

# Homothéties

## I) Définition

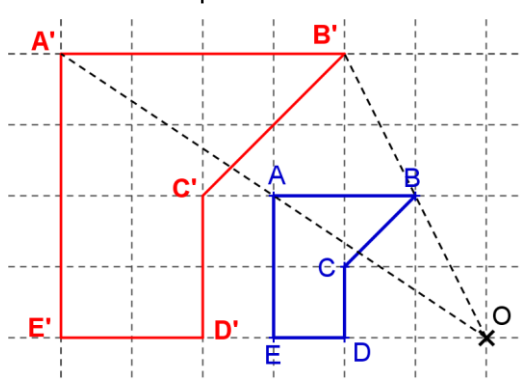
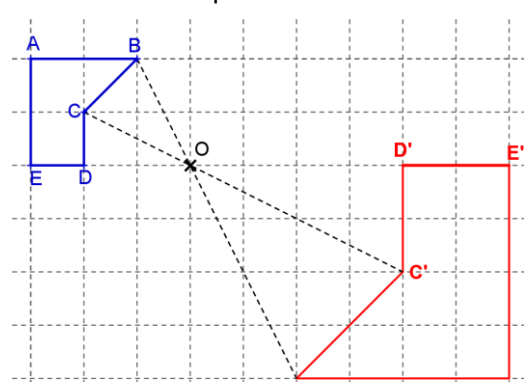
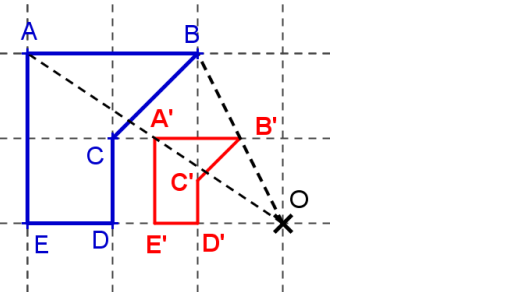
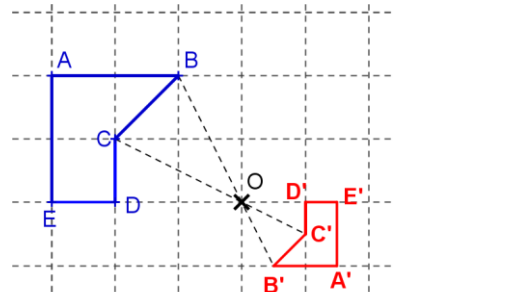
$A'$  est l'image du point  $A$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  ( $k \neq 0$ ) lorsque :

- $OA' = k \times OA$       **et**
- Si  $k > 0$  :                      • Si  $k < 0$  :  
 $M' \in [OM)$                                $O \in [MM')$

Remarque importante :

- Si  $k > 1$  ou  $k < -1$  : la figure image est un **agrandissement** de la figure initiale
- Si  $-1 < k < 1$  : la figure image est une **réduction** de la figure initiale

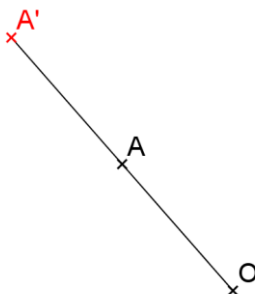
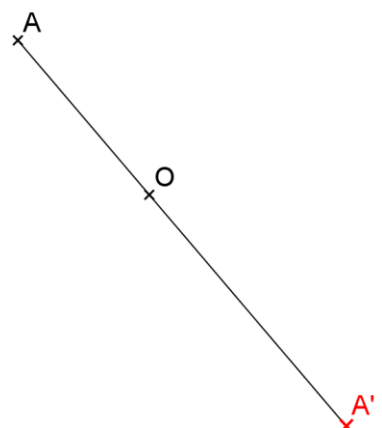
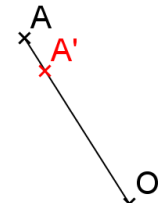
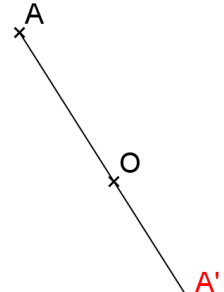
Exemples :

<p style="text-align: center;"><math>k &gt; 1</math></p> <p>Dans cet exemple : <math>k = 2</math></p>  <p><math>OA' = 2 \times OA</math> et <math>A' \in [OA)</math> car <math>k &gt; 0</math>  <math>OB' = 2 \times OB</math> et <math>B' \in [OB)</math> car <math>k &gt; 0</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>k &lt; -1</math></p> <p>Dans cet exemple : <math>k = -2</math></p>  <p><math>OB' = 2 \times OB</math> et <math>O \in [BB')</math> car <math>k &lt; 0</math>  <math>OC' = 2 \times OC</math> et <math>O \in [CC')</math> car <math>k &lt; 0</math></p>
<p style="text-align: center;"><math>0 &lt; k &lt; 1</math></p> <p>Dans cet exemple : <math>k = 0,5</math></p>  <p><math>OA' = 0,5 \times OA</math> et <math>A' \in [OA)</math> car <math>k &gt; 0</math>  <math>OB' = 0,5 \times OB</math> et <math>B' \in [OB)</math> car <math>k &gt; 0</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>-1 &lt; k &lt; 0</math></p> <p>Dans cet exemple : <math>k = -0,5</math></p>  <p><math>OB' = 0,5 \times OB</math> et <math>O \in [BB')</math> car <math>k &lt; 0</math>  <math>OC' = 0,5 \times OC</math> et <math>O \in [CC')</math> car <math>k &lt; 0</math></p>

## II) Construction

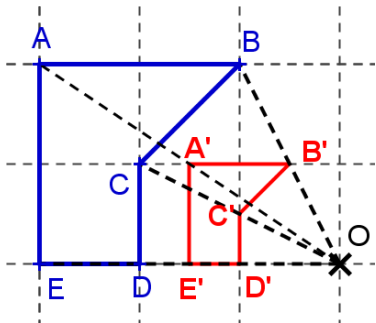
### 1) Construction de l'image d'un point par une homothétie de centre O et de rapport k

Exemples et méthodes :

<p style="text-align: center;"><math>k &gt; 1</math></p> <p>Construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport 2</p> <p>Comme <math>k &gt; 0</math> alors <math>A' \in [OA)</math> Comme <math>k = 2</math> alors <math>OA' = 2 \times OA</math> si <math>OA = 2,5</math> cm alors <math>OA' = 2 \times 2,5 = 5</math> cm</p> 	<p style="text-align: center;"><math>k &lt; -1</math></p> <p>Construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport <math>-1,5</math></p> <p>Comme <math>k &lt; 0</math> alors <math>O \in [AA')</math> Comme <math>k = -1,5</math> alors <math>OA' = 1,5 \times OA</math> si <math>OA = 3</math> cm alors <math>OA' = 1,5 \times 3 = 4,5</math> cm</p> 
<p style="text-align: center;"><math>0 &lt; k &lt; 1</math></p> <p>Construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport 0,8</p> <p>Comme <math>k &gt; 0</math> alors <math>A' \in [OA)</math> Comme <math>k = 0,8</math> alors <math>OA' = 0,8 \times OA</math> si <math>OA = 2,5</math> cm alors <math>OA' = 0,8 \times 2,5 = 2</math> cm</p> 	<p style="text-align: center;"><math>-1 &lt; k &lt; 0</math></p> <p>Construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport <math>-0,8</math></p> <p>Comme <math>k &lt; 0</math> alors <math>O \in [AA')</math> Comme <math>k = -0,8</math> alors <math>OA' = 0,8 \times OA</math> si <math>OA = 2,5</math> cm alors <math>OA' = 0,8 \times 2,5 = 2</math> cm</p> 

## 2) Construire l'image d'une figure par une homothétie

Pour tracer l'image d'une figure par une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ , on trace **point par point** les images de chaque point qui compose la figure



## 3) Image d'une droite par une homothétie

L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est **parallèle**.

Exemple et méthode :

<p>Construire l'image de cette droite par une <b>homothétie de centre <math>O</math> et de rapport <math>1,5</math></b></p>	
<p>- On place deux points <math>A</math> et <math>B</math> sur cette droite            - On trace leurs images respectives <math>A'</math> et <math>B'</math> :  <math>A' \in [OA)</math> et <math>OA' = 1,5 \times OA</math>  <math>B' \in [OB)</math> et <math>OB' = 1,5 \times OB</math></p>	
<p>On trace la droite <math>(d')</math> passant par les points <math>A'</math> et <math>B'</math>.  <b>Les droites sont bien parallèles</b></p>	

## III) Propriétés

- Un **point**, son **image** par une homothétie et le **centre** de l'homothétie sont alignés
- L'image d'un point par une homothétie de **rapport 1** est le point lui-même (il n'y a **aucune transformation** lorsque le rapport est 1)
- Une homothétie de **rapport -1** est une **symétrie centrale** dont le centre est le centre de l'homothétie.