

CHAPITRE 16 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I) SOLIDES - REPRESENTATION EN PERSPECTIVE CAVALIERE.

1) SOLIDES.

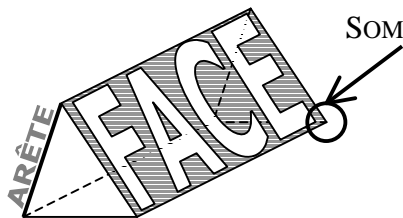
Un solide est une figure « en relief ».

Un solide, au sens géométrique, est un objet limité par des surfaces indéformables. Ces surfaces si elles sont planes sont des faces. Mais il y a beaucoup de solides qui n'ont pas de surface plane, la boule par exemple.

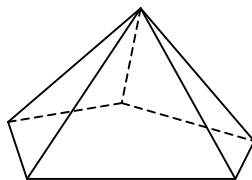
2) SOLIDES EN PERSPECTIVE CAVALIERE.

Puisqu'il est impossible de faire tenir un solide sur une feuille plane, on le représente suivant un procédé de dessin appelé **perspective cavalière**.

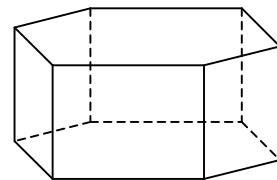
Exemples :



5 faces
9 arêtes (dont 3 cachées)
6 sommets



6 faces
10 arêtes (dont 3 cachées)
6 sommets



8 faces
18 arêtes (dont 5 cachées)
12 sommets

Règles de représentation :

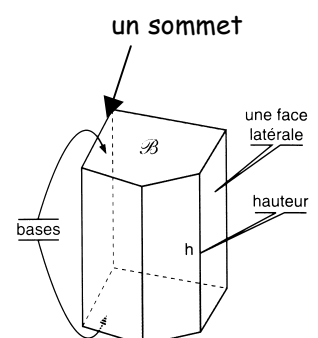
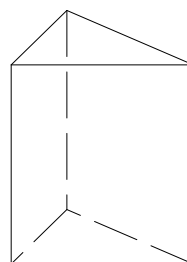
- Les faces avant et arrière (situées dans le même plan que la feuille) sont en **vraie grandeur**.
- Les autres faces sont déformées par la perspective, qui ne conserve que le parallélisme.
- Les arêtes cachées sont représentées en **pointillés**.

II) QUELQUES SOLIDES : description et représentation.

1) LES PRISMES DROITS.

a) Prismes droits.

Un **prisme droit** est un solide à deux faces polygonales superposables : les **bases**. Les autres faces, appelées **faces latérales**, sont des rectangles.



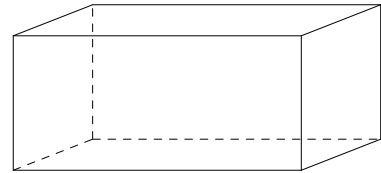
Propriétés :

- Les plans des deux bases d'un prisme droit sont parallèles.
- Les arêtes latérales sont parallèles, elles sont perpendiculaires aux plans de bases.
- Les arêtes latérales ont même longueur ; c'est la hauteur du prisme.

b) Cas particuliers.

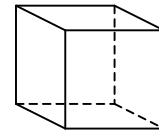
- **Parallélépipède rectangle :**

Un **parallélépipède rectangle** est un prisme droit particulier : toutes les faces sont des rectangles y compris les bases.



- **Cube :**

Un **cube** est un prisme droit dont toutes les faces sont des carrés.



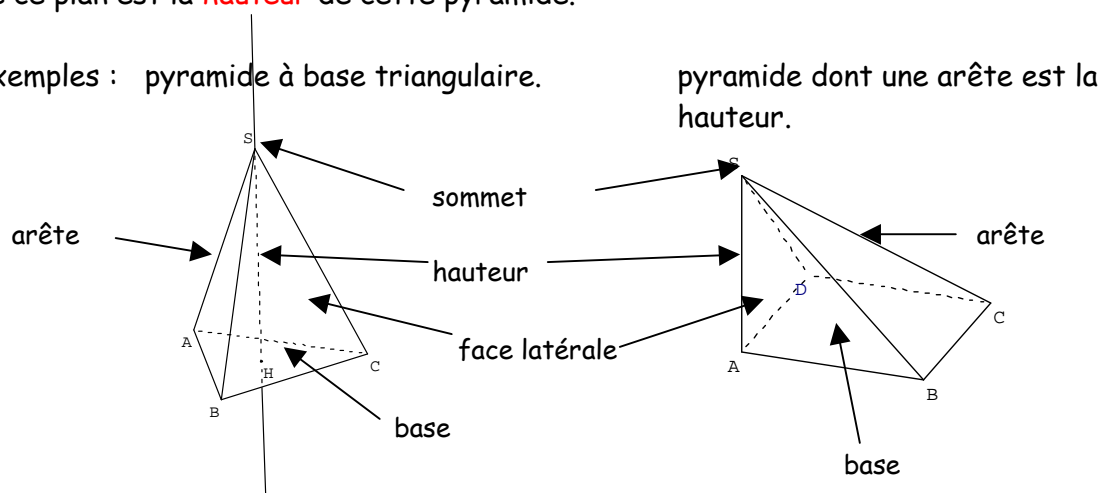
2) LES PYRAMIDES.

a) Pyramides.

Une **PYRAMIDE DE SOMMET S** est un solide délimité par :

- **sa base** : c'est la face qui ne contient pas S (triangle, quadrilatère, ...)
 - **ses faces latérales** : ce sont des triangles de sommet S, dont un des côtés de la base.
- Le segment [SH] (ou la longueur SH) perpendiculaire au plan de la base, où H est un point de ce plan est la **hauteur** de cette pyramide.

Exemples : pyramide à base triangulaire.



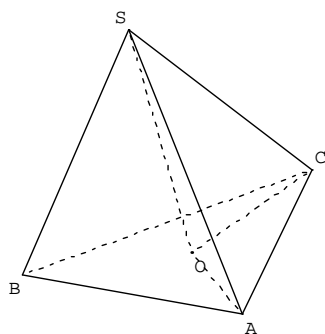
b) Pyramides régulières.

Une pyramide de sommet S est dite **REGULIERE** lorsque :

- sa base est un polygone régulier de centre O (triangle équilatéral, carré, ...)
- [SO] est la hauteur de la pyramide.

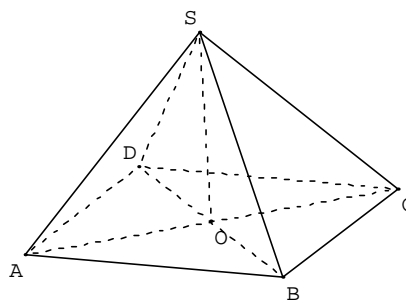
Propriété : Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles superposables.

Exemples : Pyramide régulière à base triangulaire



ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O.

Pyramide régulière à base carrée.



ABCD est un carré de centre O.

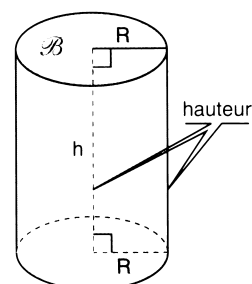
3) SOLIDES DE REVOLUTION.

a) Cylindres de révolution.

Un **cylindre de révolution** est un solide engendré par la rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés.

Les deux bases sont des disques de même rayon.

Le segment (ou sa longueur) qui joint les centres des bases est la hauteur de ce cylindre.



Propriétés :

- Les plans des bases d'un cylindre de révolution sont parallèles.
- La hauteur d'un cylindre de révolution est perpendiculaire aux plans des bases.

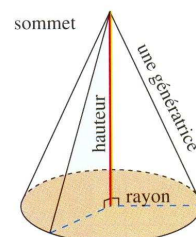
b) Cônes de révolution.

Un **CONE DE REVOLUTION DE SOMMET S** est le solide engendré par la rotation d'un triangle SOM rectangle en O autour de la droite (SO).

Le disque de centre O et de rayon OM est la BASE de ce cône.

Le segment [SO] (ou la longueur SO) est la hauteur de ce cône.

Cône de révolution



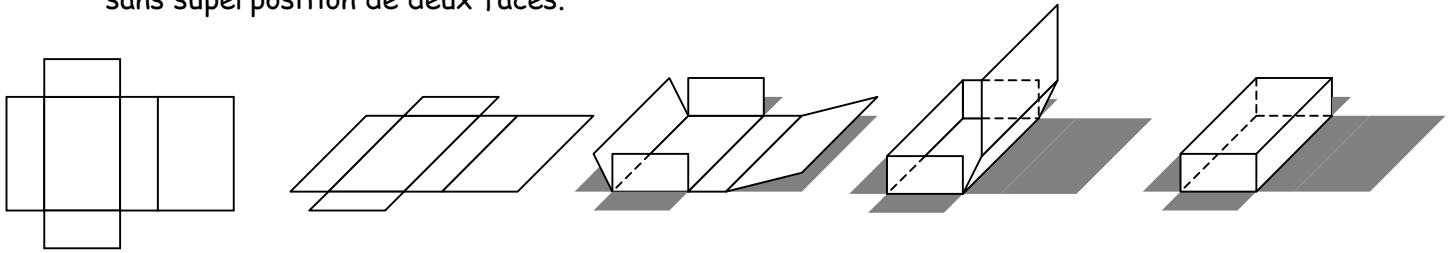
base (c'est un disque)

Propriété : Le segment [SO] est perpendiculaire au plan de base.

III) PATRONS.

1) DEFINITION.

Un **patron** d'un solide est une surface plane qui, après pliage, permet de fabriquer ce solide sans superposition de deux faces.



1. Le patron du pavé droit

2. Le même patron en perspective cavalière.

3. On découpe et on plie

4. On colle les arêtes

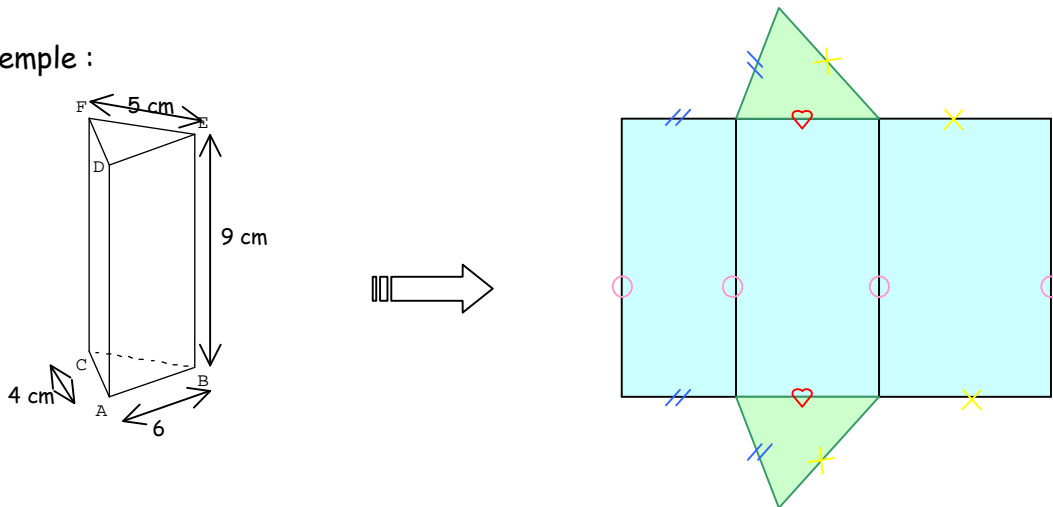
5. On obtient le pavé droit.

Il y a plusieurs patrons possibles pour un même solide.

2) LES PRISMES DROITS.

Un patron d'un prisme droit est composé de deux bases identiques et de rectangles. Il y a autant de rectangles que de côtés du polygone de base.

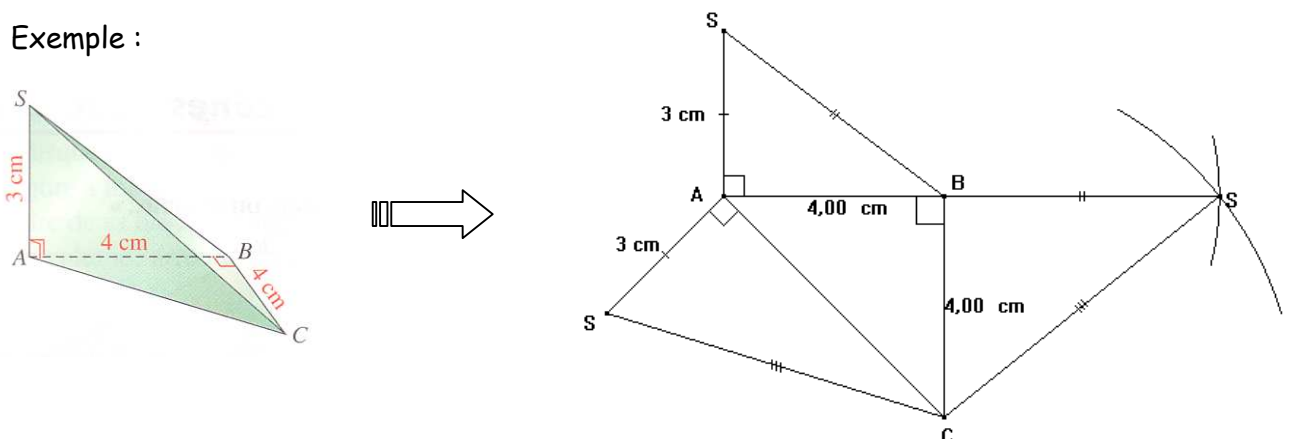
Exemple :



3) LES PYRAMIDES.

Un patron d'une pyramide est composé de la base et de triangles. Il y a autant de triangles que de côtés du polygone de base.

Exemple :



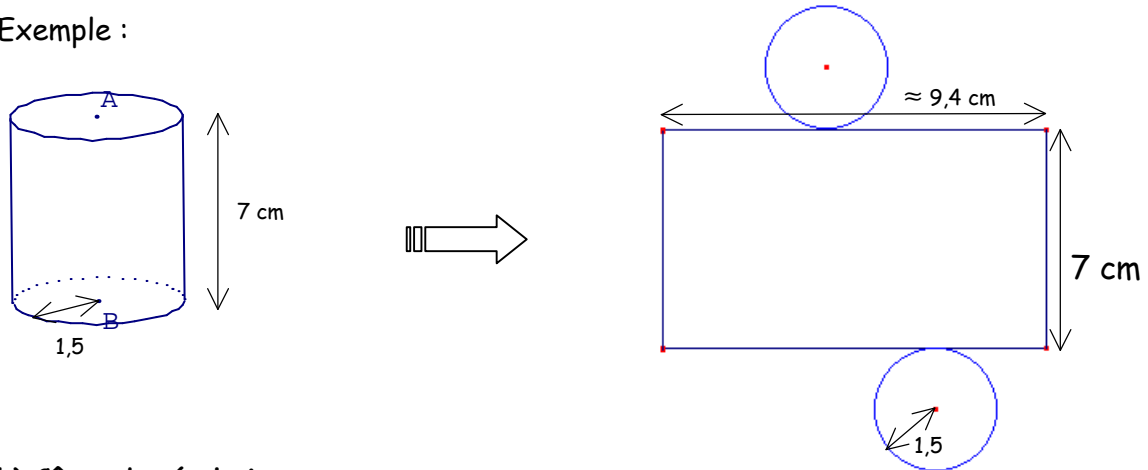
4) SOLIDES DE REVOLUTION.

a) Cylindres de révolution.

Un patron d'un cylindre de révolution est composé :

- d'un rectangle dont les dimensions sont : le périmètre d'un disque de base et la hauteur du cylindre ;
- de deux disques positionnés de part et d'autre de ce rectangle.

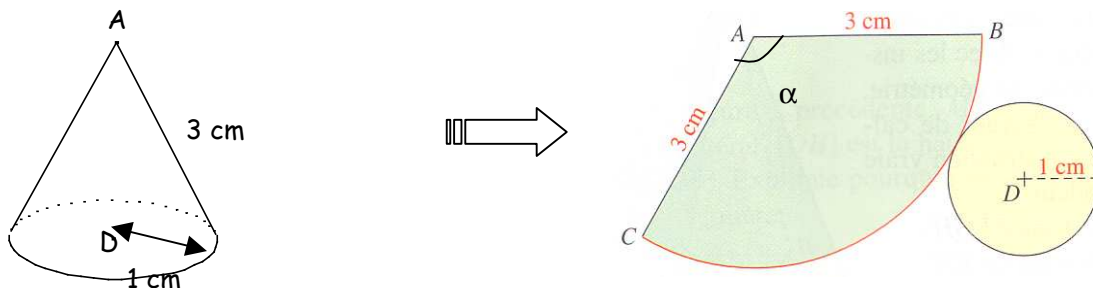
Exemple :



b) Cônes de révolution.

Un patron d'un cône de révolution est composé du disque de base et d'un secteur circulaire. La longueur de l'arc de cercle de ce secteur est égal au périmètre de la base.

Exemple :



Le périmètre du cercle de base est égal à la longueur de l'arc de cercle BC.

Calcul de la mesure de l'angle \widehat{BAC} :

- périmètre du cercle de base : $2\pi \times 1 = 2\pi$;
- périmètre du cercle de rayon $AB = 3\text{ cm}$: $2\pi \times 3 = 6\pi$;
- on peut alors construire un tableau de proportionnalité pour calculer la mesure α de l'angle \widehat{BAC} .

Mesure de l'angle	α	360°
Longueur de l'arc	2π	6π

d'où $\alpha \times 6\pi = 360 \times 2\pi$

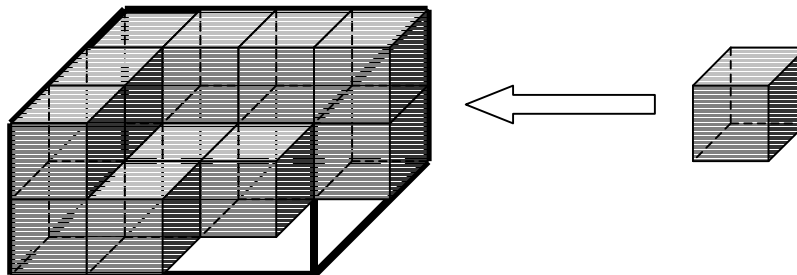
$$\alpha = \frac{360 \times 2\pi}{6\pi} = 120^\circ.$$

IV) VOLUME.

1) VOLUME D'UN SOLIDE.

Le volume d'un solide est le nombre de cubes (dont les arêtes mesurent 1 unité de longueur) nécessaire pour le remplir complètement.

Exemple :



→ Chaque petit **cube** mesure **1 cm** de côté, on dit que son volume est **1 centimètre cube** (noté **1 cm³**).

→ Pour remplir ce pavé droit, il faudrait **24 cubes** de ce type. On dit que son volume est **24 cm³**.

2) UNITES DE VOLUME.

a) Unité légale.

L'unité de volume légale est le **mètre cube** : c'est le volume d'un cube de 1 m de côté. On la note **1 m³**.

On utilise aussi des multiples et des sous-multiples décimaux du mètre carré.

km³ **hm³** **dam³** **m³** **dm³** **cm³** **mm³**

multiples du m³

unité légale sous-multiples du m³

b) Changement d'unité.

Quand on passe d'une unité à l'unité immédiatement inférieure (exemple du cm³ au mm³), la mesure du volume d'un solide est multipliée par 1 000.

Pour les conversions, on peut utiliser un tableau :

km ³			hm ³			dam ³			m ³			dm ³			cm ³			mm ³					

Exemples : 0,004 5 cm³ = mm³ ;
 49 000 cm³ = dm³.

c) Volume et contenance.

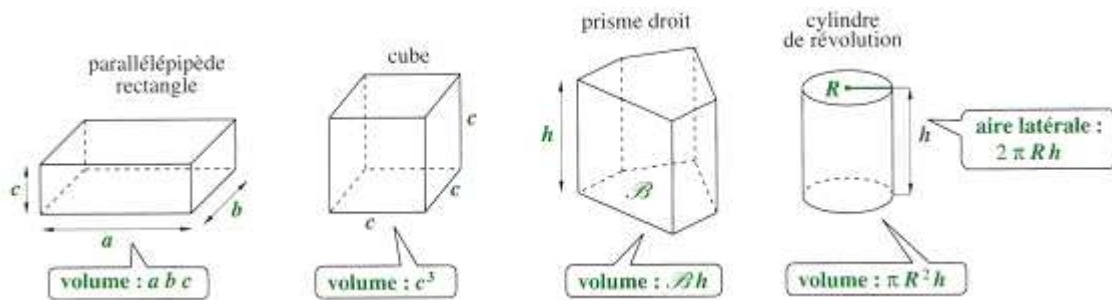
Un cube de 1 dm^3 contient exactement 1 L.

Exemples :

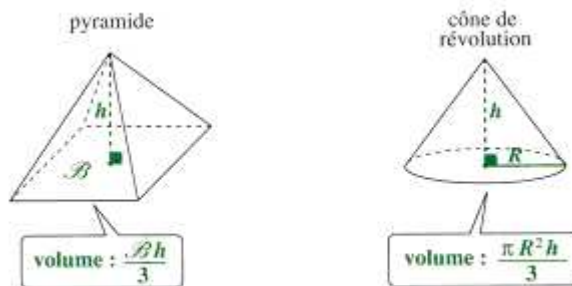
$$75 \text{ cL} = 0,75 \text{ L} = 0,75 \text{ dm}^3 = 750 \text{ cm}^3.$$

$$1,5 \text{ m}^3 = 1\,500 \text{ dm}^3 = 1\,500 \text{ L} = 15 \text{ hL}.$$

3) FORMULAIRE.



\mathcal{B} : aire de la base



\mathcal{B} : l'aire de la base

4) CALCULS DE VOLUME.

Exemple 1 : Calculer le volume d'un parallélépipède de dimensions 7 cm, 5 cm et 30 mm.

$$30 \text{ mm} = 3 \text{ cm}$$

$$V = 7 \times 5 \times 3 = 105$$

Le volume de ce parallélépipède rectangle est de 105 cm^3 .

Exemple 2 : Calculer le volume d'une pyramide de 15 cm de hauteur a une base carré de 6 cm de côté.

$$\mathcal{B} = c^2 = 6^2 = 36$$

$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{36 \times 15}{3} = 180$$

Cette pyramide a pour volume 180 cm^3 .

Exemple 3 : calculer le volume d'un cône de révolution de 5 cm de hauteur et de 3 cm de rayon de disque de base.

$$\mathcal{B} = \pi r^2 = \pi \times 9 = 9 \pi$$

$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{9 \pi \times 5}{3} = 15 \pi \quad \text{d'où} \quad V \approx 47,12.$$

Ce cône a pour volume exact $15 \pi \text{ cm}^3$ et comme valeur arrondie au centième $47,12 \text{ cm}^3$.

