<u>5</u>		<u>7</u>			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

Décomposition en facteurs premiers :

Tout nombre entier  $n$  peut s'écrire comme un produit de nombres premiers

### 5. Fractions irréductibles

Une fraction est dite irréductible, lorsque le diviseur commun au numérateur et au dénominateur est 1.

Méthode : Pour écrire une fraction sous forme irréductible on décompose le numérateur et le dénominateur sous la forme d'un produit de nombres premiers et on simplifie.

## EXERCICES

### Exercice 1

Quel est le plus petit diviseur premier de

18 ?      25 ?      51 ?      405 ?

### Exercice 2

Pour chacun des nombres suivants, dire s'il est premier ou non. Expliquer.

24 ?      105 ?      567 ?      31 ?

### Exercice 3

Dresser la liste de tous les diviseurs de 60.

### Exercice 4

1. Donner l'écriture littérale d'un multiple de 21 ?
2. Montrer que tout multiple de 21 est aussi multiple de 7.
3. La réciproque est-elle vraie ? (justifier)

### Exercice 5

Ottavia prend soin des fleurs de ses jardinières. Ainsi, elle arrose ses bégonias tous les 6 jours et ses géraniums tous les 4 jours. Aujourd'hui elle a arrosé ces deux variétés de fleurs .

1. Dans combien de temps au minimum arrosera-t-elle à nouveau ces deux variétés ?
2. Dans combien de temps arrosera-t-elle à nouveau ces deux variétés pour la 3<sup>e</sup> fois ?

### Exercice 6

VRAI ou FAUX ? Justifier.

1. 990 est un multiple de 4.
2. 345 et 670 sont premiers entre eux.
3. 120 a exactement 16 diviseurs.
4. 8 divise 116.

### Exercice 7

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

1. 17 est un diviseur de 85.
2. 211 est un multiple de 17.
3. le PGCD de 156 et 132 est 6.
4. 8 ne divise pas 76.
5. 72 a exactement 5 diviseurs.
6. Deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux.

### Exercice 8

#### Affirmation 1

Liv affirme « Lorsque le numérateur d'une fraction est un nombre premier, alors cette fraction est irréductible. »

Est-ce vrai ? Justifier.

### Exercice 9

Deux amis discutent :

- AUREL : Belle pêche ! Combien de poissons et de coquillages vas-tu pouvoir vendre au marché ?
- ANTOINE : En tout, je vais pouvoir vendre au marché 30 poissons et 500 coquillages.

Antoine est un pêcheur professionnel. Il veut vendre des paniers contenant des coquillages et des poissons. Il souhaite concevoir le plus grand nombre possible de paniers identiques. Enfin, il voudrait qu'il ne lui reste aucun coquillage et aucun poisson dans son congélateur.

1. Peut-il concevoir 15 paniers ?
2. Combien de paniers au maximum Antoine pourra-t-il concevoir ? Justifier.
3. Quelle sera la composition de chaque panier ? Justifier.

### Exercice 10

À la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons.

L'année suivante, les mêmes enfants se partagent les 598 ballons utilisés. Il en reste alors 13. Combien d'enfants, au maximum, étaient présents ?

### Exercice 11

On a :  $325 = 78 \times 4 + 13$

1. Sans faire de division, donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 325 par 78 ?
2. Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 325 par 4 ?

### Exercice 12

Un collège organise un tournoi sportif par équipe pour tous ses élèves. Chaque équipe doit comporter le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Les professeurs souhaitent constituer le plus grand nombre possible d'équipes. Il y a 210 filles et 294 garçons.

- a. Quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut constituer ?
- b. Combien y-a-t-il alors de filles et de garçons dans chaque équipe ?

### Exercice 13

Un ouvrier dispose de plaque de métal de 3,15 m de long et 2,80 m de large. Son patron lui a demandé de découper, dans ces plaques, des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.

- a. Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
- b. Combien découpera-t-il de carrés par plaque ?

### Exercice 14

Un professeur de musique fait répéter 144 filles et 160 garçons pour un concert de chorale. Il veut faire des groupes de répétition de sorte que :

- le nombre de filles soit le même dans chaque groupe,
- le nombre de garçons soit le même dans chaque groupe,
- chaque choriste appartienne à un groupe.

1. Quel nombre maximal de groupes pourra-t-il faire ?
2. Combien y aura-t-il alors de choristes femmes et de choristes hommes dans chaque groupe ?

### Exercice 15

On a :  $2654 = 40 \times 65 + 54$

Répondre aux questions suivantes sans faire de division et en justifiant.

1. Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de 2 654 par 65 ?
2. Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de 2 654 par 40 ?
3. Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de 2 599 par 40 ?

### Exercice 16

1. Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres : 156, 165 et 198
2. Rendre irréductible les fractions suivantes :  $\frac{156}{198}$  et  $\frac{198}{165}$

### Exercice 17

1. Expliquer simplement pourquoi la fraction  $\frac{140}{870}$  n'est pas une fraction irréductible.
2. Décomposez les entiers 140 et 870 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).
3. Calculer le plus grand commun diviseur de 140 et 870.
4. Rendre alors irréductible la fraction  $\frac{140}{870}$ .

### Exercice 18

Rends les fractions suivantes irréductibles, détaille la démarche.

a.  $\frac{240}{105}$

b.  $\frac{972}{648}$

c.  $\frac{119}{187}$

### Exercice 19

Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier relatif.

$$A = \frac{5}{7} - \frac{2}{7} \times \frac{1}{6}$$

$$D = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \div \frac{3}{2}$$

$$B = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{2}$$

$$E = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \times \left(7 + \frac{37}{9}\right)$$

### Exercice 20

Calculer en détaillant et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \left(\frac{4}{5} - 2\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

$$B = \frac{2}{3} - \frac{16}{15} \div \frac{2}{9}$$

### Exercice 21

- On considère la fraction  $\frac{190}{114}$ 
  - Expliquer pourquoi cette fraction n'est pas irréductible.
  - Déterminer le PGCD de 190 et 114 par la méthode de votre choix.
  - En déduire la forme irréductible de la fraction  $\frac{190}{114}$ .
- Donner la fraction irréductible égale à  $\frac{294}{735}$ , puis celle égale à  $\frac{741}{403}$ .

### Exercice 22

Calculer en détaillant et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5}\right) \div \frac{24}{7}$$

$$B = 11 \div \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right)$$

$$C = \frac{-48 \times 45}{65 \times 54}$$

### Exercice 23

#### 1. Décompositions

- Effectuer la décomposition en facteurs premiers des entiers 2 622 et 2 530.
- En déduire le plus grand diviseur commun de 2 622 et 2 530.
- Rendre irréductible la fraction  $\frac{2\,622}{2\,530}$ .

### Exercice 24

$$A = \frac{9}{11} - \frac{5}{4} \div \frac{11}{7} \quad ; \quad B = \left(\frac{-3}{8} + \frac{5}{7}\right) \div \left(\frac{19}{28} \times \frac{1}{2}\right)$$

Des affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, justifiez si elle est vraie ou fausse.

- Affirmation 1** : L'inverse de  $A$ , c'est à dire  $\frac{1}{A}$ , est un multiple de 11.
- Affirmation 2** : Le nombre  $B$  est un nombre entier.
- Affirmation 3** : Les entiers 111 et 45 sont premiers entre eux.
- Affirmation 4** : Les nombres impairs sont des nombres premiers.