Limites de fonctions et continuité

Définitions

Exercice 1

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x} + 1$ et la droite d d'équation $y = 1$.

1) Tracer la fonction f et la droite d pour $x \in [-3\,;\,3]$ et $y \in [-3\,;\,4]$.
   Que peut-on conjecturer pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?
2) Que représente la droite d pour la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$? Pourquoi ?
3) On donne l'algorithme en Python suivant.
   a) Que représente **abs**$(f(x) - 1)$?
   b) Que renvoie la fonction **dist**(a) ?
   c) À l'exécution, **dist**(10**(–3)) renvoie 10 et **dist**(10**(–6)) renvoie 17.
      En quoi ces valeurs permettent-elles de vérifier la limite de $f(x)$ en $+\infty$?

```python
from math import*
def f(x):
    return (x+2)*exp(-x)+1
def dist(a):
    x=1
    while abs(f(x)-1)>=a:
        x+=1
    return x
```

Exercice 2

Soit f definie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0,1x^3 + 0,15x^2 - 1,8x - 0,7$.

1) Tracer la fonction f.
   Que peut-on conjecturer sur les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$?
2) Comment peut-on le vérifier ?

Exercice 3

1) Tracer la courbe de $f(x) = \dfrac{x+1}{2(1-x)}$ pour $x \in [-2\,;\,4]$ et $y \in [-5\,;\,5]$.
2) La fonction f admet-elle une limite en 1 ?
3) Conjecturer $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Exercice 4

1) Tracer la courbe de $f(x) = \dfrac{1}{(e^x - 1)^2}$.
2) La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Interpréter géométriquement.

Exercice 5

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.
   a) Tracer la courbe sur $x \in [-4\,;\,4]$ et $y \in [-1\,;\,5]$.
   b) f est-elle définie en 0 ? Admet-elle une limite en 0 ? Si oui laquelle ?

2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

a) Tracer la courbe sur $x \in [-5\,;\,5]$ et $y \in [-5\,;\,5]$.

b) f est-elle définie en 0 ? Admet-elle une limite en 0 ? Si oui laquelle ?

Opérations sur les limites

EXERCICE 6

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 5x^3 - 3x + 1$

2) $f(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$

3) $f(x) = -2x^4 + x^2 + 3$

4) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{e^x} - 2e^x$

EXERCICE 7

Déterminer D_f des fonctions f suivantes puis les limites aux bornes de D_f.

1) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-x}$

2) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

4) $f(x) = \dfrac{3-5e^x}{1+2e^x}$

EXERCICE 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2}{(1+x)(1-x)}$

1) Tracer f sur $x \in [-4\,;\,4]$ et $y \in [-10\,;\,10]$: graduations 1 sur (Ox) et 2 sur (Oy). Conjecturer les limites en $\pm\infty$ et ± 1.

2) Démontrer ces conjectures.

Limite d'une fonction composée

EXERCICE 9

Déterminer les limites suivantes à l'aide du théorème de composition :

1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x^3+x^2+x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x^2+5}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$

6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{e^x}\right)$

7) $\displaystyle\lim_{x\to3^+} e^{\frac{-2}{x+3}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to3^-} e^{\frac{-2}{x+3}}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^{-x+4}}$

EXERCICE 10

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) À l'aide du théorème de composition déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

EXERCICE 11

f est une fonction définie sur $]-5; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f\,[f(x)]$
2) Trouver la forme algébrique de $f\,[f(x)]$ puis retrouver le résultat du 1)

EXERCICE 12

À l'aide de la fonction associée déterminer les limites suites suivantes :

1) $u_n = e^{-3n+5}$
2) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{3+n}\right)$
3) $u_n = e^{\frac{-2}{1+n}}$

Courbes et limites

EXERCICE 13

f et g sont les fonctions définies sur $]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

1) Tracer dans une même fenêtre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $x \in [-8\,;\,8]$ et $y \in [-10\,;\,10]$.
   Que peut-on dire de $\mathscr{C}_g$ par rapport à $\mathscr{C}_f$ en ∞ ? Pourquoi ?
2) a) Démontrer que pour tout $x > 2$: $g(x) - f(x) = \dfrac{4}{x+2}$
   b) En déduire la limite de $g(x) - f(x)$ en $+\infty$.
   c) Étudier la position relative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3) On considère l'algorithme suivant en Python
   a) Expliquer le rôle de la fonction d(a).
   b) Que retourne d(0,01) ?

```python
def d(a):
    x=-1
    while 4/(x+2)>a:
        x+=1
    return x
```

EXERCICE 14

Fonction catastrophe

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x = \dfrac{(x^{20}+100)^2 - 10\,000}{x^{20}}$

1) Tracer $\mathscr{C}_f$ sur $x \in [0\,;\,1,5]$ et $y \in [0\,;\,600]$ unités 0,5 sur (Ox) et 100 sur (Oy).
2) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en 0 ?
3) a) En développant $(x^{20}+100)^2$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.
   b) Déterminer alors la limite de la fonction f en 0.
   c) Comment expliquer le graphe de $\mathscr{C}_f$ de la calculatrice.

Limites par comparaison

EXERCICE 15

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x+1}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2-\cos x}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 + x\sin x$

EXERCICE 16

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$
   a) En utilisant la quantité conjuguée, montrer que : $\forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{\mathrm{E}(x)+2}{x}$
   $\mathrm{E}(x)$ est par partie entière de x.
   a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 \leqslant \mathrm{E}(x) \leqslant x$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$

EXERCICE 17

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$

1) Déterminer les limites en $\pm\infty$ et en 1.
2) Déterminer les éventuelles asymptotes

Continuité

EXERCICE 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{sinon} \end{cases}$

1) a) Tracer la fonction f sur $x, y \in [-5\,;\,5]$.
   Fonction par morceaux sur la ti 83 : math $\to$ B : parmorceau(
   b) Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2) Démonter cette conjecture en distinguant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.

EXERCICE 19

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = e^x & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = -x^2 + 2x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1) a) Tracer la fonction f sur $x, y \in [-5\,;\,5]$.
   b) Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2) Démonter cette conjecture en distinguant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.

EXERCICE 20

Soit $k \in \mathbb{Z}$ et la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-4}{x-3} & \text{si } x < k \\ f(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

1) a) Tracer les fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ et $x \mapsto \dfrac{x-4}{x-3}$ sur $x, y \in [-5\,;\,5]$.

   b) Conjecturer la valeur de $k \in \mathbb{Z}$ pour laquelle f est continue sur $[-2\,;+\infty[$

2) Démonter cette conjecture.

EXERCICE 21

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Tracer sur la fonction f pour x non nul sur $x, y \in [-5\,;\,5]$.
   Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0 ?

2) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 22

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Tracer sur la fonction f pour x non nul sur $x, y \in [-2\,;\,2]$.
   Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0 ?

2) Démontrer cette conjecture.

Continuité et suite

EXERCICE 23

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$.
   On admet que (u_n) est croissante et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}$.
   On admet que (u_n) est décroissante et convergente vers $\ell \geqslant 0$. Déterminer ℓ.

3) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$.
   On admet que (u_n) est minorée par 1 et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

EXERCICE 24

On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{u_n+1}$.

1) a) Écrire une fonction $u(n)$ en Python renvoyant la valeur de u_n puis compléter le tableau (arrondir à 10^{-3}).

n	5	10	50	100	1 000
$u(n)$					

   b) Conjecturer la convergence de la suite (u_n).

2) On peut montrer par récurrence que (u_n) est décroissante et positive.
   a) Justifier que la fonction associée f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Montrer que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite ℓ.

Exercice 25

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{R}$ par : $u_0 = e^3$ et $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.
   a) On admet que (u_n) est minorée par 6 et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.
   b) Afficher la suite sur une calculatrice puis contrôler la valeur de ℓ trouvée.
2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{R}$ par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n\, e^{-v_n}$.
   a) On admet que (v_n) est convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.
   b) Afficher la suite sur une calculatrice puis contrôler la valeur de ℓ trouvée.

Exercice 26

Soit la fonction f définie sur $\mathrm{I} = [0\,;\,1]$ par : $f(x) = 2x(1-x)$.

1) a) Justifier que f est continue sur I.
   b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.
   c) Montrer que si $x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ alors $f(x) \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.
   d) Quelles sont les variations de f sur I ?
2) On définit la suite sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -0{,}1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est croissante et majorée sur I.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ.

Continuité et dérivabilité

Exercice 27

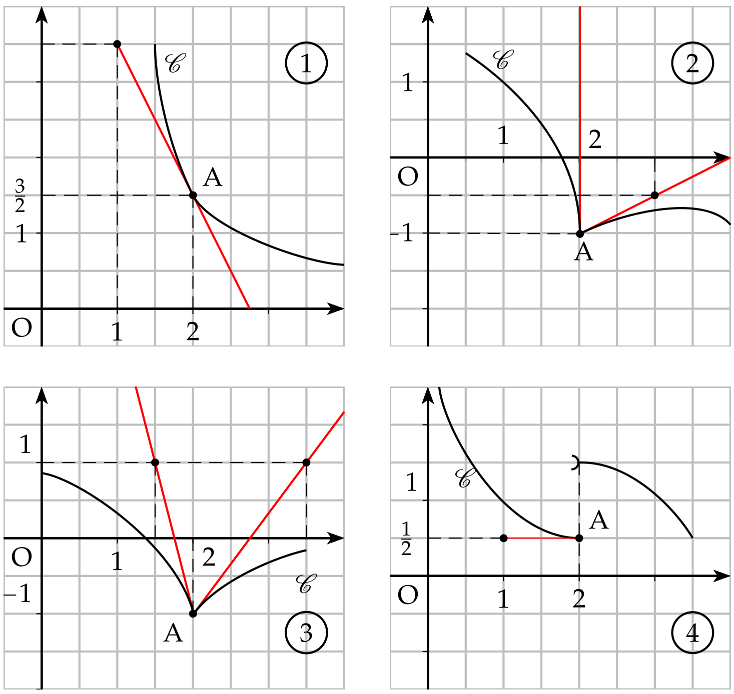
$\mathscr{C}$ est la courbe d'une fonction f. A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2.
On a tracé les éventuelles tangentes ou demi-tangentes à $\mathscr{C}$ en A.

Dans chacun des 4 cas :

- donner $f(2)$

puis dites en se justifiant si la fonction f

- est continue 2.
  Si non continue à gauche ? à droite ?
- est dérivable en 2.
  Si oui que vaut $f'(2)$.
  Si non, dérivable à gauche ? à droite ?
  Préciser les nombres dérivées à droite ou à gauche



Exercice 28

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + 3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ f(x) = \dfrac{2}{x^2+1} & \text{sinon} \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) a) Tracer la fonction f sur une calculatrice sur $x, y \in [-5\,;\,5]$.
   b) Conjecturer la dérivabilité sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Exercice 29

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1) Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) a) Tracer la fonction f sur une calculatrice sur $x \in [-4\,;\,4]$ et $y \in [-2\,;\,2]$.
   b) Pourquoi la fonction semble-t-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
   c) Déterminer l'expression de f suivant le signe de x.
   d) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   e) Calculer les nombres dérivés en 0. Conclure.

Continuité et équation

Exercice 30

Soit la fonction f definie sur $[-2\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f, on donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-2\,;+\infty[$.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2\,;+\infty[$.
   Donner un encadrement, par balayage, au dixième près de α.

Exercice 31

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.
2) Par l'algorithme de dichotomie donner un encadrement à 10^{-3} de α

Exercice 32

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f, on donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β, $(\alpha < \beta)$ et que $\alpha \in [0\,;\,1]$.
   b) Par le balayage d'une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.

EXERCICE 33

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

1) Justifier que pour $m \in]0\,;\,e^2[$ l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
2) Justifier que pour $m \in]e^2\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution.

EXERCICE 34

On cherche le nombre de solutions de l'équation : (E) : $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 = 0$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$.

1) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) a) Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = x(x+2)(4x+1)$.
   b) Calculer les limites de la fonction f en $\pm\infty$.
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3) Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation (E).

EXERCICE 35

Vrai-Faux

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$.

1) **Proposition 1 :** « $x^3 - 3x + 3 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. »
2) **Proposition 2 :** « La fonction f est dérivable sur $]\alpha\,;+\infty[$. »
3) **Proposition 3 :** « $\forall m \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = m$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. »

Fonction auxiliaire

EXERCICE 36

Soit la fonction f définie et dérivable sur I = $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{10x}{e^x + 1}$.

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$: $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.
2) a) Démontrer qu'il existe un unique reel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.
   b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3) En déduire le tableau de variations de f sur I. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

EXERCICE 37

Soit la fonction f définie et dérivable sur I = $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$.

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.
2) a) Démontrer qu'il existe un unique reel α de I tel que $g(\alpha) = 0$ et donner un encadrement de α à 10^{-2}.
   b) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeur de x.
   c) En déduire le tableau de variations de f sur I.

EXERCICE 38

Soit la fonction f définie sur I $=]-2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x^3}{x+2}$.

1) a) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
   b) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = -\dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$.
   c) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$.
2) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ puis montrer que $-1,5 < \alpha < 0$.
   b) A l'aide de l'algorithme de dichotomie donner un encadrement à 10^{-4} de α ainsi que le nombre de boucles nécessaires pour l'obtenir.

EXERCICE 39

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$.

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1) Déterminer les limites de g en $\pm\infty$.
2) Montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
3) a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que $\alpha \in [0\,;\,1]$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
4) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
2) Déterminer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)\,e^{-x}$.
3) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$ puis déduire de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.
5) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-5)]$.
   En déduire que la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Partie C
Pour tout naturel $n \geqslant 3$, on considère les points A_n, B_n et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite D et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Soit u_n le réel défini par : $u_n = \dfrac{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$.

1) Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 3$, on a $u_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$.
   a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b) Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 40

Approche d'une solution par une suite

Le but de cet exercice est de démontrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et de construire une suite qui converge vers cette solution.

Partie A
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$.
2) a) Calculer la limite de f en $+\infty$. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
   b) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.
   c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.
   d) Quel est le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$?

Partie B
Soit la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1) a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $g(x) = x$ avec $x \neq 0$.
   b) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$.
   En déduire que g est croissante sur $[0\,;\,\alpha]$.
2) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers α.
   c) À l'aide d'une fonction u(n) en Python renvoyant la valeur de u_n, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.