

# Les nombres complexes

## Aspect géométrique

### EXERCICE 1

---

- 1) D est le point de coordonnées  $(\sqrt{3}; 3)$ . Quel est son affixe ?
- 2) On donne les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + i, \quad z_B = -\sqrt{3} - i, \quad z_C = 2i$$

Calculer le module et un argument pour ces trois affixes. Que peut-on déduire pour les points A, B et C.

- 3) Placer les points A, B, C et D à la règle et au compas.
- 4) Quelle est la nature du quadrilatère AOCD. Pourquoi ?
- 5) Quel est l'affixe du point E tel que ODEB soit un parallélogramme ?

### EXERCICE 2

---

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des point  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité proposée.

1)  $|z| = 3$

2)  $\operatorname{Re}(z) = -2$

3)  $\operatorname{Im}(z) = 1$

## Opération dans $\mathbb{C}$

### EXERCICE 3

---

Donner la forme algébrique des complexes suivant :

1)  $z = 3 + 2i - 1 + 3i$

6)  $z = (1 + i)^2$

2)  $z = 6 + i - (2 + 4i)$

7)  $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$

3)  $z = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i$

8)  $z = (2 - 5i)^2$

4)  $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$

9)  $z = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$

5)  $z = (3 - i)(2 + 7i)$

10)  $z = (2 + i)^2(1 - 2i)$

### EXERCICE 4

---

Donner la forme algébrique des complexes suivants en rendant réel le dénominateur :

1)  $z = \frac{1}{1 - i}$

4)  $z = \frac{4 - 6i}{3 + 2i}$

7)  $z = \frac{3 - 6i}{3 + i} + \frac{4}{3 - i}$

2)  $z = \frac{1}{2 - i\sqrt{3}}$

5)  $z = \frac{5 + 15i}{1 + 2i}$

8)  $z = \left(\frac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$

3)  $z = \frac{1}{4 - 3i}$

6)  $z = \frac{1 + 2i}{1 - 2i}$

## Résolution d'équation du 1<sup>er</sup> degré dans $\mathbb{C}$

### EXERCICE 5

---

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1)  $(1 + i)z = 3 - i$

4)  $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

2)  $2z + 1 - i = iz + 2$

3)  $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$

5)  $(iz + 1)(z + 3i)(z - 1 + 4i) = 0$

### EXERCICE 6

---

Résoudre les systèmes suivants dans  $\mathbb{C}^2$  :

1)  $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

3)  $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$

2)  $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$

4)  $\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$

## Complexe conjugué

### EXERCICE 7

---

Donner la forme algébrique du conjugué  $\bar{z}$  des complexes suivants : z

1)  $z = 3 - 4i$

2)  $z = \frac{1}{i-1}$

3)  $z = \frac{3-i}{1+i}$

4)  $z = \frac{2i+1}{i+2} + \frac{1-2i}{2-i}$

### EXERCICE 8

---

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations d'inconnue  $z$  suivantes :

1)  $2\bar{z} = i - 1$

2)  $(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$

3)  $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$

### EXERCICE 9

---

Soit  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels ; on note  $Z$  le nombre complexe :  $Z = z - 2\bar{z} + 2$ .

1) Calculer en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ .

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z = 0$  d'inconnue  $z$ .

### EXERCICE 10

---

Soit  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.

À tout complexe  $z$ , on associe  $Z = 2\bar{z} - 2 + 6i$ .

1) Calculer en fonction de  $x$  et de  $y$ , les parties réelle et imaginaire de  $Z$ .

2) Existe-t-il des complexes  $z$  tels que  $Z = z$  ?

## EXERCICE 11

---

Dans le plan complexe,  $M$  est point d'affixe  $z = x + iy$ ,  $x$  et  $y$  réels. À tout complexe  $z$ ,  $z \neq 1$ , on associe :  $z' = \frac{5z - 2}{z - 1}$

- 1) Exprimer  $z' + \bar{z}'$  en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$ .
- 2) Démontrer que «  $z'$  est un imaginaire pur » est équivalent à «  $M$  est un point d'un cercle privé d'un point ».

## EXERCICE 12

---

Pour tout complexe  $z$  différent de  $i$ , on pose :  $z' = \frac{iz - 1}{z - i}$ . Prouver que :

$$z' \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1$$

### Vrai-Faux

## EXERCICE 13

---

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

- 1) Si  $z + \bar{z} = 0$ , alors  $z = 0$ .
- 2) Si  $z + \frac{1}{z} = 0$ , alors  $z = i$  ou  $z = -i$ .
- 3) Si  $|z| = 1$  et si  $|z + z'| = 1$ , alors  $z' = 0$ .

### Équations du second degré

## EXERCICE 14

---

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , chacune des équations suivantes.

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1) $2z^2 - 6z + 5 = 0$ | 4) $z^2 = z + 1$                                  |
| 2) $z^2 - 5z + 9 = 0$  | 5) $z^2 + 3 = 0$                                  |
| 3) $z^2 - 2z + 3 = 0$  | 6) $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$ |

## EXERCICE 15

---

$\theta$  est un réel donné

- 1) Résoudre l'équation (E) :  $z^2 - 2 \cos \theta z + 1 = 0$
- 2) Dans le plan complexe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , A et B sont les point ayant pour affixe les solutions de l'équation (E). Quelles sont les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

## EXERCICE 16

---

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système suivant : 
$$\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$$

## EXERCICE 17

---

Trouver le complexe  $p$  et  $q$  tels que l'équation :  $z^2 + pz + q = 0$  admette pour solutions les nombres :  $1 + 2i$  et  $3 - 5i$

## EXERCICE 18

---

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1)  $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

2)  $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

## Polynômes de degré supérieur

### EXERCICE 19

---

On pose pour tout complexe  $z$  :  $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

1) Vérifier que :  $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $f(z) = 0$

### EXERCICE 20

---

1) Montrer que  $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$  puis en déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de  $z^3 - 1 = 0$ .

2) On désigne par  $j$  le complexe :  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Calculer  $j^2, j^3, j^{2006}$

- Calculer  $S = 1 + j + j^2 + \dots + j^{2006}$

### EXERCICE 21

---

On considère le polynôme :  $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :  $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

2) Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $P(z) = 0$

### EXERCICE 22

---

Pour tout complexe  $z$ , on considère :  $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

1)  $b$  est réel. Exprimer en fonction de  $b$  les parties réelle et imaginaires de  $f(ib)$ .

2) En déduire que l'équation  $f(z) = 0$  admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

3) Démontrer qu'il existe deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe  $z$ ,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

4) Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $f(z) = 0$

## Forme trigonométrique d'un nombre complexe

### EXERCICE 23

---

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1)  $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$

3)  $z_3 = 4 - 4i$

5)  $z_5 = -2i$

2)  $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

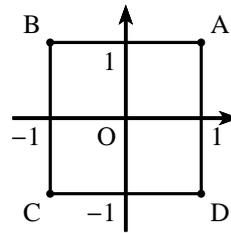
4)  $z_4 = -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$

6)  $z_6 = \frac{4}{1-i}$

## EXERCICE 24

Dans le repère orthonormal direct, on a représenté le carré ABCD ci-contre.

Donner l'affixe et un argument de chacun des sommets du carré ABCD



## EXERCICE 25

À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée en degré à  $10^{-2}$  près d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1)  $z = 4 - 3i$

2)  $z = 1 + 2i$

3)  $z = -2 + i$

## EXERCICE 26

Trouver une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

1)  $z = (1 - i)^2$

2)  $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

3)  $z = \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^{12}}$

## EXERCICE 27

On donne les nombres complexes suivants :  $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = 1 - i$

1) Donner le module et un argument de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $\frac{z_1}{z_2}$

2) Donner la forme algébrique de  $\frac{z_1}{z_2}$

3) En déduire que :  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

## Forme exponentielle

## EXERCICE 28

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1)  $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$

2)  $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$

3)  $z_3 = 2\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)$

## EXERCICE 29

Dans chacun des cas suivants, écrire  $z$  sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de  $\bar{z}$  et  $\frac{1}{z}$ .

1)  $z_1 = \frac{6}{1 + i}$

2)  $z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{3}}$

3)  $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

## Ensemble de points

### EXERCICE 30

---

Déterminer et construire les ensembles  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  des points dont l'affixe  $z$  vérifie la condition proposée.

- 1)  $z = 3e^{i\alpha}$  avec  $\alpha \in [0; 2\pi[$
- 2)  $z = r e^{i\frac{\pi}{4}}$  avec  $r \in [0; +\infty[$
- 3)  $z = k e^{-i\frac{\pi}{3}}$  avec  $k \in \mathbb{R}$

### EXERCICE 31

---

A et B ont pour affixes respectives 1 et  $3 + 2i$ .

Déterminer puis construire les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , ensemble des points M dont l'affixe  $z$  satisfait les conditions suivantes :

- 1)  $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$
- 2)  $|z - (3 + 2i)| = 1$

### EXERCICE 32

---

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On appelle  $f$  l'application, qui, à tout nombre complexe  $z$  différent de  $-2i$ , associe

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}.$$

- 1) On pose  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .

On vérifiera que  $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$  et  $\operatorname{Im}(Z) = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$ .

⚠ soyez patient et méthodique !

- 2) En déduire la nature de :
  - a) l'ensemble  $E$  des points  $M$  d'affixe  $z$ , tels que  $Z$  soit un réel ;
  - b) l'ensemble  $F$  des points  $M$  d'affixe  $z$  du plan, tels que  $Z$  soit un imaginaire pur éventuellement nul.
  - c) Représenter ces deux ensembles.

### EXERCICE 33

---

#### La Réunion juin 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère le point A d'affixe  $1 + i$ .

On associe, à tout point M du plan d'affixe  $z \neq 0$ , le point M' d'affixe  $z' = \frac{z - 1 - i}{z}$

Le point M' est appelé le point image du point M.

- 1) a) Déterminer, l'affixe du point B', image du point B d'affixe  $i$ .  
b) Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe  $z$  non nulle, l'affixe  $z'$  du point M' est telle que  $z' \neq 1$ .
- 2) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que  $|z'| = 1$ .
- 3) Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

## Triangle

### EXERCICE 34

---

On donne les points A, B et C d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$

$$a = 1 + \frac{3}{4}i \quad b = 2 - \frac{5}{4}i \quad c = 3 + \frac{7}{4}i$$

- 1) Placer les points A, B et C.
- 2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 3) Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

### EXERCICE 35

---

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $a = -2 + 2i$ ,  $b = -3 - 6i$  et  $c = 1$ .

Quelle est la nature du triangle ABC ?

### EXERCICE 36

---

Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives

$$a = 2 - 2i, \quad b = -1 + 7i, \quad c = 4 + 2i, \quad d = -4 - 2i$$

- 1)  $\Omega$  est le point d'affixe  $\omega = -1 + 2i$   
Prouver que A, B, C, D appartiennent au cercle de centre  $\Omega$  et de rayon 5.
- 2) On note  $e$  l'affixe du milieu E de [AB].

Calculez  $e$  puis prouver que  $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

La droite (EA) est une droite remarquable du triangle DEC ; préciser laquelle.

### EXERCICE 37

---

#### Polynésie septembre 2011

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . L'unité graphique est 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $z_A = 2 - 3i$ ,  $z_B = i$  et  $z_C = 6 - i$ .  
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

#### Partie A

- 1) Calculer  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ .
- 2) En déduire la nature du triangle ABC.

#### Partie B

On considère l'application  $f$  qui, à tout point M d'affixe  $z$  distincte de  $i$ , associe le point M' d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

- 1) Soit D le point d'affixe  $z_D = 1 - i$ . Déterminer l'affixe du point D' image du point D par  $f$ .
- 2) a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application  $f$  est le point d'affixe  $2i$ .  
b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
- 3) Démontrer que, pour tout point M distinct du point B,  $OM' = \frac{AM}{BM}$ .
- 4) Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \quad \text{à } 2\pi \text{ près}$$

- 5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 6) Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

## EXERCICE 38

---

### Polynésie juin 2006

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives  $a = 1$  et  $b = -1$ . On considère l'application  $f$  qui, à tout point M différent du point B, d'affixe  $z$ , fait correspondre le point M' d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = \frac{z - 1}{z + 1}$$

*On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.*

- 1) Déterminer les points invariants de  $f$  c'est-à-dire les points M tels que  $M = f(M)$ .
- 2) a) Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$ ,  
 $(z' - 1)(z + 1) = -2$ .  
b) En déduire une relation entre  $|z' - 1|$  et  $|z + 1|$ , puis entre  $\arg(z' - 1)$  et  $\arg(z + 1)$ , pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$ .  
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
- 3) Montrer que si M appartient au cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle ( $\mathcal{C}'$ ) de centre A et de rayon 1.
- 4) Soit le point P d'affixe  $p = -2 + i\sqrt{3}$ .  
a) Déterminer la forme exponentielle de  $(p + 1)$ .  
b) Montrer que le point P appartient au cercle ( $\mathcal{C}$ ).  
c) Soit Q le point d'affixe  $q = -\bar{p}$  où  $\bar{p}$  est le conjugué de  $p$ .  
Montrer que les points A, P' et Q sont alignés dans cet ordre.  
d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application  $f$ .

## Vrai-Faux et QCM

### EXERCICE 39

---

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1) Soient A le point d'affixe  $2 - 5i$  et B le point d'affixe  $7 - 3i$ .

**Proposition 1 :** Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2) Soit  $(\Delta)$  l'ensemble des points M d'affixe  $z$  telle que  $|z - i| = |z + 2i|$ .

**Proposition 2 :**  $(\Delta)$  est une droite parallèle à l'axe des réels.

3) Soit  $z = 3 + i\sqrt{3}$ .

**Proposition 3 :** Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $z^{3n}$  est imaginaire pur.

4) Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

**Proposition 4 :** Si  $\frac{\pi}{2}$  est un argument de  $z$  alors  $|i + z| = 1 + |z|$ .

5) Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

**Proposition 5 :** Si le module de  $z$  est égal à 1 alors  $z^2 + \frac{1}{z^2}$  est un nombre réel.

### EXERCICE 40

---

N<sup>lle</sup> Calédonie nov 2013

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) **Proposition 1 :** Pour tout entier naturel  $n$  :  $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$ .

2) Soit (E) l'équation  $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$  où  $z$  désigne un nombre complexe.

**Proposition 2 :** Les points dont les affixes sont les solutions, dans  $\mathbb{C}$ , de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) **Proposition 3 :** Pour tout nombre réel  $\alpha$ ,  $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha} \cos(\alpha)$ .

4) Soit A le point d'affixe  $z_A = \frac{1}{2}(1 + i)$  et  $M_n$  le point d'affixe  $(z_A)^n$  où  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**Proposition 4 :** si  $n - 1$  est divisible par 4, alors les points O, A et  $M_n$  sont alignés.

5) Soit  $j$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Proposition 5 :**  $1 + j + j^2 = 0$ .

## Complexe et suite

### EXERCICE 41

---

#### Amérique du Sud nov 2013

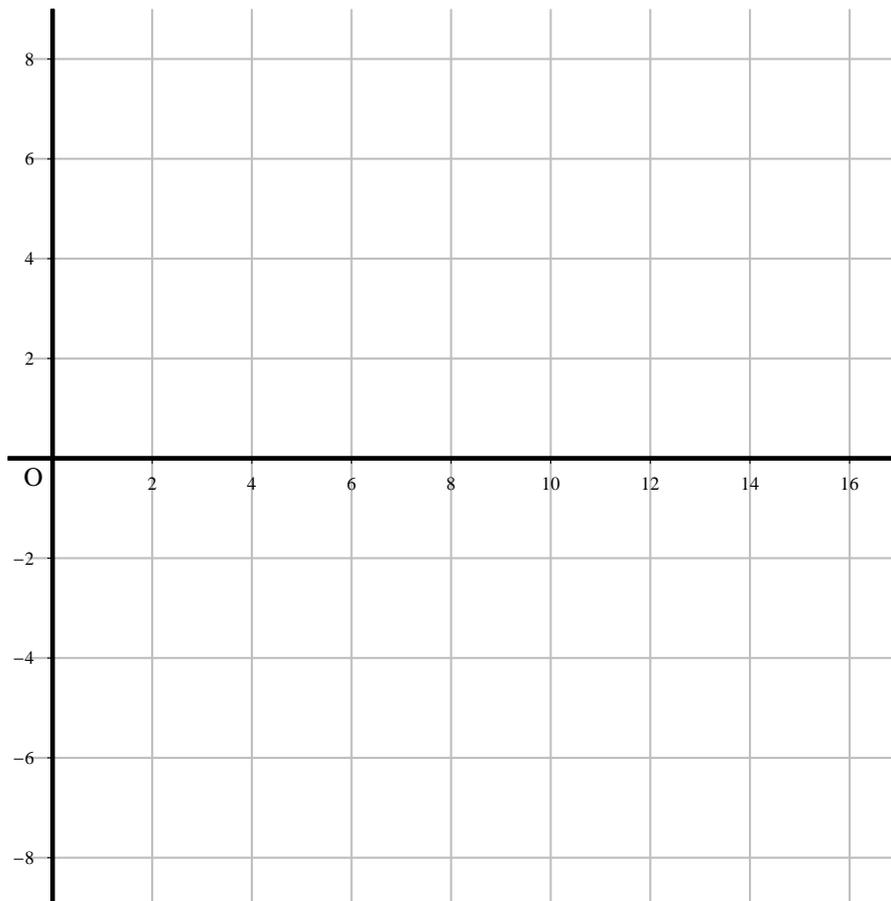
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation (E) :  $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

- 1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.
- 2) On considère la suite  $(M_n)$  des points d'affixes  $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$ , définie pour  $n \geq 1$ .
  - a) Vérifier que  $z_1$  est une solution de (E).
  - b) Écrire  $z_2$  et  $z_3$  sous forme algébrique.
  - c) Placer les points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sur la figure donnée ci-dessous et tracer, les segments  $[M_1, M_2]$ ,  $[M_2, M_3]$  et  $[M_3, M_4]$ .
- 3) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $z_n = 2^n \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$ .
- 4) Calculer les longueurs  $M_1M_2$  et  $M_2M_3$ .

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $M_nM_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$ .

- 5) On note  $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$ .
  - a) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$ .
  - b) Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $\ell_n \geq 1\,000$ .



## EXERCICE 42

Pondichéry avril 2014

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left( \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n$$

On définit la suite  $(r_n)$  par  $r_n = |z_n|$  pour tout entier naturel  $n$ .

1) Donner la forme exponentielle du nombre complexe  $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ .

2) a) Montrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique de raison  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

b) En déduire l'expression de  $r_n$  en fonction de  $n$ .

c) Que dire de la longueur  $OA_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

3) On considère l'algorithme suivant :

a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour  $P = 0,5$  ?

b) Pour  $P = 0,01$  on obtient  $n = 33$ . Quel est le rôle de cet algorithme ?

4) a) Démontrer que le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$ .

b) On admet que  $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$ .

Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $A_n$  est un point de l'axe des ordonnées.

c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points  $A_6, A_7, A_8$  et  $A_9$ . Les traits de construction seront apparents.

**Variables** :  $n$  entier naturel

$R$  réel et  $P$  réel positif

**Entrées et initialisation**

Lire  $P$

$1 \rightarrow R$

$0 \rightarrow n$

**Traitement**

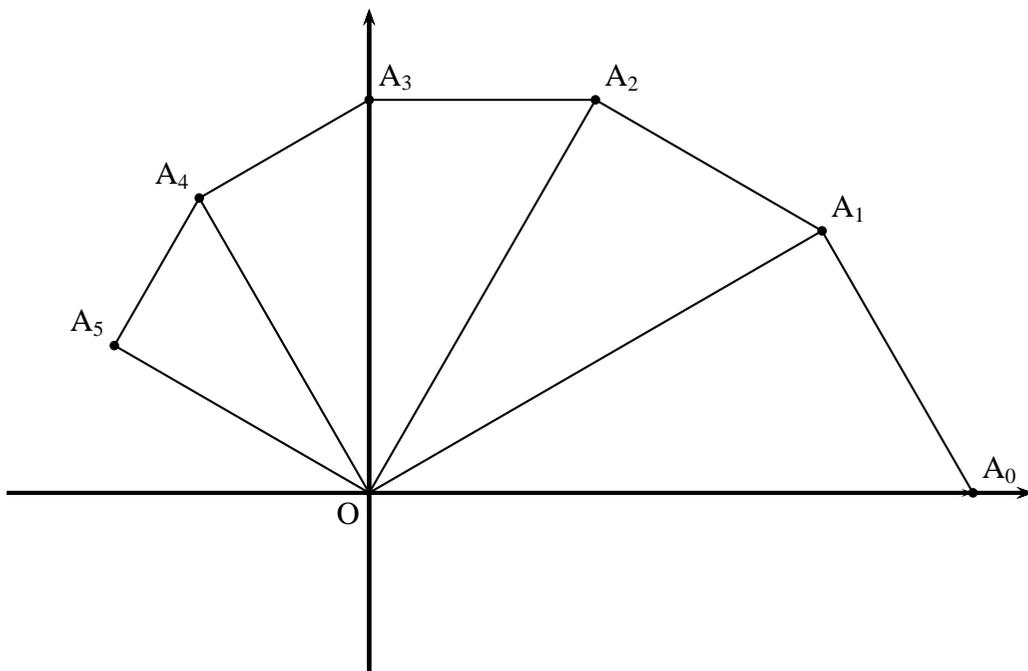
**tant que**  $R > P$  **faire**

$n + 1 \rightarrow n$

$\frac{\sqrt{3}}{2}R \rightarrow R$

**fin**

**Sorties** : Afficher  $n$



## EXERCICE 43

Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par  $z_0 = \sqrt{3} - i$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

### Partie A

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

- 1) Calculer  $u_0$ .
- 2) Démontrer que  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme 2.
- 3) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
- 5) Étant donné un réel positif  $p$ , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  telle que  $u_n > p$ .

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier  $n$ .

**Variables :**  $u, p$  réels  
 $n$  entier

#### Entrées et initialisation

$0 \rightarrow n$

$2 \rightarrow u$

Lire  $p$

#### Traitement

**Sorties :**

### Partie B

- 1) Déterminer la forme algébrique de  $z_1$ .
- 2) Déterminer la forme exponentielle de  $z_0$  et de  $1 + i$ .  
En déduire la forme exponentielle de  $z_1$ .
- 3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

## EXERCICE 44

Centres étrangers juin 2014

On définit, pour tout entier naturel  $n$ , les nombres complexes  $z$  par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note  $r_n$  le module du nombre complexe  $z_n$  :  $r_n = |z_n|$ .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine  $O$ , on considère les points  $A_n$  d'affixes  $z_n$ .

- 1) a) Calculer  $z_1, z_2$  et  $z_3$ .  
b) Placer les points  $A_1$  et  $A_2$  sur le graphique ci-après.  
c) Écrire le nombre complexe  $\frac{1+i}{2}$  sous forme trigonométrique.

d) Démontrer que le triangle  $OA_0A_1$  est isocèle rectangle en  $A_1$ .

2) Démontrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique, de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

La suite  $(r_n)$  est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note  $L_n$  la longueur de la ligne brisée qui relie le point  $A_0$  au point  $A_n$  en passant successivement par les points  $A_1, A_2, A_3$ , etc.

$$\text{Ainsi } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

3) a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$ .

b) Donner une expression de  $L_n$  en fonction de  $n$ .

c) Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(L_n)$ .

