# Chapitre 13. Droites, plans et vecteurs de l'espace

Commençons par quelques rappels ou résultats de base :

1) Par deux points distincts de l'espace, il passe une droite et une seule. Une droite définie par deux points s'écrit avec des parenthèses : $(AB)$.

2) Par trois points non alignés, il passe un plan et un seul. Un plan défini par trois points non alignés s'écrit avec des parenthèses : $(ABC)$ (pour le différencier du triangle $ABC$).
Si $\mathscr{D}$ est une droite de l'espace et $A$ est un point de l'espace n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, il existe un plan et un seul contenant la droite $\mathscr{D}$ et le point $A$.
Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites sécantes de l'espace, il existe un plan et un seul contenant les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

3) Si un plan contient deux points distincts $A$ et $B$, alors la droite $(AB)$ toute entière est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

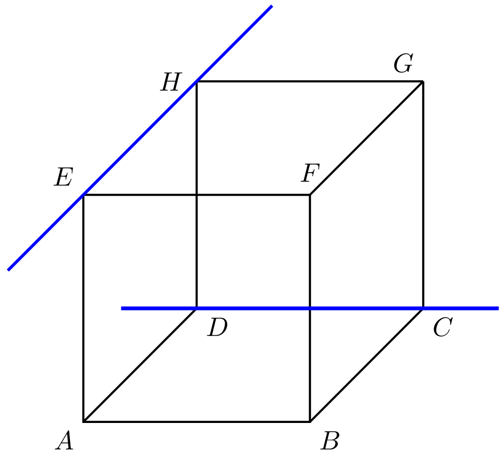
4) Tout résultat de géométrie plane s'applique à l'intérieur d'un plan de l'espace.

## I. *Position relative de droites et de plans dans l'espace*

### 1) Position relative de deux droites de l'espace

La différence fondamentale entre la géométrie du plan et la géométrie de l'espace est que deux droites de l'espace $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ peuvent être **non coplanaires** c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plan contenant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Par exemple, dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, les doites $(CD)$ et $(EH)$ ne sont pas coplanaires. En effet, supposons par l'absurde que les droites $(CD)$ et $(EH)$ soient coplanaires, il existe alors un plan $\mathscr{P}$ contenant ces deux droites. $\mathscr{P}$ contient en particulier les points $C$, $D$ et $H$ qui ne sont pas alignés et donc est nécessairement le plan $(CDH)$ ou encore le plan de la face $CDHG$. Mais le le point $E$ n'est pas dans ce plan et donc la droite $(EH)$ n'est pas contenue dans le plan $\mathscr{P}$. Ainsi, il était absurde de supposer les droites $(CD)$ et $(EH)$ coplanaires.



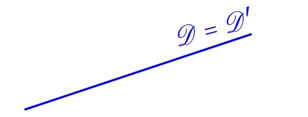
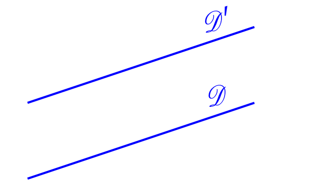
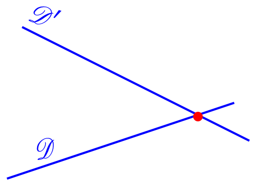
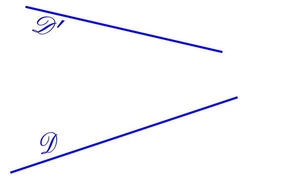

**Définition 1.** Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont **coplanaires** si et seulement si il existe un plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Dans le cas contraire, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont dites **non coplanaires**.

On peut noter que deux droites non coplanaires n'ont aucun point commun.

Quand deux droites sont coplanaires, d'après le cours de géométrie plane, on sait qu'il existe trois types de positions relatives de ces deux droites : sécantes, strictement parallèles ou confondues. On adopte alors la définition suivante :

**Définition 2.** Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles si et seulement si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires et sont strictement parallèles dans un plan les contenant.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles ou confondues.

On peut alors résumer les différentes positions relatives de deux droites de l'espace dans le tableau suivant :

| **Droites parallèles** | | **Droites non parallèles** | |
|---|---|---|---|
| **confondues** | **strictement parallèles** | **sécantes** | **non coplanaires** |
|  |  |  |  |
| **coplanaires** | | | **non coplanaires** |

Dans l'espace, il ne suffit pas que deux droites n'aient aucun point commun pour qu'elles soient strictement parallèles. Deux droites n'ayant aucun point commun peuvent être strictement parallèles ou non coplanaires.

Enonçons maintenant :

**Théorème 1.** Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et $A$ un point de l'espace.
Il existe une droite et une seule passant par $A$ et parallèle à $\mathscr{D}$.

**Commentaire.** Le résultat ci-dessus est en fait un **axiome** (le cinquième postulat d'Euclide ou plutôt une conséquence de ce cinquième postulat) et n'est pas un théorème. Un axiome, à la différence d'un théorème, ne se démontre pas. Il est considéré comme une évidence par les mathématiciens.

Enonçons ensuite :

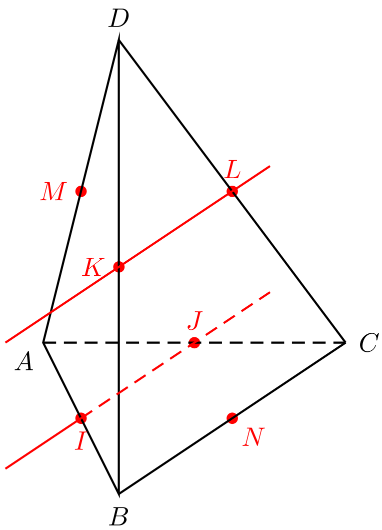
**Théorème 2.** Soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ trois droites de l'espace.
Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles et si $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont parallèles, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$ sont parallèles.

**Exercice 1.** Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati.
Soient $I$, $J$, $K$, $L$, $M$ et $N$ les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$, $[BD]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[BC]$.
**1)** Etudier les positions relatives des droites $(IJ)$ et $(KL)$.
**2)** Etudier les positions relatives des droites $(IL)$ et $(MN)$.
**3)** Etudier les positions relatives des droites $(AB)$ et $(MN)$.

**Solution.** **1)** Dans le triangle $ABC$ la droite des milieux $(IJ)$ est parallèle à la droite $(BC)$. De même, dans le triangle $BCD$, la droite des milieux $(KL)$ est parallèle à la droite $(BC)$.

Les droites $(IJ)$ et $(KL)$ sont toutes deux parallèles à la droite $(BC)$ et donc les droites $(IJ)$ et $(KL)$ sont parallèles.

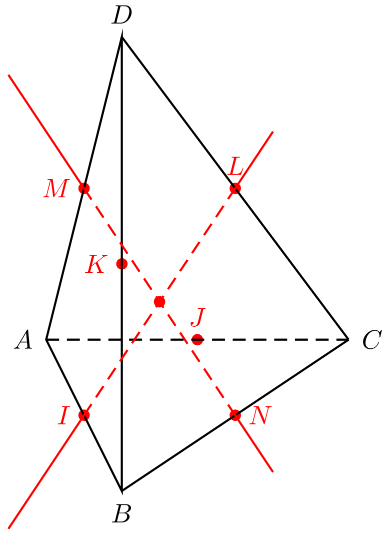
La droite $(BD)$ est sécante au plan $(ABC)$ en $B$ et le point $K$ n'est pas le point $B$. Donc, le point $K$ n'appartient pas au plan $(ABC)$ et en particulier, le point $K$ n'appartient pas à la droite $(IJ)$. Donc les droites $(IJ)$ et $(KL)$ ne sont pas confondues et finalement, les droites $(IJ)$ et $(KL)$ sont strictement parallèles.




**2)** Dans le triangle $ABC$, la droite des milieux, $(IN)$ est parallèle à la droite $(AC)$. Dans le triangle $ACD$, la droite des milieux $(ML)$ est parallèle à la droite $(AC)$. Par suite, les droites $(IN)$ et $(ML)$ sont parallèles.

Dans le triangle $ABD$, la droite des milieux, $(IM)$ est parallèle à la droite $(BD)$. Dans le triangle $BCD$, la droite des milieux $(LN)$ est parallèle à la droite $(BD)$. Par suite, les droites $(IM)$ et $(LN)$ sont parallèles.

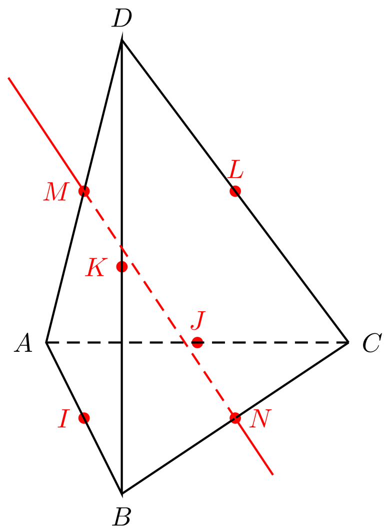
On en déduit que le quadrilatère $IMLN$ est un parallélogramme. Mais alors, les diagonales de ce parallélogramme se coupent en leur milieux respectifs et donc les droites $(IL)$ et $(MN)$ sont sécantes (en le milieu commun des segments $[IL]$ et $[MN]$).




**3)** Les points $A$, $B$ et $M$ sont trois points non alignés et définissent donc un unique plan, le plan $(ABM)$ qui est aussi le plan $(ABD)$.

Si les droites $(AB)$ et $(MN)$ sont coplanaires, alors les points $A$, $B$, $M$ et $N$ sont coplanaires et donc le point $N$ appartient au plan $(ABD)$ ce qui n'est pas.

Donc les droites $(AB)$ et $(MN)$ ne sont pas coplanaires. En particulier, ces deux droites n'ont aucun point commun.




## 2) Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

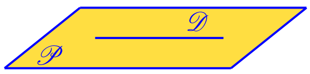
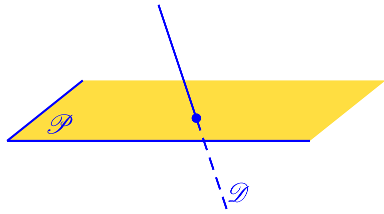
On adopte la définition suivante :

> **Définition 3.** Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
> La droite $\mathscr{D}$ est **strictement parallèle** au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ n'ont aucun point commun.
> La droite $\mathscr{D}$ est **parallèle** au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si, ou bien la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$, ou bien la droite $\mathscr{D}$ est entièrement contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

Ainsi, si la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ n'ont aucun point commun, la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$ et en particulier est parallèle à $\mathscr{P}$ et si la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins deux points distincts en commun, alors la droite $\mathscr{D}$ est entièrement contenue dans $\mathscr{P}$ et en particulier est parallèle à $\mathscr{P}$.

Il ne reste donc qu'une seule situation à examiner. Quand la droite $\mathscr{D}$ et la plan $\mathscr{P}$ ont exactement un point en commun, la droite $\mathscr{D}$ et la plan $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles. On dit que la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont **sécants** en un point.

On résumé les différentes situations dans le tableau suivant :

| Plans et droites parallèles | | Plans et droites non parallèles |
|---|---|---|
| droite incluse | strictement parallèles | sécants en un point |
|   |   |   |

**Théorème 3.** Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe une droite $\mathscr{D}'$ contenue dans $\mathscr{P}$ et parallèle à $\mathscr{D}$.

**Démonstration.** Supposons qu'il existe une droite $\mathscr{D}'$ contenue dans $\mathscr{P}$ et parallèle à $\mathscr{D}$ et montrons que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

Si $\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.
Sinon, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont au moins un point en commun. Notons le $A$.
Soit $\mathscr{D}''$ la droite du plan $\mathscr{P}$ passant par $A$ et parallèle à $\mathscr{D}'$.
La droite $\mathscr{D}$ est aussi une droite passant par $A$ et parallèle à $\mathscr{D}'$. On sait qu'une telle droite est unique et donc $\mathscr{D} = \mathscr{D}''$. Mais alors $\mathscr{D}$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ et en particulier est parallèle à $\mathscr{P}$.

On a montré que s'il existe une droite $\mathscr{D}'$ contenue dans $\mathscr{P}$ et parallèle à $\mathscr{D}$, alors $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

On admet la réciproque à savoir : si $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$, alors il existe une droite $\mathscr{D}'$ contenue dans $\mathscr{P}$ et parallèle à $\mathscr{D}$.

---

On a immédiatement :

**Théorème 4.** Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
Si $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ et si $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}'$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

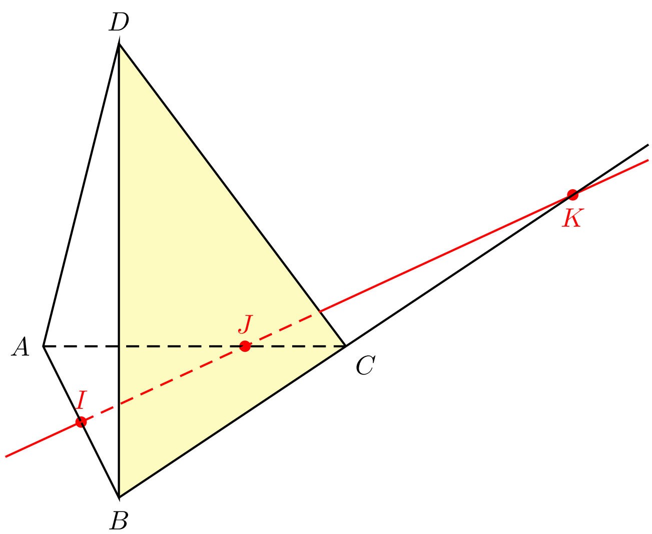
**Exercice 2.** Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati.
Soient $I$ le milieu de $[AB]$ et $J$ le point du segment $[AC]$ tel que $AJ = \frac{2}{3}AC$.
Démontrer que la droite $(IJ)$ est sécante au plan $(BCD)$ et construire le point d'intersection.

**Solution.** Les droites $(IJ)$ et $(BC)$ sont contenues dans le plan $(ABC)$ et donc ces droites sont coplanaires.
D'après la réciproque du théorème de Thales, les droites $(IJ)$ et $(BC)$ ne sont pas parallèles ($\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ et $\frac{AJ}{AC} = \frac{2}{3}$ et donc $\frac{AI}{AB} \neq \frac{AJ}{AC}$) et donc les droites $(IJ)$ et $(BC)$ sont sécantes en un point que l'on note $K$.

Le point $K$ est un point commun à la droite $(IJ)$ et au plan $(BCD)$. Donc, ou bien la droite $(IJ)$ est contenue dans le plan $(BCD)$, ou bien la droite $(IJ)$ est sécante au plan $(BCD)$ en $K$.

Le point $A$ n'est pas dans le plan $(BCD)$ et le point $B$ est commun à la droite $(AB)$ et au plan $(BCD)$. Donc, la droite $(AB)$ est sécante au plan $(BCD)$ en $B$. Le point $I$ n'est pas le point $B$ et donc le point $I$ n'est pas dans le plan $(BCD)$. On en déduit que la droite $(IJ)$ n'est pas contenue dans le plan $(BCD)$.

Finalement, la droite $(IJ)$ est sécante au plan $(BCD)$ en $K$.



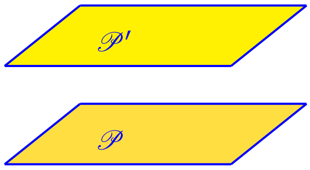
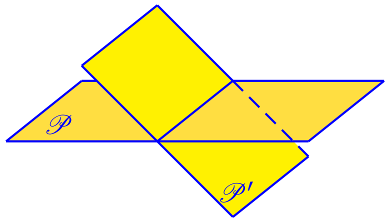

 

## 3) Position relative de deux plans de l'espace

On adopte la définition suivante :

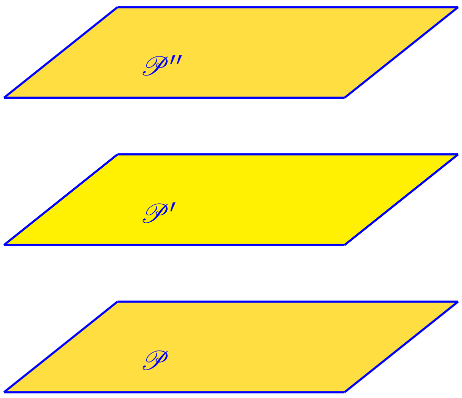
**Définition 4.** Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace.
Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont **strictement parallèles** si et seulement si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ n'ont aucun point commun.
Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont **parallèles** si et seulement si, ou bien les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles, ou bien les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.

Dans le cas où $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles, l'intersection de ces deux plans est une droite. On dit dans ce cas que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont **sécants** en une droite. On a donc trois positions relatives possibles pour deux plans de l'espace :

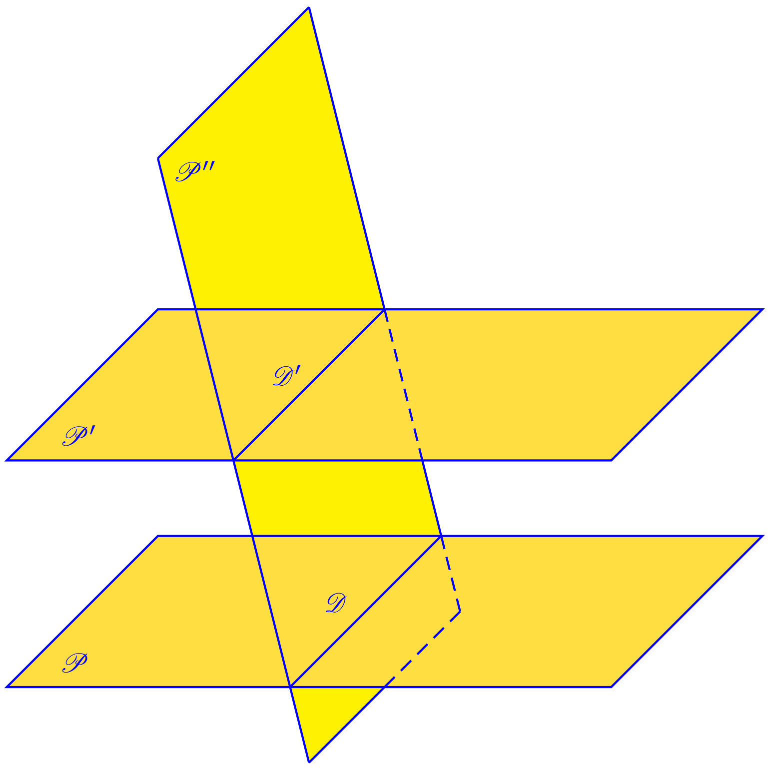
| **Plans parallèles** | | **Plans non parallèles** |
|---|---|---|
| **confondus** | **strictement parallèles** | **sécants en une droite** |
|   |   |   |

Concernant le parallélisme de plans, on a les résultats suivants :

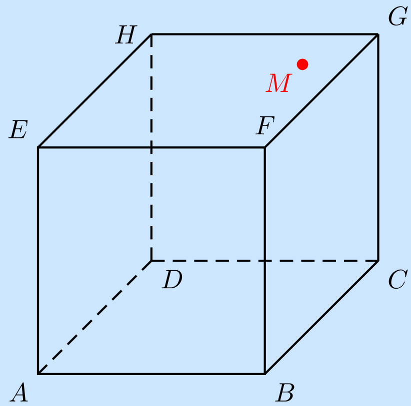
**Théorème 5.** Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ trois plans de l'espace.
Si les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et si les plans $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ sont parallèles, alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}''$ sont parallèles.




**Théorème 6.** Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ deux plans parallèles de l'espace.
Si $\mathscr{P}''$ est un plan de l'espace sécant au plan $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{P}''$ est sécant au plan $\mathscr{P}'$ et les droites d'intersection sont parallèles.




**Exercice 3.** On considère un cube $ABCDEFGH$.
Sur la face $EFGH$ de ce cube, on a placé un point $M$ au hasard.



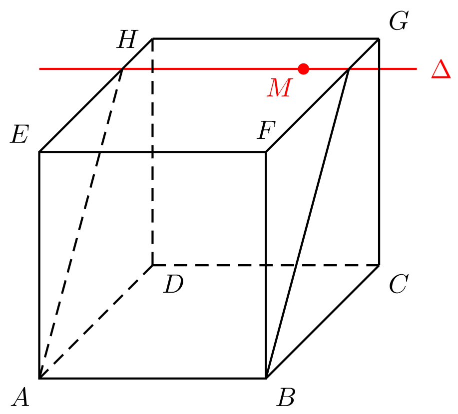

Dessiner la section du plan $(EFG)$ par le plan $(ABM)$.

**Solution.** Le point $A$ n'appartient pas au plan $(EFG)$. Donc les plans $(ABM)$ et $(EFG)$ ne sont pas confondus. Le point $M$ appartient aux plans $(ABM)$ et $(EFG)$. Donc les plans $(ABM)$ et $(EFG)$ ne sont pas strictement parallèles.
Finalement, les plans $(ABM)$ et $(EFG)$ ne sont pas parallèles et donc le plan $(ABM)$ coupe le plan $(EFG)$ selon une droite $\Delta$.

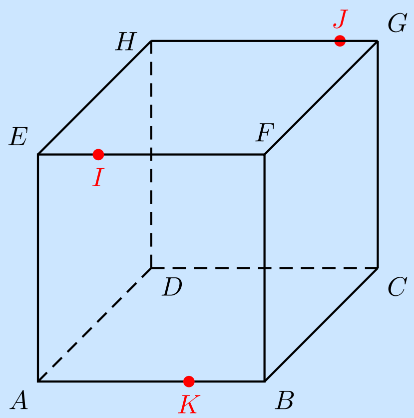
Les plans $(ABC)$ et $(EFG)$ sont parallèles et le plan $(ABM)$ est sécant au plan $(EFG)$. Donc, le plan $(ABM)$ coupe le plan $(ABC)$ selon une droite. Les points $A$ et $B$ sont communs aux plans $(ABM)$ et $(ABC)$ et donc les plans $(ABM)$ et $(ABC)$ sont sécants selon la droite $(AB)$.

Donc, le plan $(ABM)$ coupe les plans $(ABC)$ et $(EFG)$ selon deux droites parallèles. Donc, les droites $(AB)$ et $\Delta$ sont parallèles.

Finalement, $\Delta$ est la parallèle à $(AB)$ passant par $M$.



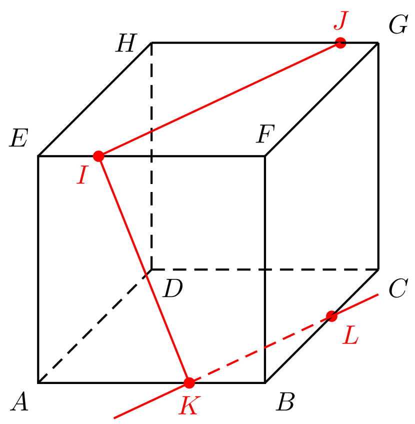

**Exercice 4.** On considère un cube $ABCDEFGH$. Sur les arêtes de ce cube, on a placé trois points $I$, $J$ et $K$.



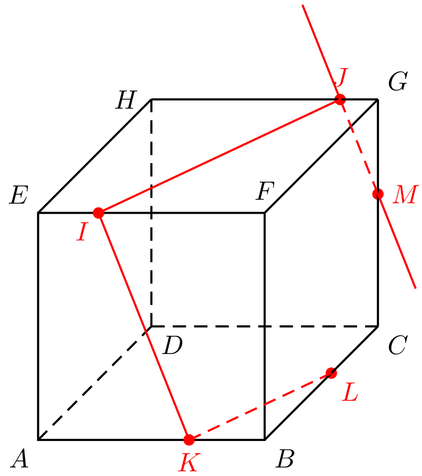

Dessiner la section du cube par le plan $(IJK)$ puis dessiner le solide obtenu en retirant le morceau contenant le point $F$ ainsi découpé.

**Solution.** • Le plan $(IJK)$ coupe le plan $(ABE)$ en la droite $(IK)$ et le plan $(IJK)$ coupe le plan $(EFG)$ en la droite $(IJ)$.

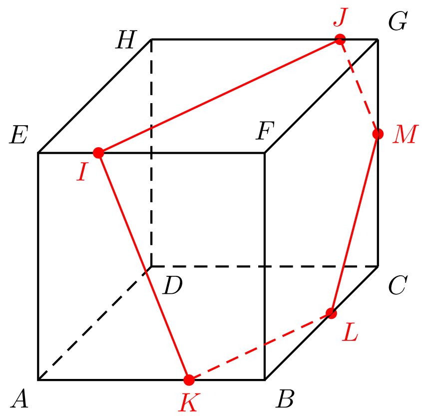
• Les plans $(ABC)$ et $(EFG)$ sont parallèles. Le plan $(IJK)$ coupe le plan $(EFG)$ en la droite $(IJ)$. Donc, le plan $(IJK)$ coupe le plan $(ABC)$ en la parallèle à $(IJ)$ passant par $K$. On note $L$ le point d'intersection de cette droite et de la droite $(BC)$.



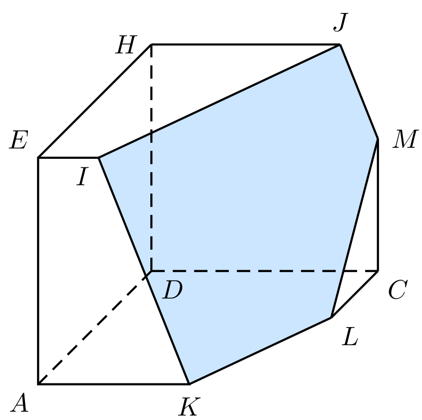

• De même, le plan $(IJK)$ coupe le plan $(CDG)$ en la la parallèle à $(IK)$ passant par $J$. On note $M$ le point d'intersection de cette droite et de la droite $(CG)$.




• On peut alors achever le tracé de la section




• et on obtient le solide :




---

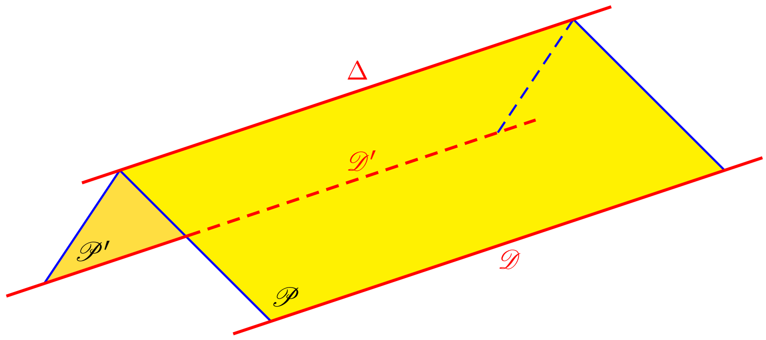
**Théorème 7** (théorème « du toit »). Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ deux plans sécants en une droite $\Delta$.
Si $\mathscr{D}$ est une droite contenue dans $\mathscr{P}$, si $\mathscr{D}'$ est une droite contenue dans $\mathscr{P}'$ et si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles à $\Delta$.

**Démonstration.** $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont ou bien strictement parallèles, ou bien confondues.

**1er cas.** Supposons $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ confondues. Tout point de $\mathscr{D}$ est donc un point de $\mathscr{P}$ (car $\mathscr{D}$ est contenue dans $\mathscr{P}$) et aussi un point de $\mathscr{P}'$ (car $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ et car $\mathscr{D}'$ est contenue dans $\mathscr{P}'$).
Par suite, la droite $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ c'est-à-dire la droite $\Delta$.
En particulier, $\mathscr{D}$ est parallèle à $\Delta$.

**2ème cas.** Supposons $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ strictement parallèles. Alors, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'ont aucun point en commun. Supposons par l'absurde que les droites $\mathscr{D}$ et $\Delta$ soient sécantes en un point $A$. Le point $A$ est un point de $\Delta$ et donc un point de $\mathscr{P}'$. D'autre part, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'ont aucun point en commun, le point $A$ n'est pas un point de $\mathscr{D}'$.

Mais alors, le plan $\mathscr{P}'$ est l'unique plan contenant la droite $\mathscr{D}'$ et le point $A$. La parallèle à la droite $\mathscr{D}'$ passant par $A$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}'$. Mais cette parallèle est la droite $\mathscr{D}$. Donc la droite $\mathscr{D}$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}'$.
Comme la droite $\mathscr{D}$ est aussi contenue dans le plan $\mathscr{P}$, la droite $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ c'est-à-dire la droite $\Delta$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur $\mathscr{D}$ (à savoir la droite $\mathscr{D}$ et la droite $\Delta$ sont sécantes) et donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle à la droite $\Delta$. Enfin, la droite $\mathscr{D}'$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$ et la droite $\mathscr{D}$ est parallèle à la droite $\Delta$ et donc la droite $\mathscr{D}'$ est parallèle à la droite $\Delta$.



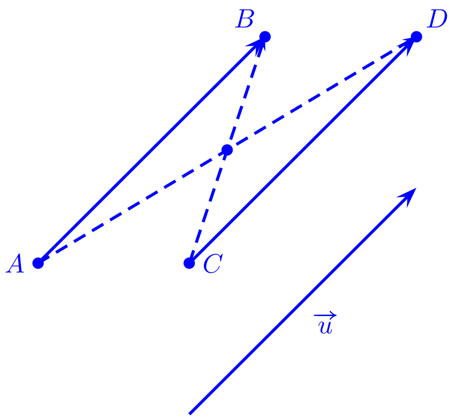

# II. Vecteurs de l'espace. Repérage dans l'espace

## 1) Vecteurs de l'espace

### a) Définition d'un vecteur de l'espace

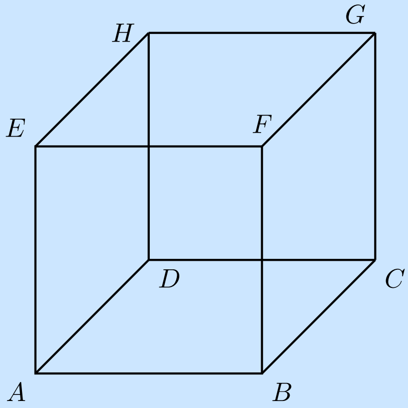
On généralise à l'espace la notion de **vecteur** déjà analysée dans le plan :
on se donne deux points $A$ et $B$ de l'espace et on considère la transformation qui à tout point $M$ de l'espace associe l'unique point $M'$ tel que les segments $[AM']$ et $[BM]$ aient le même milieu. Cette transformation s'appelle la **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On dit alors que le point $M'$ est le translaté du point $M$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Quand un point $D$ est le translaté d'un point $C$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on écrit dans ce cas que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux. Ceci est équivalent au fait que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient même milieu ou encore au fait que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux représentants d'un vecteur de l'espace, uniquement défini, noté $\overrightarrow{u}$.

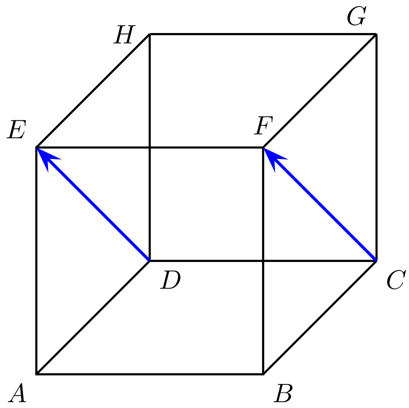



**Définition 5.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu ce qui équivalent au fait que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

**Exercice 5.** $ABCDEFGH$ est un cube. Montrer que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.




**Solution.** $ABCD$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
$ABFE$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.
Par suite, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$. Le quadrilatère $EFCD$ est donc un parallélogramme et on en déduit que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.



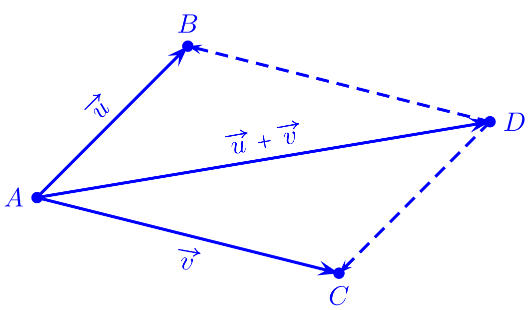

Comme dans le plan, un vecteur non nul est entièrement défini par sa direction, son sens et sa longueur appelée norme du vecteur (le vecteur nul n'indiquant quant à lui aucune direction et ayant une longueur nulle).

### b) Opérations sur les vecteurs de l'espace

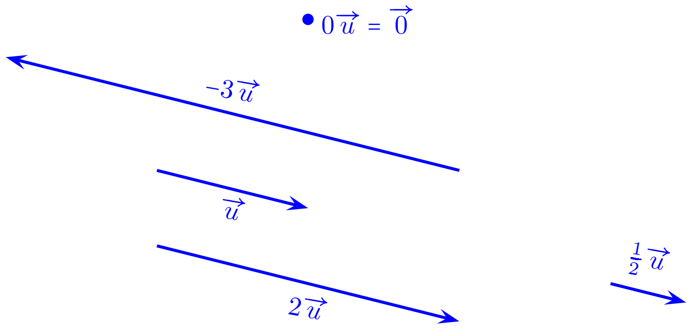
La somme de deux vecteurs de l'espace se définit comme dans le plan. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$$

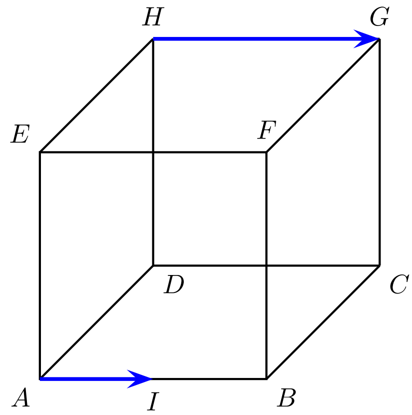
où $D$ est le point de l'espace tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



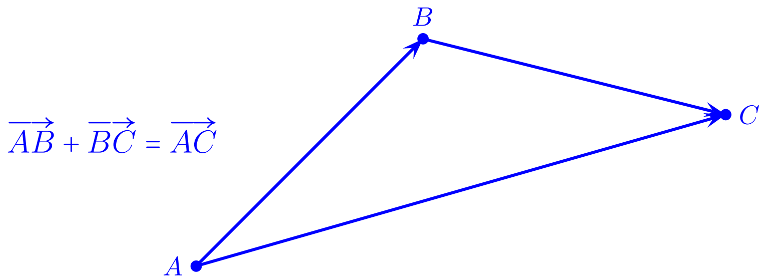

De même, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de l'espace et $k$ est un réel, on définit le vecteur $k\overrightarrow{u}$ comme en géométrie plane.
Si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, on pose $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
Si $k \neq 0$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a même direction que $\overrightarrow{u}$, même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et sens contraire si $k < 0$ et dont la longueur est $|k|$ fois la longueur de $\overrightarrow{u}$.




Par exemple, dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, si $I$ est le milieu du segment $[AB]$, on a $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{AI}$.




On admet que les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont les mêmes qu'en géométrie plane. On a aussi la relation de Chasles :




## 2) Vecteurs colinéaires. Alignement de trois points. Caractérisation des droites

### a) Vecteurs colinéaires

**Définition 6.** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si ou bien $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ou bien $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ et il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$.

**Commentaire.** Le vecteur nul est par définition colinéaire à tout vecteur. Sinon, quand $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction.

### b) Alignement de trois points

Comme en géométrie plane, la colinéarité de deux vecteurs permet de caractériser l'alignement de trois points :

**Théorème 8.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace.
$A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

### c) Caractérisation des droites de l'espace

Les résultats précédents permettent de caractériser les droites de l'espace. Donnons tout d'abord la définition suivante :

**Définition 7.** Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace.
Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est un vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$ où $A$ et $B$ sont deux points distincts de la droite $\mathscr{D}$.

**Remarque.** Un vecteur directeur est par définition non nul.

Soit alors $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. Soient $O$ et $A$ deux points distincts de $\mathscr{D}$ et soit $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{i}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$

Un point $M$ de l'espace appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si les points $O$, $A$ et $M$ sont alignés. Ceci est équivalent au fait que les vecteurs $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ soient colinéaires ou encore, puisque le vecteur $\overrightarrow{i}$ n'est pas nul, ceci est équivalent au fait qu'il existe un réel $x$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i}$. On peut noter que le réel $x$ est uniquement défini car si $x$ et $x'$ sont deux réels tels que $x\overrightarrow{i} = x'\overrightarrow{i}$, alors $(x - x')\overrightarrow{i} = \overrightarrow{0}$ puis $x - x' = 0$ car $\overrightarrow{i}$ n'est pas le vecteur nul et finalement $x = x'$.

On peut donc énoncer :

**Théorème 9.** Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace.
Soient $O$ un point de $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{i}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
Pour tout point $M$ de l'espace, $M$ appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel $x$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i}$. De plus, ce réel $x$ est unique.
$\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ s'appelle un **repère** de la droite $\mathscr{D}$.

### d) Parallélisme de droites

On peut tout de suite énoncer

**Théorème 10.** Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si elles admettent des vecteurs directeurs colinéaires.

## 3) Vecteurs coplanaires. Coplanarité de quatre points. Caractérisation des plans

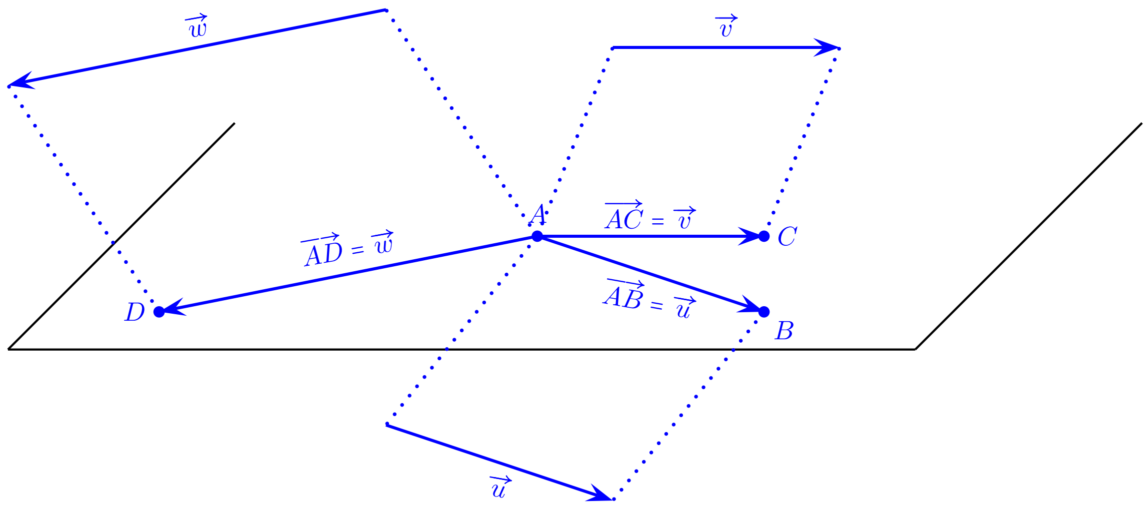
### a) Coplanarité de vecteurs

On définit maintenant la notion de vecteurs coplanaires.

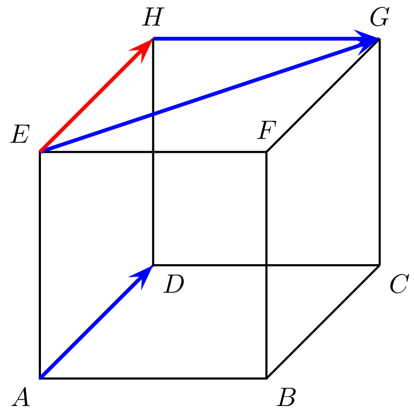
**Définition 8.** Des vecteurs sont coplanaires si et seulement si ces vecteurs admettent des représentants dont les extrémités appartiennent toutes à un même plan.

**Remarque.** De même que deux points sont toujours alignés, deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires.

Dans l'exemple ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs coplanaires.




Dans cet autre exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont coplanaires car un autre représentant du vecteur $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur $\overrightarrow{EH}$.




### b) Coplanarité de quatre points

Par définition de la coplanarité de 3 vecteurs, on a immédiatement :

**Théorème 11.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace.
$A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

### c) Caractérisation des plans de l'espace

On va maintenant définir la notion de repère (pas nécessairement orthonormé) d'un plan dans l'espace. On prépare le terrain avec le théorème suivant.

**Théorème 12.** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur de l'espace.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. De plus, les deux réels $x$ et $y$ sont uniquement définis.

**Démonstration.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires (en particulier, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas nuls), les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés (en particulier, les points $A$, $B$ et $C$ sont deux à deux distincts). Ils définissent donc un unique plan, le plan $(ABC)$.

Soient $\overrightarrow{w}$ un vecteur de l'espace puis $D$ le point tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.

• Supposons qu'il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
Soient $B'$ et $C'$ les points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB'} = x\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = y\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont colinéaires et donc le point $B'$ appartient à la droite $(AB)$ et en particulier, le point $B'$ appartient au plan $(ABC)$. De même, le point $C'$ appartient au plan $(ABC)$.

Ainsi, les points $A$, $B'$ et $C'$ appartiennent au plan $(ABC)$. Enfin, puisque $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, on a encore $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ et donc le point $D$ est le point de l'espace tel que $AB'DC'$ soit un parallélogramme. On en déduit que le point $D$ est également dans le plan $ABC$.

On a montré que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires et donc que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

• Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient coplanaires. Il revient au même de dire que le point $D$ appartient au plan $(ABC)$. D'après le cours de géométrie plane, on sait que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ peut s'écrire sous la forme $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ou encore le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire sous la forme $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Vérifions enfin l'unicité des réels $x$ et $y$. Supposons qu'il existe quatre réels $x$, $x'$, $y$ et $y'$ tels que

$$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}.$$

On a en particulier $(x - x')\overrightarrow{u} = (y' - y)\overrightarrow{v}$. Supposons par l'absurde que $y \neq y'$. Alors $y' - y \neq 0$ et on peut écrire

$$\overrightarrow{v} = \frac{x - x'}{y - y'}\overrightarrow{u}.$$

Cette dernière égalité est absurde car les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Donc $y = y'$. Il reste $(x-x')\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et donc $x - x' = 0$ car $\overrightarrow{u}$ n'est pas le vecteur nul puis $x = x'$.

---

Le théorème précédent permet de caractériser l'appartenance d'un point de l'espace à un plan :

**Théorème 13.** Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.
Soit $O$ un point de $\mathscr{P}$ et soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.
Pour tout point $M$ de l'espace, $M$ appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. De plus, les réels $x$ et $y$ sont uniquement définis.
$\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ s'appelle un **repère** du plan $\mathscr{P}$.

### d) Parallélisme d'un plan avec une droite ou un plan

Les notions de repères d'une droite ou d'un plan permettent de caractériser vectoriellement le parallélisme d'un plan et d'une droite ou le parallélisme de deux plans.

Pour le parallélisme d'une droite et d'un plan, on a

**Théorème 14.** Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace.
Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$ si et seulement si les trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}$ sont coplanaires.
$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ appartient au plan $\mathscr{P}$.
$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\mathscr{D}$ est parallèle à au moins une droite contenue dans $\mathscr{P}$.

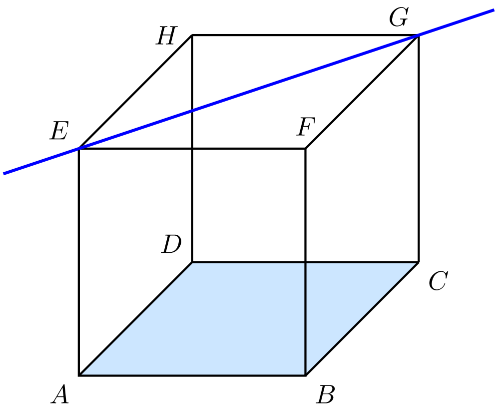
Pour le parallélisme de deux plans, on a

**Théorème 15.** Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace.
Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ et soient $\overrightarrow{i'}$ et $\overrightarrow{j'}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}'$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si les quatre vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i'}$ et $\overrightarrow{j'}$ sont coplanaires.

Réexprimé en termes de droites et de plans (et plus en termes de vecteurs), on a le théorème suivant

**Théorème 16.** Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si toute droite de $\mathscr{P}$ est parallèle à $\mathscr{P}'$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\mathscr{P}$ contient deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_1$ qui sont parallèles à $\mathscr{P}'$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\mathscr{P}$ contient deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{P}'$ contient deux droites sécantes $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}_1'$ telles que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}_1$ est parallèle à $\mathscr{D}_1'$

Par exemple, dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, il y a plusieurs manières équivalentes de montrer que la droite $(EG)$ est parallèle au plan $(ABD)$.




**1ère méthode.** Le carré $ABFE$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$. Le carré $BCGF$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$.
Mais alors $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ et donc le quadrilatère $ACGE$ est un parallélogramme. On en déduit que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.
Par suite, les droites $(EG)$ et $(AC)$ admettent des vecteurs directeurs colinéaires et sont donc parallèles.

Finalement, la droite $(EG)$ est parallèle à la droite $(AC)$ qui est une droite contenue dans le plan $(ABD)$. On en déduit que la droite $(EG)$ est parallèle au plan $(ABD)$.

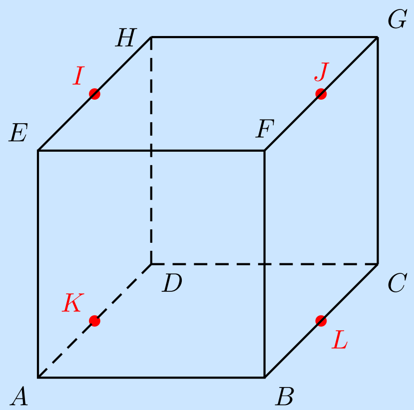
**2ème méthode.** Les carrés $EFGH$, $ABFE$ et $ADEH$ sont des parallélogrammes et donc

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur directeur de la droite $(EG)$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $(ABD)$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et on en déduit de nouveau que la droite $(EG)$ est parallèle au plan $(ABD)$.

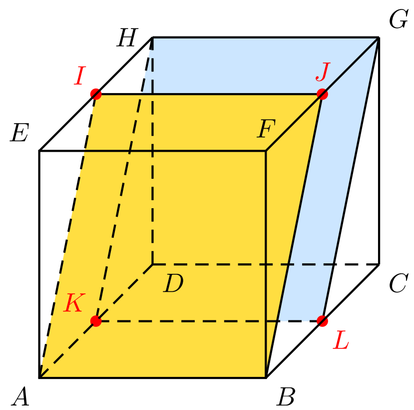
**3ème méthode.** Les carrés $ABFE$ et $ADHE$ sont des parallélogrammes. Donc $(AB)$ est parallèle $(EF)$ et $(AD)$ est parallèle à $(EH)$. Comme $(AB)$ et $(AD)$ sont deux droites sécantes du plan $(ABD)$ et $(EF)$ et $(EH)$ sont deux droites sécantes du plan $(EFH)$, les plans $(ABD)$ et $(EFH)$ sont parallèles. Mais alors, toute droite du plan $(EFH)$ est parallèle au plan $(ABD)$. En particulier, la droite $(EG)$ est parallèle au plan $(ABD)$.

**Exercice 6.** On considère un cube $ABCDEFGH$.
Soient $I$, $J$, $K$ et $L$ les milieux respectifs des segments $[EH]$, $[FG]$, $[AD]$ et $[BC]$.




Montrer que les plans $(ABI)$ et $(GHK)$ sont parallèles.

**Solution.** $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$.
Donc, le quadrilatère $ABJI$ est un parallélogramme et en particulier, le point $J$ appartient au plan $(ABI)$.
De même, le quadrilatère $GHKL$ est un parallélogramme et en particulier, le point $L$ appartient au plan $(GHK)$.




$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BL}$. Donc, $AKLB$ est un parallélogramme. En particulier, la droite $(AB)$ est parallèle à la droite $(KL)$ qui est une droite du plan $(GHK)$. Donc, la droite $(AB)$ est parallèle au plan $(GHK)$.

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IH}$. Donc, le quadrilatère $AKHI$ est un parallélogramme. En particulier, la droite $(AI)$ est parallèle à la droite $(HK)$ qui est une droite du plan $(GHK)$. On en déduit que la droite $(AI)$ est parallèle au plan $(GHK)$.

Ainsi, le plan $(GHK)$ est parallèle aux droites $(AB)$ et $(AI)$ qui sont deux droites sécantes du plan $(ABI)$. Donc, le plan $(GHK)$ est parallèle au plan $(ABI)$.

## 4) Repères de l'espace

### a) Définition d'un repère de l'espace

On peut maintenant définir la notion de repère (pas nécessairement orthonormé) de l'espace et de coordonnées d'un point dans un tel repère. Le théorème qui suit prépare le terrain.

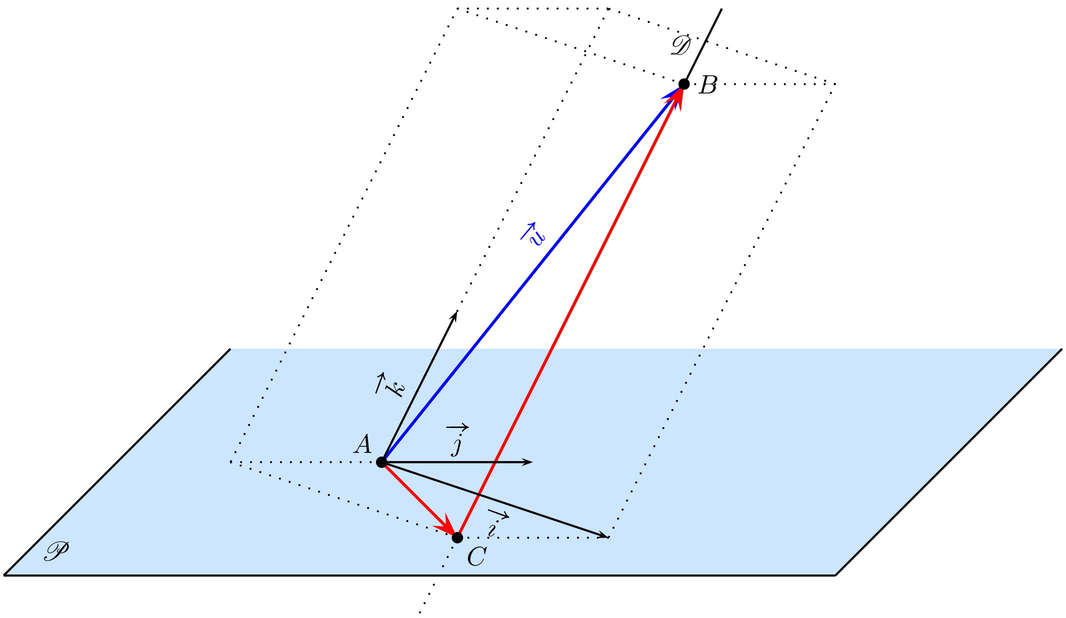
**Théorème 17.** Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe des réels $x$, $y$ et $z$ tels que

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k},$$

De plus, les réels $x$, $y$ et $z$ sont uniquement définis.

**Démonstration.**

**Existence.** Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace tels $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan de repère $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $B$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$.




Puisque les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas coplanaires, la droite $\mathscr{D}$ est sécante au plan $\mathscr{P}$. On note $C$ le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}$.

Puisque le point $C$ est dans $\mathscr{P}$, il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
Puisque les points $B$ et $C$ appartiennent à la droite $\mathscr{D}$, le vecteur $\overrightarrow{CB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{k}$ et donc il existe un réel $z$ tel que $\overrightarrow{CB} = z\overrightarrow{k}$.

La relation de Chasles permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right) + z\overrightarrow{k}\\ &= x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

**Unicité.** Soient $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$ et $z'$ six réels tels que

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$$

Supposons par l'absurde que $z \neq z'$. Alors $z' - z \neq 0$ et on peut écrire

$$\overrightarrow{k} = \frac{x - x'}{z' - z}\overrightarrow{i} + \frac{y - y'}{z' - z}\overrightarrow{j}.$$

Mais alors, les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont coplanaires ce qui est faux. Donc $z = z'$.
On montre de même que $x = x'$ et $y = y'$.

---

Une conséquence immédiate de ce théorème est

**Théorème 18.** Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Pour tout point $M$ de l'espace, il existe des réels $x$, $y$ et $z$ tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k},$$

où $x$, $y$ et $z$ sont trois réels. De plus, les réels $x$, $y$ et $z$ sont uniquement définis.
On dit alors que le point $M$ a pour **coordonnées** $(x, y, z)$ dans le **repère** $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ ou aussi que le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ a pour **coordonnées** $(x, y, z)$ dans le **repère** $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

**Vocabulaire.** Les réels $x$, $y$ et $z$ s'appellent respectivement l'**abscisse**, l'**ordonnée** et la **hauteur** ou la **côte** du point $M$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Quand les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de longueur 1 (notions étudiées dans le chapitre suivant), le repère est dit **orthonormé** ou **orthonormal**.

### b) Coordonnées du milieu, coordonnées d'un vecteur, ...

**Théorème 19.** Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.
Soient $\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace et soit $k$ un réel.

**1)** Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$.

**2)** Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx, ky, kz)$.

**Démonstration.** Dire que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x, y, z)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ équivaut à dire que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

De même, $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ et donc

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k},$$

et aussi

$$k\vec{u} = (kx)\vec{i} + (ky)\vec{j} + (kz)\vec{k}.$$

---

**Théorème 20.** Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Soient $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et $B\,(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

**1)** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

**2)** Le milieu $I$ de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

**Démonstration. 1)** D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= \left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}\right) - \left(x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}\right)\\ &= (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k}\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

**2)** Notons $(x, y, z)$ les coordonnées du milieu $I$ du segment $[AB]$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

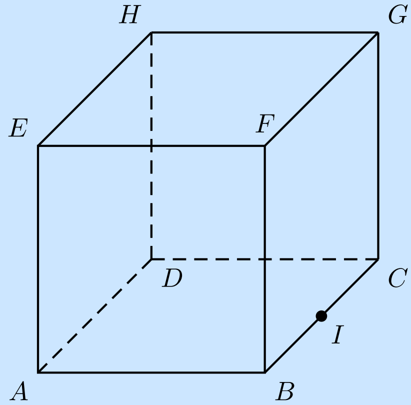
On sait que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$ sont $(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IB}$ sont $(x_B - x, y_B - y, z_B - z)$ puis

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - x_A = x_B - x\\ y - y_A = y_B - y\\ z - z_A = z_B - z\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = x_A + x_B\\ 2y = y_A + y_B\\ 2z = z_A + z_B\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{x_A + x_B}{2}\\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2}\\ z = \dfrac{z_A + z_B}{2}\end{array}\right.$$

Le milieu $I$ de $[AB]$ a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

---

**Exercice 7.** On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous. $I$ est le milieu du segment $[BC]$.




Donner, en les justifiant, les coordonnées des neuf points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ et $I$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

**Solution.** • $A$ est l'origine du repère et donc les coordonnées de $A$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $(0,0,0)$.

• $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AE}$ et donc les coordonnées de $B$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $(1,0,0)$.

• $\overrightarrow{AD} = 0.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AE}$ et donc les coordonnées de $D$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $(0,1,0)$.

• $\overrightarrow{AE} = 0.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$ et donc les coordonnées de $E$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $(0,0,1)$.

• $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AE}$ et donc les coordonnées de $C$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $(1,1,0)$.

• $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$ et donc les coordonnées de $F$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $(1,0,1)$.

• $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 0.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$ et donc les coordonnées de $H$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $(0,1,1)$.

• $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$ et donc les coordonnées de $G$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $(1,1,1)$.

• $I$ est le milieu de $[BC]$. Les coordonnées de $I$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ sont $\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}, \dfrac{y_B + y_C}{2}, \dfrac{z_B + z_C}{2}\right)$ ou encore $\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

---

# III. Représentations paramétriques de droites et de plans de l'espace

## 1) Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. Soient $A$ un point de $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. On rappelle que la droite $\mathscr{D}$ est entièrement déterminée par la donnée de $A$ et de $\overrightarrow{u}$ (dit autrement, $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ est un repère de la droite $\mathscr{D}$).

Soit alors $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace. On suppose que le point $A$ a pour coordonnées $(x_A, y_A, z_A)$ et que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(a, b, c)$ dans ce repère.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned}
M \text{ appartient à } \mathscr{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \text{ (car } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}\text{)} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, s'appelle un **système d'équations paramétriques** de la droite $\mathscr{D}$ ou aussi une **représentation paramétrique** de la droite $\mathscr{D}$. Le **paramètre** est le réel $t$. Chaque fois que l'on donne explicitement une valeur à $t$, on obtient les coordonnées d'un point de la droite $\mathscr{D}$. Par exemple, quand $t = 0$, on obtient $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \\ z = z_A \end{cases}$ qui sont les coordonnées du point $A$ qui est un point de la droite $\mathscr{D}$. On note que les coefficients $a$, $b$ et $c$ du réel $t$ fournissent les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
Il n'y a pas du tout unicité d'une représentation paramétrique de droite. Si on change de point et/ou on change de vecteur directeur, on obtient une représentation paramétrique d'aspect très différent.

**Exemple.** Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace. Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 5 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

$\mathscr{D}$ passe par le point $A$ de coordonnées $(2, 0, 5)$ (obtenu pour $t = 0$) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(-1, 3, 0)$ (les coefficients du réel $t$).
Un autre point de $\mathscr{D}$ est le point $B$ de coordonnées $(1, 3, 5)$ (obtenu pour $t = 1$) et un autre vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(2, -6, 0)$ ($\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{u}$). Un autre système d'équations paramétriques de $\mathscr{D}$ est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 3 - 6t' \\ z = 5 \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 8.** L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A$ et $B$ de coordonnées respectives $(4, 1, 1)$ et $(6, 1, -2)$.
Déterminer l'intersection de la droite $(AB)$ avec chacun des trois plans de coordonnées $(xOy)$, $(xOz)$ et $(yOz)$.

**Solution.** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(6 - 4, 1 - 1, -2 - 1)$ ou encore $(2, 0, -3)$.
La droite $(AB)$ est la droite passant par $A(4, 1, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2, 0, -3)$. Un système d'équations paramétriques de la droite $(AB)$ est donc

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

• Intersection de la droite $(AB)$ avec $(xOy)$. Le plan $(xOy)$ est l'ensemble des points de l'espace dont la côte $z$ est nulle.
Soit $M(4 + 2t, 1, 1 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $(AB)$.

$$M \in (xOy) \Leftrightarrow 1 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = \frac{1}{3}$, on obtient le point de coordonnées $\left(4 + 2 \times \frac{1}{3}, 1, 0\right)$ ou encore $\left(\frac{14}{3}, 1, 0\right)$. Ainsi, la droite $(AB)$ et le plan $(xOy)$ sont sécants en le point de coordonnées $\left(\frac{14}{3}, 1, 0\right)$.

• Intersection de la droite $(AB)$ avec $(xOz)$. Le plan $(xOz)$ est l'ensemble des points de l'espace dont l'ordonnée $y$ est nulle.
Tout point de la droite $(AB)$ a une ordonnée égale à 1 et donc aucun point de la droite $(AB)$ n'appartient au plan $(xOz)$. L'intersection de la droite $(AB)$ et du plan $(xOz)$ est vide. On en déduit que la droite $(AB)$ est strictement parallèle au plan $(xOz)$.

• Intersection de la droite $(AB)$ avec $(yOz)$. Le plan $(yOz)$ est l'ensemble des points de l'espace dont l'abscisse $x$ est nulle.
Soit $M(4 + 2t, 1, 1 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $(AB)$.

$$M \in (yOz) \Leftrightarrow 4 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Quand $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(0, 1, 1 - 3(-2))$ ou encore $(0, 1, 7)$. Ainsi, la droite $(AB)$ et le plan $(yOz)$ sont sécants en le point de coordonnées $(0, 1, 7)$.

## 2) Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

Le principe est le même pour un plan que pour une droite sauf qu'au lieu d'avoir un paramètre, nous en aurons deux.

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Soient $A$ un point de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.
On rappelle que $\left(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est un repère du plan $\mathscr{P}$.

Soit alors $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace. On suppose que le point $A$ a pour coordonnées $(x_A, y_A, z_A)$ et que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$ dans ce repère.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$M$ appartient à $\mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires

$\Leftrightarrow$ il existe deux réel $\lambda$ et $\mu$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ (car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires)

$\Leftrightarrow$ il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que $\left\{\begin{array}{l} x - x_A = \lambda a + \mu a' \\ y - y_A = \lambda b + \mu b' \\ z - z_A = \lambda c + \mu c' \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$ il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{array}\right.$.

Le système $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, s'appelle un **système d'équations paramétriques** du plan $\mathscr{P}$ ou aussi une **représentation paramétrique** du plan $\mathscr{P}$. Les **paramètres** sont les réels $\lambda$ et $\mu$. Chaque fois que l'on donne explicitement une valeur à $\lambda$ et une valeur à $\mu$, on obtient les coordonnées d'un point du plan $\mathscr{P}$.
Par exemple, quand $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} x = x_A \\ y = y_A \\ z = z_A \end{array}\right.$ qui sont les coordonnées du point $A$ qui est un point du plan $\mathscr{P}$.
Comme pour une droite, il n'y a pas du tout unicité d'une représentation paramétrique de plan. Les représentations paramétriques de plan sont beaucoup moins utilisées dans la pratique de terminale S que les équations paramétriques de droites.

**Exemple.** Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace. Soit $\mathscr{P}$ le plan de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 5 - \mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{array}\right., \ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

$\mathscr{P}$ passe par le point $A$ de coordonnées $(2, 5, 0)$ (obtenu pour $\lambda = \mu = 0$). Deux vecteurs de $\mathscr{P}$ non colinéaires sont $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, 0, 3)$ (les coefficients du réel $\lambda$) et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(0, -1, 1)$ (les coefficients du réel $\mu$).
$\mathscr{P}$ est le plan de repère $\left(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.