Vecteurs, droites et plans dans l'espace

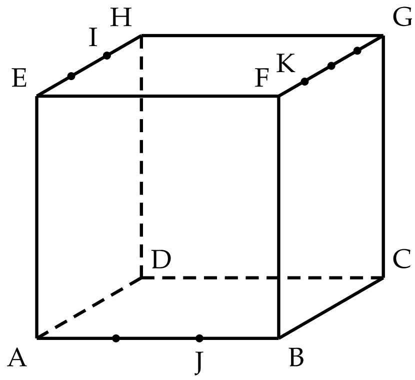
Droites et plans

EXERCICE 1

Soit un cube ABCDEFGH et un plan (IJK) tel que :

$\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$

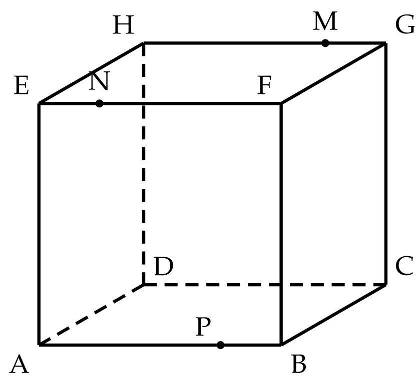
Déterminer l'intersection du plan (IJK) avec le cube ABCDEFGH.



EXERCICE 2

ABCDEFGH est un cube d'arête 8 cm. M, N et P sont les points respectivement des arêtes [GH], [EF] et [AB] tels que : EN = MG = PB = 2 cm

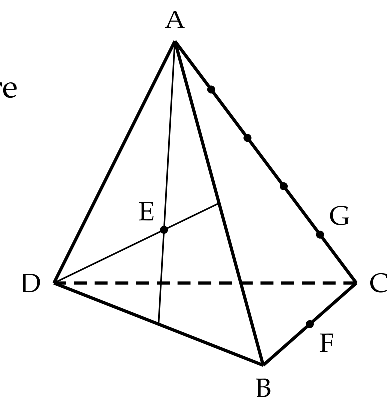
1) Construire les points Q et R, intersections du plan (MNP) avec les arêtes [BC] et [CG]
2) Vérifier que la section du cube par le plan (MNP) est un pentagone



EXERCICE 3

Déterminer la section du tétraèdre ABCD par le plan (EFG) tel que :

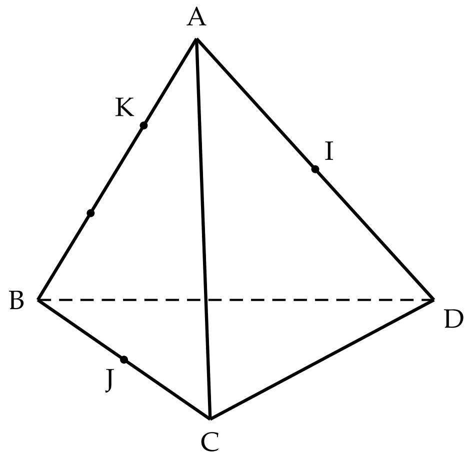
E centre de gravité du triangle ABD et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$



EXERCICE 4

ABCD est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs de [AD] et [BC]. K est le point de l'arête [AB] tel que $3AK = AB$.

1) a) Construire le point M intersection de la droite (IK) et du plan (BCD).
   b) Démontrer que D est le milieu de [BM]. On appellera E le milieu de [BK] et on tracera [ED]
2) a) En déduire la construction du point L intersection de [CD] et du plan (IJK).
   b) Déterminer la valeur de k pour laquelle $CL = k\,CD$



Vecteurs colinéaires et coplanaires

EXERCICE 5

A, B, C sont trois points non alignés de l'espace. I est le milieu de [BC]. Le point G est tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

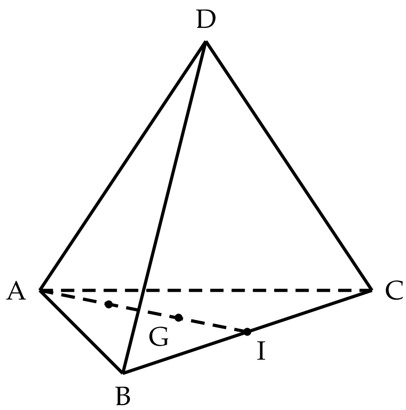
1) Démontrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
2) En déduire que les points G, A et I sont alignés et que G est le centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 6

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [BC]. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC, donc d'après l'exercice précédent : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
On considère le point K tel que :

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$$

1) a) Démontrer que : $3\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$
   b) En déduire que les points K, G et D sont alignés.
2) Trouver le réel k tel que : $\overrightarrow{DK} = k\overrightarrow{DG}$ puis placer K sur la figure.

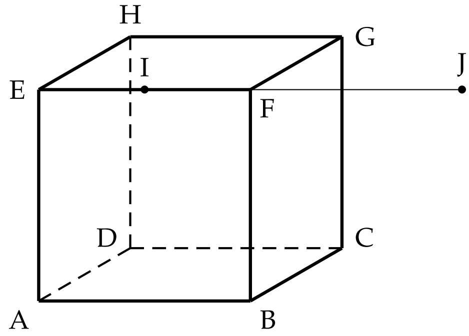


Vecteurs repérés

EXERCICE 7

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.
On considère le repère $(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\,)$

1) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
2) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.



EXERCICE 8

1) On donne les points $A(1\,;-1\,;\,2)$, $B(0\,;\,5\,;\,3)$, $C(4\,;-19\,;-1)$.
   Les points A, B et C sont-il alignés ?
2) On donne les points $A(3\,;\,2\,;\,2)$, $B(-1\,;-4\,;\,4)$, $C(1\,;\,0\,;\,1)$ et $D(\,3\,;\,3\,;\,1)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elle parallèles ?
3) La droite d est dirigée par $\vec{u}(2\,;-1\,;\,3)$ et la droite d' est dirigée par $\vec{v}(-4\,;\,2\,;-6)$.
   Pourquoi d et d' sont-elles parallèles ?

EXERCICE 9

On donne les points $A(3\,;\,0\,;\,4)$, $B(2\,;\,3\,;\,1)$, $C(-1\,;\,2\,;\,3)$ et $D(0\,;-1\,;\,6)$.

1) Justifier que A, B, C et D sont coplanaires.
2) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 10

On donne les points suivants dans un repère orthonormé :

$$A(0\,;\,1\,;\,3),\quad B(\sqrt{2}\,;\,0\,;\,2)\quad \text{et}\quad C(\sqrt{2}\,;\,2\,;\,2)$$

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Représentation paramétrique d'une droite

EXERCICE 11

La droite Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = -2+2t \\ z = -1-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1) a) Déterminer le point I de Δ de paramètre 0.
   b) Déterminer un vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ.
   c) Justifier qu'il existe un point de Δ d'abscisse 5.
2) La droite Δ passe-t-elle par le point $A\left(-10\,;\,\dfrac{16}{3}\,;-\dfrac{14}{3}\right)$

EXERCICE 12

On considère deux points A$(1\,;\,1\,;\,0)$ et B$(1\,,\,2\,,\,1)$ de l'espace.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

EXERCICE 13

On donne les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -4 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -4 + 3t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + 3s \quad s \in \mathbb{R} \\ z = -2s \end{cases}$$

1) Déterminer pour les droites d et d' un point et un vecteur directeur.
2) Montrer que les droites d et d' sont sécantes puis déterminer leur point d'intersection.

EXERCICE 14

On donne les droites d et d' de représentations paramètriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 6 - 3s \\ y = -7 + 2s \quad s \in \mathbb{R} \\ z = -1 + s \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -3 \qquad\quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5 + 2t \end{cases}$$

Démontrer que d et d' sont sécantes et puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

EXERCICE 15

On note d_1 la droite passant par les points A$(1;-2;-1)$ et B$(3;-5;-2)$.

1) Montrer qu'une représentation paramétrique de d_1 est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}$
2) d_2 est la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - s \\ y = -1 + 2s \quad , \quad s \in \mathbb{R} \\ z = -s \end{cases}$

   Démontrer que d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.