Limites de fonctions et continuité

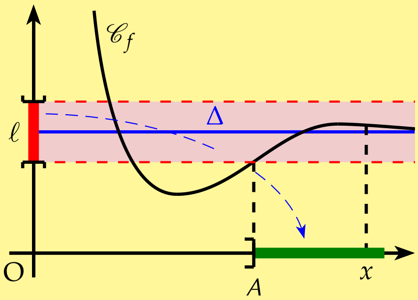
Table des matières

-

1 Limite finie ou infinie à l'infini

1.1 Limite finie à l'infini

Définition 1 : Une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand - c'est à dire pour $x \in]A;+\infty[$. On note alors :



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

La droite Δ d'équation $y = \ell$ est dite **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$.

On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ avec $x \in]-\infty\,;\,B[$.

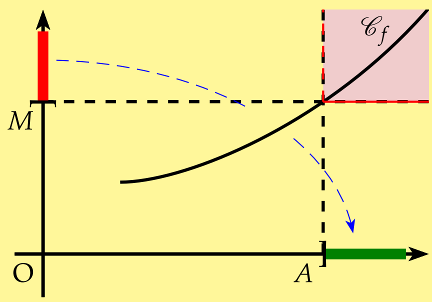
Remarque : Aussi petit que soit l'intervalle contenant ℓ, il faut pouvoir trouver A.

Exemple : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ont des limites nulles en $+\infty$.
$x \mapsto e^x$ a pour limite 0 en $-\infty$.

Leurs courbes admettent alors la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale.

1.2 Limite infinie à l'infini

Définition 2 : Une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, si tout intervalle $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand - c'est à dire pour $x \in]A;+\infty[$. On note alors :



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

On définit de façon analogue :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ de }]M\,;\,+\infty[\text{ vers }]-\infty\,;\,B[$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ de }]-\infty\,;\,m[\text{ vers }]A\,;\,+\infty[$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ de }]-\infty\,;\,m[\text{ vers }]-\infty\,;\,B[$$

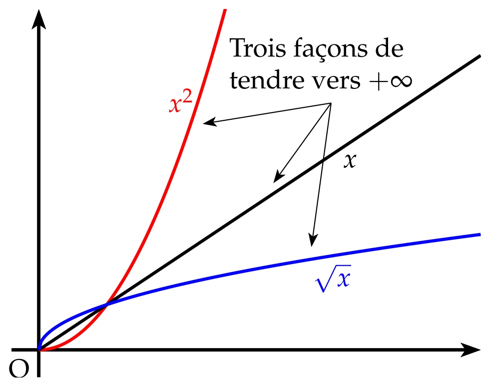
Remarque : Aussi grand que soit M, il faut pouvoir trouver A.

Exemple : $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto e^x$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

$x \mapsto x^n$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si n est pair et $-\infty$ en $-\infty$ si n est impair.

Une fonction peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ de plusieurs façons. C'est le cas par exemple des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

- $x \mapsto x^2$ tend « rapidement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le haut.
- $x \mapsto x$ tend « moyennement » vers l'infini. Pas de concavité.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ tend « lentement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le bas



1.3 Limites en l'infini des fonctions de référence

$f(x)$	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	e^x	e^{ax}
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$ $a>0$ 0 $a<0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	0	non défini	non défini	0	0 $a>0$ $+\infty$ $a<0$

2 Limite en un point

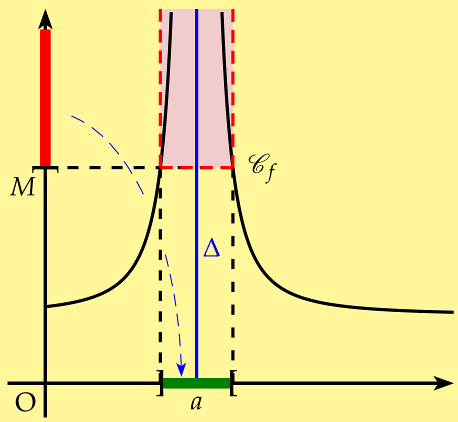
2.1 Limite infinie en un point

Définition 3 : Une fonction f a pour limite $+\infty$ en a, si tout intervalle $]M;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a - c'est à dire pour les x d'un intervalle ouvert contenant a. On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

La droite Δ d'équation $x = a$ est dite **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$

On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

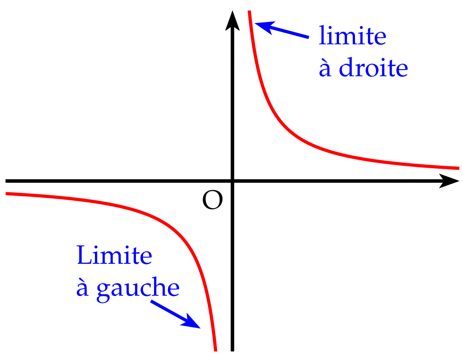


On définit la limite à gauche ou à droite de $x = a$ lorsque la limite en $x = a$ n'existe pas :

limite à gauche : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

limite à droite : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, mais admet une limite à gauche et à droite de 0.



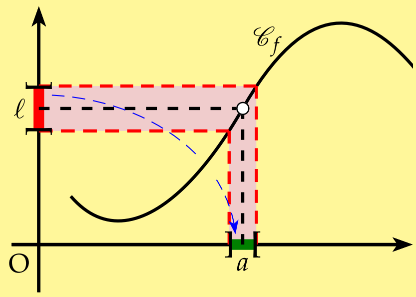
2.2 Limites en 0 des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	non défini

2.3 Limite finie en un point

Définition 4 : Une fonction f a pour limite ℓ en a, si que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$



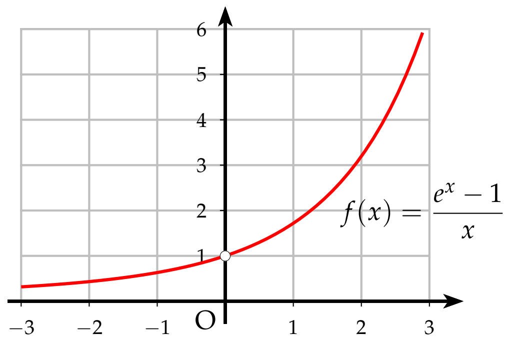
Exemple : $\displaystyle\lim_{x\to 2} x^2 - 1 = 3$.

Une fonction peut ne pas être définie et admettre une limite en a.

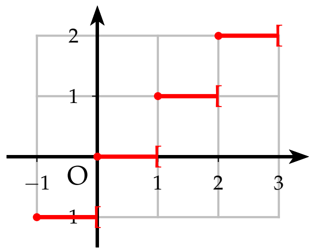
Par exemple la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ n'est pas définie en 0 mais :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Taux d'accroissement de exp en 0.



Remarque : Parfois la fonction f n'admet pas une limite en a, mais admet une limite à droite et une limite à gauche. C'est le cas de la fonction partie entière E. On a par exemple : $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} E(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} E(x) = 2$



3 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions et a un réel ou $\pm\infty$. On note F.I. une forme indéterminée

3.1 Somme de fonctions

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exemples :

1) Limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

2) Limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par somme, on ne peut conclure} \\ \textbf{Forme indéterminée : } +\infty - \infty\end{array}$$

3.2 Produit de fonctions

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$	ℓ'	∞	∞	∞
$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)$	$\ell \times \ell'$	∞*	F.I.	∞*

*Appliquer la règle des signes

Exemples :

1) Limite en $-\infty$ de la fonction précédente : $f(x) = x^2 + x$

Pour lever la forme indéterminée, on factorise $f(x)$ par le terme prédominant :

$$f(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On a alors avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

2) Limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

Forme indéterminée, on factorise $f(x)$ par le terme prédominant :

$$f(x) = x - \sqrt{x} = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

3) Limite à droite de 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sin x = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par produit, on ne peut conclure} \\ \textbf{Forme indéterminée } 0\times\infty\end{array}$$

3.3 Quotient de fonctions

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0 (1)	0	∞	ℓ' (1)	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞^*	F.I.	0	∞^*	F.I.

*Appliquer la règle des signes (1) doit avoir un signe constant

Exemples :

1) Limite en -2 de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

On détermine le signe de $x+2$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-2} 2x-1 = -5 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} x+2 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x+2 = 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \end{array}$$

On en déduit alors une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

2) Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$

Forme indéterminée : $\dfrac{\infty}{\infty}$. On factorise numérateur et dénominateur par le terme prépondérant :

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{2+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{2}{x}}$$

On obtient alors : $$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{2}{x} = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

3.4 Conclusion

Il existe quatre formes indéterminées où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Dans les cas d'indétermination, on peut :

- mettre en facteur le terme prépondérant (pour les polynômes et les fonctions rationnelles) en l'infini,
- simplifier pour la forme zéro sur zéro en un point,
- multiplier par la quantité conjuguée (pour les fonctions irrationnelles),
- utiliser un théorème de comparaison,
- effectuer un changement de variable …

4 Limite d'une fonction composée

Théorème 1 : Soit deux fonctions f, g et a, b, c des réels ou $\pm\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} g\left[f(x)\right] = c$$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1\end{array}\right\}$ Par composition, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 1$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0\end{array}\right\}$ Par composition, on a : $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

On peut éventuellement faire un changement de variable en posant $X = \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 1$$

Théorème 2 : Limites de fonctions et de suites

Soit une suite (u_n) définie par : $u_n = f(n)$. f est alors la fonction réelle associée à la suite (u_n). Soit a un réel ou $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} u_n = a$$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sqrt{2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

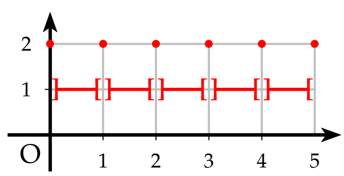
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}\end{array} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

Remarque : La limite de f est transmise à la suite mais la réciproque est fausse. Une suite (u_n) peut admettre une limite sans que sa fonction associée en ait une. Pour s'en convaincre :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ f(x) = 1 & \text{sinon}\end{cases}$

La limite de f en $+\infty$ n'existe manifestement pas.
La suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est constante et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.



5 Théorèmes des gendarmes et de comparaison

Théorème 3 : f, g, h trois fonctions définies sur $I =]b\,;+\infty[$ et ℓ un réel.
Si pour tout $x \in I$:

Théorème des « Gendarmes » (pour montrer une limite finie)

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Théorèmes de comparaison (pour montrer une limite infinie)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \left.\begin{array}{l} f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque : Énoncés analogues en :
- $-\infty$ avec $I =]-\infty\,;b[$
- un réel a avec I un intervalle ouvert contenant a.

Démonstration :

1) Théorème des gendarmes : en $+\infty$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ alors, d'après la définition des limites finies, tout intervalle ouvert J contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $g(x)$ et $h(x)$ pour x assez grand.

Comme $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ il en est de même pour $f(x)$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

2) Théorème de comparaison : en $+\infty$ dans le cas où $f(x) \geqslant g(x)$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors d'après la définition des limites infinies, tout intervalle ouvert $]M\,;+\infty[$, contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand.

Comme $f(x) \geqslant g(x)$ il en est de même pour $f(x)$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemples :

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

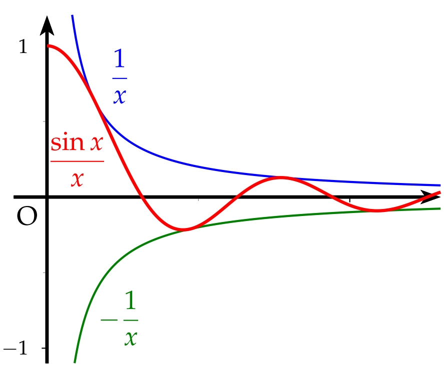
Pour tout réel positif x :

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \overset{\div x>0}{\Leftrightarrow} -\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

D'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$$



2) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+\cos x$

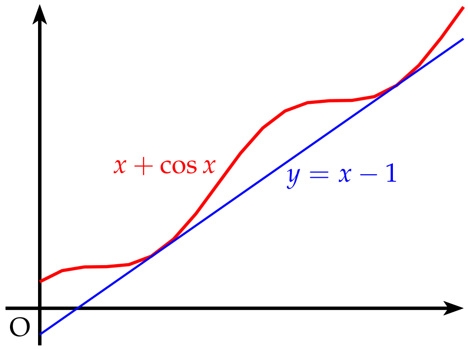
Pour tout réel x :

$\cos x \geqslant -1 \overset{+x}{\Leftrightarrow} x+\cos x \geqslant x-1$

or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$,

d'après le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$



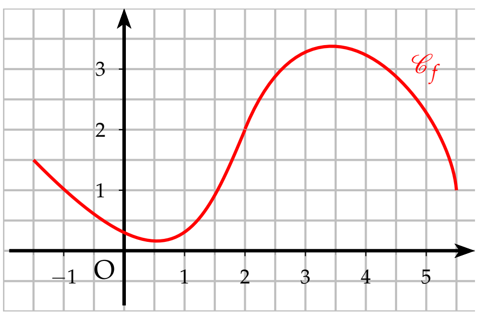
6 Continuité

6.1 Continuité en un point

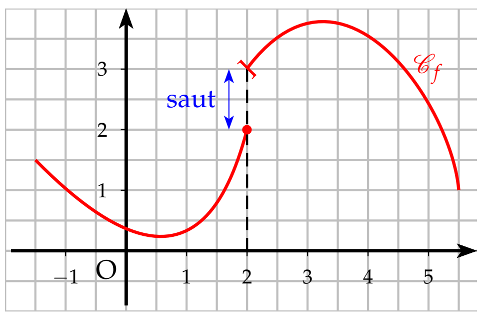
Définition 5 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a. On dit que f est **continue** en a si et seulement si : $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

La fonction f est **continue sur un intervalle I** si, et seulement si, f est continue en tout point de I.

Remarque : Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en « un seul morceau ».

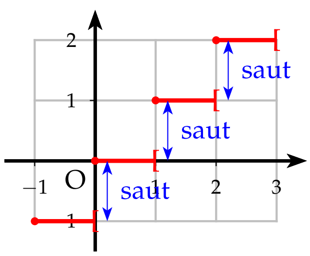


f continue sur $\mathrm{I}=[-1,5\,;5,5]$



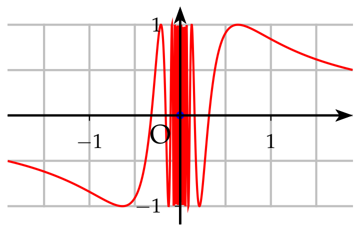
f discontinue en 2 car $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x)=3\neq f(2)$

La fonction de droite représente une discontinuité par « saut ». Un autre exemple bien connu est la discontinuité de la fonction partie entière en chaque valeur entière.
Cependant d'autres discontinuités existent et l'expression « en un seul morceau » n'est alors pas correcte. Il faut alors revenir à la définition de la limite



Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\sin\dfrac{1}{x} & \text{pour } x\neq 0\\ f(0)=0 \end{cases}$

f n'admet pas de limite en 0 mais l'on observe aucun « saut ». La fonction oscille de plus en plus en 0 entre les valeurs -1 et 1. En 0, la fonction tend vers une « oscillation infinie » qui explique la non continuité.



6.2 Continuité des fonctions usuelles

On a le tableau de continuité des fonctions de référence suivant :

Fonctions usuelles	Intervalle de continuité
$f(x) = x^n, \ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}, \ n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$
$f(x) = \|x\|$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

Théorème 4 : Continuité des fonctions usuelles (admis)

Toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple : La fonction $x \mapsto e^{\cos(x^2+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par somme et composition de fonction continues sur $\mathbb{R}$.

6.3 Continuité et suite

Théorème 5 : Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration :

On sait que la suite (u_n) est convergente vers ℓ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

De plus, la fonction f est continue en ℓ donc : $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$

Par composition, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ donc $\ell = f(\ell)$

Remarque : La condition de continuité de f en ℓ est indispensable.
Comme ℓ n'est « a priori » pas connue, on donnera en pratique l'ensemble de continuité de la fonction f.
Si l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions, on encadrera ℓ pour choisir la solution correspondante à la limite.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

On montre par récurrence que (u_n) est positive, croissante et majorée par 4, d'après le théorème des suites monotone, $u_n)$ est convergente vers une limite ℓ.

La fonction $x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est continue sur $\left[-\dfrac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$ donc sur $[0;4]$, d'après le théorème du point fixe, sa limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\sqrt{3x+4} = x \overset{\uparrow 2}{\Rightarrow} 3x+4 = x^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1 \text{ ou } x = 4$$

Comme $u_n \geqslant 0$, la seule solution acceptable est 4. La suite (u_n) converge vers 4.

6.4 Continuité et dérivabilité

Théorème 6 : Admis

- Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a.
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction f est continue sur I.

Démonstration : Montrons que la dérivabilité en a entraîne la continuité en a.

Pour $x \neq a$, posons $t(x)$ le taux d'accroissement de la fonction f en a :

$$t(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;\Rightarrow\; (x-a)t(x) = f(x) - f(a) \;\Rightarrow\; f(x) = (x-a)t(x) + f(a)$$

La fonction f est dérivable en a : $\lim\limits_{x \to a} t(x) = f'(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} x - a = 0$

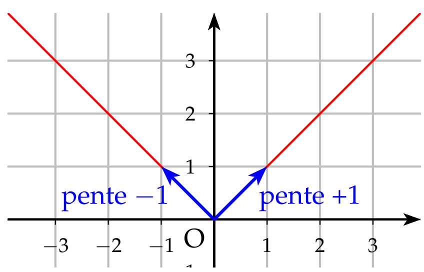
donc par produit $\lim\limits_{x \to a} (x-a)t(x) = 0$ et par somme $\lim\limits_{x \to a} (x-a)t(x) + f(a) = f(a)$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. La fonction f est continue en a.

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse. Une fonction peut être continue en un point a sans pour cela être dérivable.

C'est le cas de la fonction valeur absolue, VA, $x \mapsto |x|$ en 0.

- VA est continue en 0 :
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{cases}$$
  donc $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$
- VA n'est pas dérivable en 0 :
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \end{cases}$$
  Pas de limite du taux d'accroissement en 0.



La courbe est en « un seul morceau » et possède un point anguleux en 0.

6.5 Continuité et équation

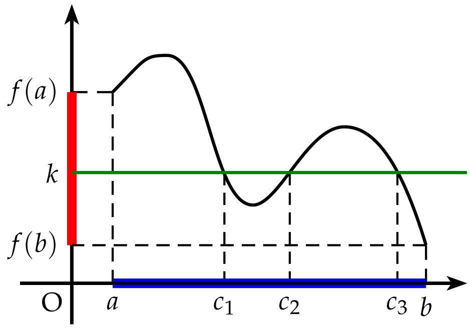
Théorème 7 : Théorème des valeurs intermédiaires - Admis

Soit une fonction **continue** sur un intervalle $\mathrm{I} = [a, b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans I.

Remarque : Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$

Ci-contre, k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'équation $f(x) = k$ admet donc des solutions.

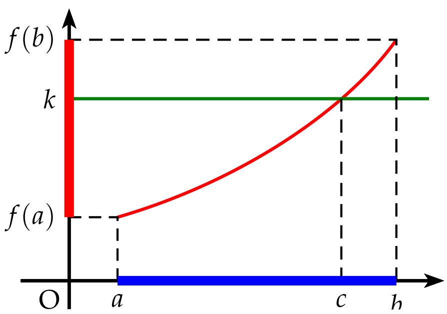
L'existence de c ne veut pas dire qu'il soit unique. Ici, il existe 3 valeurs pour c : c_1, c_2, c_3.



Théorème 8 : Théorème des valeurs intermédiaires bis

Soit une fonction f **continue et strictement monotone** sur $\mathrm{I} = [a, b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I

Démonstration : L'existence d'une solution est montrée par le théorème précédent. On montre l'unicité par l'absurde : supposons que l'équation $f(x) = k$ admette deux solutions distinctes c_1 et c_2, avec $c_1 < c_2$, la stricte monotonie de la fonction f entraîne pour f croissante $f(c_1) < f(c_2)$, ou pour f décroissante $f(c_1) > f(c_2)$, ce qui est contradictoire avec $f(c_1) = f(c_2) = k$.



Remarque :

- Ce deuxième théorème est aussi appelé théorème de la bijection. Par la suite on appellera ce théorème, le théorème des valeurs intermédiaires, noté TVI.
- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert $\mathrm{I} =]a, b[$. Le réel k doit alors être compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$
- Lorsque $k = 0$, on pourra montrer que $f(a) \times f(b) < 0$.
- Un tableau de variation pourra être suffisant pour montrer la continuité et la monotonie de la fonction.

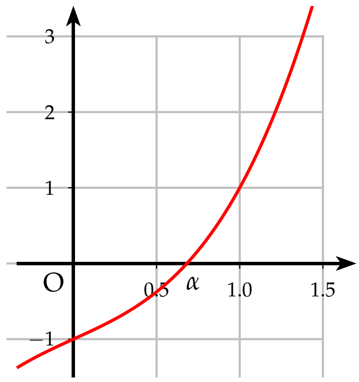
Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution sur $\mathbb{R}$. On donnera un encadrement à l'unité de cette solution. Trouver ensuite, à l'aide d'un algorithme un encadrement à 10^{-6} de cette solution.

La fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

La fonction f est la somme de deux fonctions croissantes $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x - 1$, donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

On a $f(0)$=-1 et $f(1)$=1 $\Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$

donc d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 1]$.



Algorithme : Le principe de **dichotomie** consiste à diviser l'intervalle en deux et à choisir la moitié de l'intervalle où la fonction change de signe et à réitérer ce processus jusqu'à la précision demandée.

En python Python on définit la fonction f puis on définit la fonction dicho(a,b, p) où a et b sont les bornes de l'intervalle à l'unité prés où se trouve la solution α et p la précision demandée. Cette fonction renvoie alors les bornes de l'encadrement ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la précision demandée.

Pour dicho(0 , 1, 6), on obtient alors
$a = 0{,}682\,327$, $b = 0{,}682\,328$ et $n = 20$.
Il faut donc 20 itérations pour obtenir une précision de 10^{-6}

```
def f(x):
    return x**3+x-1
def dicho(a,b,p):
    n=0
    while b-a>=10**(-p):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=c
        else:
            a=c
        n+=1
    return a,b,n
```

⚠ Cet algorithme ne fonctionne que si $k = 0$, si l'on veut généraliser cet algorithme à un réel k quelconque, on peut :

- changer la condition $f(a) * f(c) < 0$ en $(f(a) - k) \times (f(c) - k) > 0$
- au lieu de rentrer la fonction f, rentrer la fonction $f - k$.

D'autres méthodes existent pour déterminer la racine α plus rapidement comme l'algorithme Newton-Raphson ou la méthode de la sécante qui feront l'objet d'exercices.