CALCUL LITTÉRAL

Chapitre 16

I — Substituer

1. Avec une expression littérale

Définition

Dans une expression littérale, lorsqu'on connaît la valeur de cette lettre, on peut faire une substitution pour calculer la valeur de l'expression. Substituer signifie remplacer : on remplace la lettre par sa valeur.

Méthode (calculer $A = x + 5$ pour $x = 10$)

On remplace le x par la valeur 10 :
$$\begin{aligned} A &= 10+5 \\ A &= 15. \end{aligned}$$

■ **EXERCICE 1 :**

1. Calcule $B = x + (-8)$ pour $x = 5$.
2. Calcule $C = x - 5$ pour $x = -10$.
3. Calcule $D = c + 11$ pour $c = -1$.
4. Calcule $E = 3 - d$ pour $d = 6$.

Solution : 1. $B = 5 + (-8) = -3$; $C = -10 - 5 = -15$ (et non -5) ; $D = -1 + 11 = 10$ (et non -11) et $E = 3 - 6 = -3$.

Rappel

En mathématiques, il est interdit que deux nombres (connus ou inconnus) se suivent sans aucun lien. Si le lien n'est pas visible, c'est qu'il s'agit forcément d'une multiplication cachée.

Exemples 1 : $5x$ *signifie* $5 \times x$; $xy = x \times y$; $12a^2 = 12 \times a \times a$; ...

■ **EXERCICE 2 :**

1. Calcule $G = 6x$ pour $x = 10$.
2. Calcule $H = 4x$ pour $x = -9$.
3. Calcule $I = 7g$ pour $g = 5$.
4. Calcule $J = 30h$ pour $h = -1$.

Solution : $G = 6 \times 10 = 60$ (et non 610 !) ; $H = 4 \times (-9) = -36$; $I = 7 \times 5 = 35$ et $J = 30 \times (-1) = -30$.

Oral :	En classe :	À la maison :
—	—	—

Méthode (calculer $K = 5x^2 + 2x + 1$ pour $x = -4$)

$$\begin{aligned} K &= 5 \times x^2 + 2 \times x + 1 \longleftarrow \text{on écrit les opérations cachées} \\ K &= 5 \times (-4)^2 + 2 \times (-4) + 1 \longleftarrow \text{on remplace tous les } x \text{ par sa valeur} \\ K &= 73 \longleftarrow \text{on calcule avec la calculatrice} \end{aligned}$$

Rappel : quand on remplace x par un nombre négatif, il faut bien penser à mettre des parenthèses autour de ce nombre !

■ **EXERCICE 3 :**

1. Calcule $L = 9x + 15$ pour $x = 2$.
2. Calcule $M = 5x - 3$ pour $x = -4$.
3. Calcule $N = 4f + 7$ pour $f = -5$.
4. Calcule $O = 3g - 4$ pour $g = -3$.

Solution : $L = 9 \times 2 + 15 = 18 + 15 = 33$; $M = 5 \times (-4) - 3 = -20 - 3 = -23$; $N = 4 \times (-5) + 7 = -20 + 7 = -13$ (et non -27 !) et $O = 3 \times (-3) - 4 = -9 - 4 = -13$ (et non -5).

■ **EXERCICE 4 :**

1. Calcule $P = 6x^2 + 7$ pour $x = -2$.
2. Calcule $Q = x^2 - 15$ pour $x = -4$.
3. Calcule $R = 2c^2 - 7$ pour $c = 6$.
4. Calcule $S = d^2 - 20$ pour $d = -8$.

Solution : $P = 6 \times (-2)^2 + 7 = 6 \times 4 + 7 = 24 + 7 = 31$; $Q = (-4)^2 - 15 = 16 - 15 = 1$; $R = 2 \times 6^2 - 7 = 2 \times 36 - 7 = 72 - 7 = 65$ et $S = (-8)^2 - 20 = 64 - 20 = 44$.

■ **EXERCICE 5 :**

1. Calcule $T = 4x^2 + 3x + 1$ pour $x = 2$.
2. Calcule $U = 9x^2 - 2x + 7$ pour $x = -1$.
3. Calcule $V = 3g^2 + 5g - 11$ pour $g = -3$.
4. Calcule $W = h^2 - h + 3$ pour $h = 5$.

Solution :

1. $T = 4 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 4 \times 4 + 6 + 1 = 16 + 6 + 1 = 23$.
2. $U = 9 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 7 = 9 \times 1 + 2 + 7 = 9 + 2 + 7 = 18$.
3. $V = 3 \times (-3)^2 + 5 \times (-3) - 11 = 3 \times 9 - 15 - 11 = 27 - 15 - 11 = 1$.
4. $W = 5^2 - 5 + 3 = 25 - 5 + 3 = 23$ (et non $\cancel{5^2 - 5 + 3 = 25 - 8 = 13}$: grosse erreur de priorité !)

Oral :	En classe :	À la maison :
—	—	—

2. Avec un programme de calculs

Méthode (TRADUIRE UN PROGRAMME DE CALCULS EN EXPRESSION LITTÉRALE)

- ⋆ **Choisis un nombre.**
- ⋆ **Multiplie-le par 7.**
- ⋆ **Ajoute 8.**
- ⋆ **Écris le résultat.**

Réponse :

a) On choisit x $\longrightarrow$ **on choisit une lettre, en général x**
b) $7 \times x = 7x$
c) $7x + 8$ ($\neq 15x$) $\Big\}$ $\longrightarrow$ **on doit tenir compte des techniques de calcul littéral**
d) Le résultat est $7x + 8$. $\longrightarrow$ **on écrit le résultat**

■ **EXERCICE 6 :** En t'aidant de l'exemple de la méthode précédente, traduis à l'aide d'une expression littérale les deux programmes de calculs suivants :

Programme n° 1

- ◊ Choisis un nombre.
- ◊ Multiplie-le par 5.
- ◊ Soustraie 4 à ce produit.
- ◊ Écris le résultat.

Programme n° 2

- ☐ Choisis un nombre.
- ☐ Élève-le au carré.
- ☐ Multiplie par 4.
- ☐ Soustraie 10.
- ☐ Écris le résultat.

Solution : Programme n° 1 : $5x - 4$; Programme n° 2 : $4x^2 - 10$.

Oral :	En classe :	À la maison :
—	—	—

II — Développer

Méthode (DÉVELOPPER $a(bx + c)$)

On veut développer l'expression $A = 5(8x + 2)$:

$$A = 5(8x + 2)$$
$$A = 5 \times (8x + 2) \longleftarrow \textit{on écrit la multiplication et les flèches de développements}$$
$$A = \underbrace{5 \times 8x} + \underbrace{5 \times 2} \longleftarrow \textit{chaque flèche correspond à une multiplication qu'on écrit}$$
$$A = 40x + 10. \longleftarrow \textit{on calcule chaque multiplication}$$

Remarque

Les flèches de développement sont là pour rappeler qu'il y deux multiplications à calculer, il ne faudra surtout pas les oublier dans la rédaction !

■ **EXERCICE 7 :** Développe et réduis :

$A = 7(2x + 3)$ $B = 8(6 + 3x)$ $C = 9x\,(2x + 7)$ $D = 2x\,(9 + 3x)$

Solution : $A = 14x + 21$; $B = 48 + 24x$: $C = 18x^2 + 63x$ et $D = 18x + 6x^2$.

Oral : –	En classe : –	À la maison : –

Méthode (DÉVELOPPER $a(bx - c)$)

On veut développer $B = 4(8x - 3)$:

$$B = 4(8x - 3)$$
$$B = 4 \times (8x - 3) \longleftarrow \textit{on écrit la multiplication et les flèches de développements}$$
$$B = \underbrace{4 \times 8x} - \underbrace{4 \times 3} \longleftarrow \textit{chaque flèche correspond à une multiplication qu'on écrit}$$
$$B = 32x - 12. \longleftarrow \textit{on calcule chaque multiplication}$$

■ **EXERCICE 8 :** Développe et réduis :

$A = 4x\,(2x - 7)$ $B = 8x\,(2 - 5x)$ $C = 6x\,(2x - 4)$ $D = 2x\,(9 - 2x)$

Solution : $A = 8x^2 - 28x$; $B = 16x - 40x^2$; $C = 12x^2 - 24x$ et $D = 18x - 4x^2$.

■ **EXERCICE 9 :** Développe et réduis :

$A = 4(4a + 5)$	$C = 5(4c^2 - 1)$	$E = 9e(e + 6)$
$B = 6(7 - b)$	$D = d^2(3 + 7d)$	$F = f^2(2 - f)$

Solution : $A = 16a + 20$; $B = 42 - 6b$; $C = 20c^2 - 5$; $D = 3d^2 + 7d^3$; $E = 9e^2 + 54e$ et $F = 2f^2 - f^3$.

Oral : –	En classe : –	À la maison : –

III — Autres utilisations du calcul littéral

1. Démonstrations

On a déjà vu au chapitre "Parallélogramme et initiation au raisonnement" (page 8) la notion de démonstration en géométrie. Dans les chapitres de nombres, cette notion existe aussi mais ne passera pas par un schéma DPC mais plutôt le… calcul littéral :

— Pour démontrer que quelque chose est faux, il suffit de trouver une valeur pour laquelle ça ne fonctionne pas. On parle de **contre-exemple**.

— Par contre, pour démontrer que quelque chose est vrai, on ne peut pas se contenter de le faire sur plusieurs exemples, il faut le démontrer *pour tous les nombres* en même temps !

Exemples :

◇ *Tout multiple de 3 s'écrit de la manière $3n$, où n désigne n'importe quel nombre.*

◇ *Un nombre pair est divisible par 2, par conséquent il s'écrit sous la forme $2n$, où n désigne n'importe quel nombre.*

◇ *Par conséquent, tout nombre impair s'écrira forcément sous la forme $2n + 1$, où n désigne n'importe quel nombre. En effet, lorsqu'on ajoute 1 à un nombre pair, on passe à un nombre impair !*

■ **EXERCICE 10 :**

1. Montrer que la somme de deux nombres consécutifs donne toujours un nombre impair.
2. Montrer que la somme de trois nombres consécutifs est toujours un multiple de 3.
3. Est-qu'un nombre qui se termine par 3 est forcément divisible par 3 ? Justifie.

Remarque

Ceci est particulièrement utile pour démontrer par exemple que deux programmes de calculs donnent (calcul littéral) ou non (contre-exemple) toujours le même résultat. Qu'en est-il des deux programmes de l'exercice 6 ?

Oral : —	**En classe :** —	**À la maison :** —

2. Tests d'égalité

Définitions

Une égalité est une expression mathématique dans laquelle figure le symbole « $=$ ». Lorsque cette expression contient au moins une lettre, on appelle alors cette égalité une équation.

Le but d'une équation est de trouver **la** valeur cachée derrière la lettre. Une méthode générale sera vue en 4ème. Cette année, nous allons utiliser la substitution (voir paragraphe I) pour tester l'égalité :

Propriété

Pour tester une égalité pour une certaine valeur de x, on remplace chaque x par sa valeur et on calcule (soit d'un côté seulement, soit des deux, tout dépend de l'égalité). On obtient alors deux valeurs qu'on peut comparer.

Si les résultats sont identiques, alors cette valeur de x est solution. Dans le cas contraire, x n'est pas solution et il faut recommencer le test d'égalité avec une autre valeur de x.

■ **EXERCICE 11 :**

a) Le nombre 5 est-il solution de l'équation $4x - 2 = 8$?
b) Le nombre 6 est-il solution de l'équation $x^2 - 8 = 28$?
c) Le nombre 2 est-il solution de l'équation $4x - 1 = 3x + 1$?
d) Le nombre 3 est-il solution de l'équation $5x - 4 = x^2 + 2$?

Solution : a) non car $4 \times 5 - 2 = 18 \neq 8$. b) Oui car $6^2 - 8 = 28$. c) oui car $4 \times 2 - 1 = 7$ et $3 \times 2 + 1 = 7$. d) Oui car $5 \times 3 - 4 = 11$ et $3^2 + 2 = 11$.

Oral : —	**En classe :** —	**À la maison :** —