Exercices supplémentaires : Loi binomiale

Partie A : Loi binomiale

Exercice 1

Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

1) Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
2) On effectue 9 forages.
   a. Quelle hypothèse doit-on formuler pour que la variable aléatoire X correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?
   b. Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.

Exercice 2

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5×10^{-3}.

Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir

a. Exactement deux résistances défectueuses ?
b. Au plus deux résistances défectueuses ?
c. Au moins deux résistances défectueuses ?

Exercice 3

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.

On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?
3) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à $0,001$?

Exercice 4

Afin de créer une loterie, on place dans une urne n boules différentes ($n \geq 3$) dont deux et deux seulement sont gagnantes. On choisit au hasard deux boules de l'urne en remettant la première boule tirée avant d'en tirer une seconde.

1) On suppose dans cette question que $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de boules gagnantes parmi les deux choisies. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2) On revient au cas général. Calculer la probabilité q_n d'avoir exactement une boule gagnante parmi les deux.

Exercice 5

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0,4.

1) Calculer $p(X = 3)$; $p(X = 17)$; $p(X = 10)$.
2) Calculer $p(X \leq 1)$; $p(X \geq 18)$; $p(X \leq 15)$ et $p(X \geq 10)$.

Exercice 6

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 50 et $0,03$.

1) Calculer $p(X = 3)$; $p(X = 17)$; $p(X = 10)$.
2) Calculer $p(X \leq 1)$; $p(X \geq 48)$; $p(X \leq 15)$ et $p(X \geq 10)$.

Partie B : Coefficients binomiaux

Exercice 1

1) Interpréter $\binom{6}{1}$ et en donner la valeur.
2) On suppose connu que $\binom{6}{2} = 15$. En déduire $\binom{7}{2}$.
3) Comment obtenir facilement $\binom{7}{5}$?

Exercice 2
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) $\binom{12}{9} = \binom{12}{3}$
2) $\binom{8}{4} = 2\binom{7}{3}$
3) $\binom{9}{5} = 3\binom{8}{5}$

Exercice 3
Donner les valeurs sans calculatrice :

$$\binom{25}{0} \ ; \ \binom{23}{22} \ ; \ \binom{15}{15} \ ; \ \binom{2013}{1}$$

Exercice 4
Calculer avec la calculatrice :

$$\binom{52}{4} \ ; \ \binom{24}{20} \ ; \ \binom{13}{7} \ ; \ \binom{2013}{2000}$$

Exercice 5
A l'aide du triangle de Pascal, démontrer que $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$

Exercice 6
A l'aide du triangle de Pascal, donner les valeurs de

$$\binom{6}{2} \ ; \ \binom{6}{3} \ ; \binom{6}{4} \text{ et } \binom{6}{5}$$

<u>Partie C : Espérance et variance d'une loi binomiale</u>

Exercice 1
Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de $15km.h^{-1}$.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.
Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.
1) Déterminer la loi de probabilités de X.
2) Exprimer T en fonction de X.
3) Déterminer $E(T)$ et interpréter ce résultat.
4) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   a. Peut-il espérer être à l'heure ?
   b. Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

Exercice 2
Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6.Ils décident de jouer trois matchs dans l'année (les résultats des matchs sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. A la fin de chaque match, le perdant versera 20€.
Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matchs gagnés par Benjamin et D la variable aléatoire correspondant à la dépense de Benjamin.
a. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer D en fonction de X et en déduire les valeurs possibles de D.
b. Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40€ est 0,432.
c. Calculer l'espérance de dépense en fin d'année de Benjamin.

Exercice 3
Un pépiniériste conditionne des bulbes de fleurs .On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83.
Il prélève au hasard successivement quinze bulbes de ce stock. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Quelle est la probabilité qu'exactement 5 bulbes choisis germent ?
3) Quelle est la probabilité qu'au moins 9 bulbes germent ?
4) En moyenne, sur un prélèvement de 15 bulbes, combien vont germer ?

Exercice 4

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Un trajet coûte 10€ ; en cas de fraude, l'amende est de 100€. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1) On suppose que $p = 0,05$.
   a. Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois.
   b. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Théo. Justifier que $Z = 400 - 110X$ puis calculer $E(Z)$.
2) On ne connaît plus la valeur de p.

Pour quelles valeurs de p, la fraude systématique est-elle favorable à Théo ? Justifier.

Exercice 5

Indiquer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}\left(n;\frac{1}{3}\right)$ avec $n \geq 2$, alors $p(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
2) Si X suit la loi $\mathcal{B}(5;p)$ et si $p(X = 1) = \frac{5}{3}p(X = 0)$ alors $p(X = 2) = 3p(X = 3)$
3) Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale avec $E(X) = 36$ et $\sigma(X) = 3$ alors $p(X = 29) \approx 0,01$ à 10^{-3} près.

Exercice 6

Une boîte contient 1 jeton noir, 2 jetons rouges et 3 jetons jaunes. L'expérience consiste à effectuer n tirages d'un jeton de cette boîte avec remise ($n \geq 2$).

On note N et R les variables aléatoires donnant les nombres de jetons noirs et rouges lors de ces n tirages.

1) Déterminer les lois de probabilités de N et R.
2) Déterminer leur espérance et leur variance.
3) On note S la variable aléatoire indiquant le nombre de jetons noirs ou rouges obtenus lors de ces n tirages.
   a. Montrer que S suit une loi binominale ; préciser les paramètres.
   b. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.
   c. A-t-on $E(N + R) = E(N) + E(R)$? et $V(N + R = V(N) + V(R)$?

Partie D : Echantillonnage

Exercice 1

La société qui fabrique les fameux jeans « Clovis » avait fait faire en 2008 une enquête de satisfaction qui indiquait que 75% des clients étaient satisfaits de leur jean. Le directeur de marketing désire lancer une campagne de publicité en 2010 dont le slogan serait « trois quart de nos clients nous sont fidèles ».

1) Sous l'hypothèse que la proportion de 2008 est toujours valable en 2010, déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des personnes fidèles à la marque sur un échantillon de taille 100.
2) Le directeur de marketing commande une enquête à un institut de sondage auprès de 100 personnes. L'institut répond « 64% des personnes sondées sont fidèles à la marque Clovis ». Quelle décision peut prendre le directeur de marketing ?

Exercice 2

Entre les deux tours d'une élection présidentielle, il ne reste que deux candidats A et B en lice. Lors d'un débat télévisé, A affirme sur la foi d'un sondage secret que si l'élection avait lieu maintenant, il gagnerait largement avec 60% des voix. Avant la fin du débat, B fait effectuer un sondage par téléphone auprès de 200 personnes en âge de voter. Le résultat donne 104 personnes en faveur de A.

1) En supposant que le sondage secret reflète fidèlement l'opinion des électeurs le jour du débat, donner l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des personnes favorables à A sur un échantillon de 200 pesonnes.
2) Que peut-on dire suite au résultat du sondage demandé par B ?

3) Reprendre les deux questions avec un intervalle de fluctuation au seuil de 98%.

Exercice 3

Les infections nosocomiales sont des infections contractées lors d'un séjour hospitalier. En France, la dernière enquête de prévalence « un jour donné en 2006 » dans les établissements de santé a dénombré 18000 patients infectés sur 360000 personnes hospitalisées.

Le jour de cette enquête nationale, près de 930 des 19400 patients hospitalisés dans les Pays de la Loire étaient atteints d'une ou plusieurs infections nosocomiales.

Au seuil de 95%, les résultats en Pays de la Loire montrent-ils une différence significative par rapport aux résultats nationaux le jour de l'enquête ?

Exercice 4

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si, après avoir déterminer un intervalle de fluctuation d'une fréquence associée à une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ au seuil de 95%, on rejette l'hypothèse au risque de 5%, alors on la rejette nécessairement au seuil de 1%.

2) Lisa affirme que sa pièce de collection de $10€$ est parfaitement équilibrée. Aziz en doute et la lance 40 fois pour voir. Il obtient 26 Pile exactement et il en conclut que la pièce n'est pas équilibrée.

   a. Si on suppose que la pièce est bien équilibrée, un intervalle de fluctuation au seuil de 90% de la fréquence de Pile sur 40 lancers est $I \approx [0{,}375; 0{,}625]$.

   b. Comme la fréquence $f = 0{,}65$ obtenue par Aziz n'appartient pas à I, Aziz a raison de rejeter l'hypothèse de « pièce équilibrée ».

Exercice 5

Luce a lancé un dé 80 fois. Elle a obtenue 52 fois un nombre pair. Elle s'étonne du résultat.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.
2) Que peut-on lui dire ?

Exercice 6

Une loterie est organisée dans l'ensemble des écoles primaires d'une ville. Les organisateurs annoncent 75% de billets gagnants. Dans l'école de Yan, 102 billets ont été achetés et seuls 58 étaient gagnants.

Peut-on penser, comme Yan, que la publicité était quelque peu mensongère ? Pour cela, on déterminera l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Exercice 7

Dans une usine automobile, on contrôle les défauts de peinture. On considère que dans des conditions normales, on a 20% de ce type de défauts. Lors du contrôle aléatoire de 50 véhicules, on observe 26% de défauts.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 90%. Faut-il s'inquiéter ?
2) Même question avec l'intervalle de fluctuation au seuil de 98%.

Exercice 8

En lançant une pièce équilibrée un certain nombre de fois, on obtient une fréquence de Pile égale à 0,42.

Que peut-on dire de la pièce si on a lancé la pièce 30 fois ? 100 fois ? 1000 fois ?

On pourra commencer par déterminer les intervalles de fluctuations au seuil de 95%.

Partie E : Bilan

Exercice 1

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.

On effectue n tirages successifs ($n \geq 1$) d'une boule avec remise.

1) Déterminer en fonction de n la probabilité p_n de tirer au moins une boule blanche en n tirages.
2) Quelles valeurs faut-il donner à n pour que $p_n \geq 0{,}99$?

Exercice 2

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

On suppose que n touristes ($n \geq 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1) Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leq k \leq n$) partent en direction de l'Est.
2) On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.
   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
   b. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut $p = \frac{n}{2^{n-1}}$.
   c. Application numérique : Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

Exercice 3

On lance 10 fois une pièce supposée équilibrée. Les variables aléatoires X, Y et Z donnent respectivement le nombre de Piles obtenus lors des 10 lances, lors des 5 premiers lancers et lors des 5 derniers lancers.

1) Justifier que X, Y et Z suivent des lois binomiales dont on précisera les paramètres.
2) Calculer $p(X = 5)$
3) Calculer $p(Y = 2)$; $p(Z = 3)$ puis $p(Y = 2 \text{ et } Z = 3)$
4) On note E_k l'événement ($Y = k$ et $Z = 5 - k$) pour $0 \leq k \leq 5$.
   a. Donner $p(E_2)$
   b. Calculer $p(E_k)$ pour les autres valeurs de k.
   c. Justifier que $p(X = 5) = p(E_0) + p(E_1) + \cdots + p(E_5)$.
   En déduire l'égalité
$$\sum_{k=0}^{k=5} \binom{5}{k}^2 = \binom{10}{5}$$
5) Généralisation : on lance $2n$ fois la pièce avec $n \geq 1$. Etablir que
$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 4

Rapid le lièvre et Dosman la tortue lancent un dé : s'il tombe sur 6, le lièvre gagne et le jeu s'arrête. S'il tombe sur un autre numéro, la tortue avance d'une case. La tortue gagne si elle parvient à avancer de n cases (n non nul).
Les lancers se poursuivent jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant. On note $p_n(T)$ (respectivement $p_n(L)$) la probabilité que la tortue gagne (respectivement que le lièvre gagne).

1) Etude du cas $n = 4$.
   a. Lequel des deux concurrents vous paraît-il favorisé ?
   b. Calculer $p_4(T)$ puis $p_4(L)$ (vous pouvez utiliser un arbre).
   c. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un vainqueur. X suit-elle une loi binomiale ? Justifier.
   d. Combien de lancers en moyenne faut-il pour avoir un gagnant ?
   e. Dix parties indépendantes sont jouées. Quelle est la probabilité que la tortue gagne 5 fois exactement ? au moins deux fois ?
2) La valeur de n n'est plus fixée.
   a. Calculer $p_n(T)$ et déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est favorable à la tortue.
   b. Calculer l'espérance du nombre de parties remportées par la tortue dans une série de 10 parties.

Correction exercices supplémentaires : Loi binomiale

Partie A : Loi binomiale

Exercice 1

1) Le forage conduit à une nappe de pétrole avec une probabilité 0,1 ou pas avec une probabilité 0,9. C'est donc bien une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,1. Il a bien que deux issues possibles.

2)
   a. Les forages doivent être indépendants pour que X suive une loi binomiale.
   b. $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}9^9 \approx \boxed{0{,}613}$

Exercice 2

On considère que le tirage de 1000 résistances a lieu avec remise et que donc les tirages sont indépendants les uns des autres. Le nombre X de résistances défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres 1000 et 0,005.

a. $p(X = 2) = \binom{1000}{2} \times 0{,}005^2 \times 0{,}995^{998} = 499500 \times 0{,}005^2 \times 0{,}995^{998} \approx \boxed{0{,}084}$

b. $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$

$= \binom{1000}{0} \times 0{,}995^{1000} + \binom{1000}{1} \times 0{,}005 \times 0{,}995^{999} + \binom{1000}{2} \times 0{,}005^2 \times 0{,}995^{998} \approx \boxed{0{,}124}$

c. $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$

$= 1 - 0{,}995^{1000} - 1000 \times 0{,}005 \times 0{,}995^{999} \approx \boxed{0{,}960}$

Exercice 3

1) Les interrogations se font de manière indépendante les unes des autres et à chaque interrogation la probabilité d'avoir une fille est $\frac{20}{30}$ soit $\frac{2}{3}$ donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$.

2) Pour $n = 10$

$p(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 210 \times \frac{16}{81} \times \frac{1}{729} \approx \boxed{0{,}057}$

$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx \boxed{0{,}980}$

3) On cherche n tel que $p(X = 0) \leq 0{,}001$ or $p(X = 0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.

$p(X = 0) \leq 0{,}001 \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} \leq 0{,}001 \Leftrightarrow 3^n \geq \frac{1}{0{,}001} \Leftrightarrow 3^n \geq 1000$

A l'aide d'un tableau de valeur de la calculatrice, on a $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$ donc $n \geq 7$

Il faut donc interroger pendant au moins 7 jours consécutifs pour que la probabilité de n'avoir aucune fille soit inférieure à 0,001.

Exercice 4

1) Les tirages sont indépendants et à chacun des deux tirages, on a 2 chances sur 10 d'avoir une boule gagnante. Le nombre de boules gagnantes suit donc une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{5}$.

2) Dans le cas général, Y suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{2}{n}$.

$q_n = p(Y = 1) = \binom{2}{1} \times \left(\frac{2}{n}\right)^1 \times \left(\frac{n-2}{n}\right)^1 = 2 \times \frac{2}{n} \times \frac{n-2}{n} = \frac{4n-8}{n^2}$

Exercice 5

1) A la calculatrice :

$p(X = 3) \approx \boxed{0{,}012}$; $p(X = 17) \approx \boxed{0{,}00004}$; $p(X = 10) \approx \boxed{0{,}117}$

2) $p(X \leq 1) \approx \boxed{0{,}0005}$; $p(X \geq 18) = 1 - p(X \leq 17) \approx \boxed{0{,}99996}$; $p(X \leq 15) \approx \boxed{0{,}9997}$

$p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0\boxed{0{,}840}$

Exercice 6

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,03.

3) Calculer $p(X = 3)$; $p(X = 17)$; $p(X = 10)$ à 10^{-3} près.
4) Calculer $p(X \leq 1)$; $p(X \geq 48)$; $p(X \leq 15)$ et $p(X \geq 10)$ à 10^{-3} près.

1) $p(X = 3) \approx \boxed{0{,}126}$; $p(X = 17) \approx \boxed{4 \times 10^{-14}}$; $p(X = 10) \approx \boxed{2 \times 10^{-6}}$
2) $p(X \leq 1) \approx \boxed{0{,}555}$; $p(X \geq 18) = 1 - p(X \leq 17) \approx \boxed{0}$; $p(X \leq 15) \approx \boxed{10^{-11}}$;

$$p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx \boxed{2 \times 10^{-6}}$$

Partie B : Coefficients binomiaux

Exercice 1

1) $\binom{6}{1}$ est le nombre de chemin conduisant à exactement un succès en 6 coups. Il y a 6 possibilités.
2) $\binom{7}{2} = \binom{6}{2} + \binom{6}{1} = 15 + 6 = \boxed{21}$
3) $\binom{7}{5} = \binom{7}{7-5} = \binom{7}{2} = \boxed{21}$

Exercice 2

1) $\boxed{VRAI}$ car $\binom{12}{9} = \binom{12}{12-9} = \binom{12}{3}$
2) $\boxed{VRAI}$ car $\binom{8}{4} = \binom{7}{4} + \binom{7}{3} = \binom{7}{7-4} + \binom{7}{3} = \binom{7}{3} + \binom{7}{3} = 2\binom{7}{3}$
3) $\boxed{FAUX}$ car $\binom{9}{5} = 126$ et $3\binom{8}{5} = 3 \times 56 = 168$

Exercice 3

$\binom{25}{0} = \boxed{(1)}$; $\binom{23}{22} = \binom{23}{1} = \boxed{23}$; $\binom{15}{15} = \boxed{1}$; $\binom{2013}{1} = \boxed{2013}$

Exercice 4

$\binom{52}{4} = \boxed{270725}$; $\binom{24}{20} = \boxed{10626}$; $\binom{13}{7} = \boxed{1716}$; $\binom{2013}{2000} = \boxed{1{,}37 \times 10^{33}}$

Exercice 5

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$$
$$= \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2} = \boxed{\binom{7}{3}}$$

Exercice 6

$\binom{6}{2} = \boxed{15}$; $\binom{6}{3} = \boxed{20}$; $\binom{6}{4} = \boxed{15}$ et $\binom{6}{5} = \boxed{6}$

Partie C : Espérance et variance d'une loi binomiale

Exercice 1

1) Les 6 feux sont indépendants les uns des autres et chacun a une probabilité de $\frac{2}{3}$ d'être vert. Donc le nombre X de feux verts rencontrés suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{2}{3}$.

2) Pour chaque feu vert, il n'y a pas d'attente mais pour les autres feux (il y en a $6 - X$), l'attente est de 1,5 minutes. De plus le trajet sans compter les feux dure 12 minutes car $\frac{3\times 60}{15} = 12$.

Donc $T = 12 + 1{,}5(6 - X) = \boxed{21 - 1{,}5X}$

3) $E(T) = E(21 - 1{,}5X) = 21 - 1{,}5E(X) = 21 - 1{,}5 \times 6 \times \frac{2}{3} = \boxed{15}$

En moyenne, l'élève met 15 minutes pour aller au lycée.

4)
   a. L'élève peut espérer être à l'heure car la moyenne est inférieure à 17 minutes.
   b. $p(T > 17) = p(21 - 1{,}5X > 17) = p\left(X < \frac{8}{3}\right) = p(X \leq 2) \approx \boxed{0{,}1}$

Exercice 2

a. X étant le nombre de matchs gagnés sur les 3 joués, on a $X \in \{0; 1; 2; 3\}$.

De plus pour chaque match perdu, Benjamin verse 20€ donc $D = 20(3 - X) = \boxed{60 - 20X}$

On a alors $\boxed{D \in \{60; 40; 20; 0\}}$

b. $D = 40$ si et seulement si $X = 1$. Il y a trois matchs indépendants les uns des autres et pour chaque match, la probabilité que Benjamin gagne est de 0,4 donc le nombre X de match gagnés par Benjamin suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,4.

$$p(D = 40) = p(X = 1) = \binom{3}{1} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^2 = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}36 = \boxed{0{,}432}$$

c. $E(D) = E(60 - 20X) = 60 - 20E(X) = 60 - 20 \times 3 \times 0{,}4 = 36$

En moyenne, Benjamin dépensera 36€ par an.

Exercice 3

1) Les 15 bulbes sont prélevées de manière indépendante car il y a un très grand nombre de bulbes et que pour chaque bulbe la probabilité de germer est de 0,83. Le nombre X de bulbes qui germent suit donc une loi binomiale de paramètres 15 et 0,83.
2) $p(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0{,}83^5 \times (1 - 0{,}83)^{10} = 3003 \times 0{,}83^5 \times 0{,}17^{10} \approx \boxed{0{,}00002}$
3) $p(X \geq 9) = 1 - p(X < 9) = 1 - p(X \leq 8) \approx \boxed{0{,}993}$
4) $E(X) = 15 \times 0{,}83 = 12{,}45$

En moyenne, il y a 12 ou 13 bulbes qui germent.

Exercice 4

1)

a. Les 40 contrôles sont indépendants les uns des autres et pour chaque voyage, la probabilité d'être contrôlé est de 0,05 donc le nombre X de contrôle subit suit une loi binomiale de paramètres 40 et 0,05.

$p(X \leq 2) \approx \boxed{0{,}6767}$

b. Pour les trajets où il est contrôlé, Théo perd 100€ et pour les trajets où il n'est pas contrôlé (il y en a $40 - X$), il gagne les 10€ du trajet.

$Z = -100X + 10(40 - X) = \boxed{400 - 110X}$

$E(Z) = E(400 - 110X) = 400 - 110E(X) = 400 - 110 \times 40 \times 0{,}05 = 180$

En moyenne Théo gagne 180€ par mois.

2) Le raisonnement est le même : X suit une loi binomiale de paramètres 40 et p.

$$E(Z) \geq 0 \Leftrightarrow E(400 - 110X) \geq 0 \Leftrightarrow 400 - 110E(X) \geq 0 \Leftrightarrow 400 - 110 \times 40p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq \frac{400}{110 \times 40}$$

Donc il faut que $p \leq \frac{1}{11}$ pour que la fraude systématique soit favorable à Théo.

Exercice 5

1) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $\boxed{Vrai}$
2) $p(X = 1) = \frac{5}{3}p(X = 0) \Leftrightarrow \binom{5}{1} \times p^1 \times (1 - p)^4 = \frac{5}{3} \times \binom{5}{0} \times p^0 \times (1 - p)^5$

$\Leftrightarrow 5p(1 - p)^4 = \dfrac{5}{3}(1 - p)^5 \Leftrightarrow 5p(1 - p)^4 - \dfrac{5}{3}(1 - p)^5 = 0 \Leftrightarrow 5(1 - p)^4 \left[p - \dfrac{1}{3}(1 - p)\right] = 0$

$\Leftrightarrow 5(1 - p)^4 \left(\dfrac{4}{3}p - \dfrac{1}{3}\right) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc $p = 1$ ou $p = \frac{1}{4}$.

Dans le premier cas, $p(X = 2) = \binom{5}{2} \times p^2 \times (1 - p)^3 = 10 \times 1^2 \times 0^3 = 0$ et $p(X = 3) = 0$ de même donc on a bien $p(X = 2) = 3p(X = 3)$.

Dans le second cas, $p(X = 2) = 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}$ et $p(X = 3) = 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{1024} = \frac{45}{512}$ donc on a bien $p(X = 2) = 3p(X = 3)$. Finalement, l'égalité est $\boxed{Vraie}$

3) $E(X) = 36 \Leftrightarrow np = 36$

$\sigma(X) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{np(1 - p)} = 3 \Leftrightarrow np(1 - p) = 9$

On en déduit donc $1 - p = \frac{9}{np} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ d'où $p = \frac{3}{4}$.

De plus $np = 36$ donc $n = \frac{36}{p} = 36 \times \frac{4}{3} = 48$

$p(X = 29) \approx 0{,}01$ donc $\boxed{Vrai}$

Exercice 6

1) On a n tirages indépendants les uns des autres et à chaque tirage, on a une probabilité $\frac{1}{6}$ d'avoir un jeton noir. Le nombre N de jetons noirs suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$.

De la même manière, R suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$.

2) $E(N) = n \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{n}{6}}$ $\sigma(N) = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5n}{36}}$

$E(R) = n \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{n}{3}}$ et $\sigma(R) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2n}{9}}$

3)

a. A chaque tirage, la probabilité d'avoir un jeton noir ou rouge est $\frac{1}{2}$ donc S suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

b. $E(S) = n \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{n}{2}}$ et $\sigma(S) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{n}{4}}$

c. On remarque que $S = N + R$

$E(N+R) = E(S) = \dfrac{n}{2}$ et $E(N) + E(R) = \dfrac{n}{6} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{3n}{6} = \dfrac{n}{2}$ donc $\boxed{E(N+R) = E(N) + E(R)}$

$V(N+R) = V(S) = \dfrac{n}{4}$ et $V(N) + V(R) = \dfrac{5n}{36} + \dfrac{2n}{9} = \dfrac{5n+8n}{36} = \dfrac{13n}{36}$ donc $\boxed{V(N+R) \neq V(N) + V(R)}$

<u>Partie D : Echantillonnage</u>

Exercice 1

1) Au seuil de 95% : $\frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0{,}025$ et $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

A la calculatrice, $p(X \leq 65) \approx 0{,}016$ et $p(X \leq 66) \approx 0{,}0275$ donc $a = 66$

$p(X \leq 82) \approx 0{,}96$ et $p(X \leq 83) \approx 0{,}978$ donc $b = 83$

Nous avons donc $p(66 \leq X \leq 83) \geq 0{,}95$ et donc $p(0{,}66 \leq f \leq 0{,}83) \geq 0{,}95$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour un échantillon de taille 100 est $\boxed{[0{,}66; 0{,}83]}$

2) $0{,}64 \notin [0{,}66; 0{,}83]$ donc le directeur de marketing peut rejeter l'hypothèse que trois quarts des clients sont fidèles.

Exercice 2

1) Au seuil de 95% : $\frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0{,}025$ et $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

A la calculatrice, $p(X \leq 105) \approx 0{,}019$ et $p(X \leq 106) \approx 0{,}026$ donc $a = 106$

$p(X \leq 132) \approx 0{,}9654$ et $p(X \leq 133) \approx 0{,}9752$ donc $b = 133$.

Nous avons $p(106 \leq X \leq 133) \geq 0{,}95$ et donc $p\left(\frac{106}{200} \leq f \leq \frac{133}{200}\right) \geq 0{,}95$. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est donc $\boxed{[0{,}53; 0{,}665]}$

2) $f = \frac{104}{200} = 0{,}52$ or $f \neq [0{,}53; 0{,}665]$ donc on peut rejeter l'hypothèse que A dit vrai.

3) Au seuil de 98% : $\frac{1-0{,}98}{2} = 0{,}01$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0{,}01$ et $p(X \leq b) \geq 0{,}99$

On trouve $a = 104$ et $b = 136$. L'intervalle de fluctuation au seuil de 98% est $[0{,}52; 0{,}68]$ et cette fois, $f \in [0{,}52; 0{,}68]$ donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse que A dit vrai.

Exercice 3

Déterminons l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% des fréquences d'infections nosocomiales en France pour un échantillon de taille 19400.

On considère pour cela, la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 19400 et $\frac{18000}{360000} = 0{,}05$.

Au seuil de 95% : $\frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0{,}025$ et $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

$p(X \leq 910) \approx 0{,}0241$ et $p(X \leq 911) \approx 0{,}0261$ donc $a = 911$

$p(X \leq 1029) \approx 0{,}9742$ et $p(X \leq 1030) \approx 0{,}976$ donc $b = 1030$

On obtient donc $911 \leq X \leq 1030$ soit $\frac{911}{19400} \leq f \leq \frac{1030}{19400}$ ou encore $[0{,}0469; 0{,}0531]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

La fréquence d'infections nosocomiales dans les Pays de la Loire est de $\frac{930}{19400}$ soit environ 0,0479 qui appartient bien à l'intervalle de fluctuation. Donc on peut dire qu'il n'y a pas de différence significative entre les résultats des Pays de la Loire et les résultats nationaux.

Exercice 4

1) $\boxed{FAUX}$ Par exemple, si X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,5, nous avons $[0{,}4; 0{,}6]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 95% et $[0{,}37; 0{,}63]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 99%. Si la fréquence observée est 0,38, on rejette l'hypothèse au seuil de 95% mais on l'accepte au seuil de 99%.

2)

a. $\boxed{Vrai}$: Au seuil de 90% : $\frac{1-0,9}{2} = 0,05$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,05$ et $p(X \leq b) \geq 0,95$

Si X représente une variable aléatoire de paramètres 40 et 0,5, l'intervalle de fluctuation est $[0,375\,;0,625]$ grâce à la calculatrice car $p(X \leq 14) \approx 0,04$; $p(X \leq 15) \approx \; 0,08$; $p(X \leq 24) \approx 0,923 \; et$
$p(X \leq 25) \approx 0,96$ donc $a = 15$ et $b = 25$ et on obtient $\left[\frac{15}{40};\frac{25}{40}\right]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 90%.

b. $\boxed{Vrai}$: $\frac{26}{40} = 0,65$

Exercice 5

1) Au seuil de 95% : $\frac{1-0,95}{2} = 0,025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,025$ et $p(X \leq b) \geq 0,975$
$p(X \leq 30) \approx 0,016$ et $p(X \leq 31) \approx 0,028$ donc $a = 31$
$p(X \leq 48) \approx 0,971$ et $p(X \leq 49) \approx 0,983$ donc $b = 49$.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est donc $I = \left[\frac{31}{80};\frac{49}{80}\right]$ soit $I = [0,3875; 0,6125]$

2) $f = \frac{52}{80} = 0,65$ et $f \notin I$ donc on peut rejeter l'hypothèse que le dé est équilibré.

Exercice 6

Au seuil de 95% : $\frac{1-0,95}{2} = 0,025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,025$ et $p(X \leq b) \geq 0,975$
Pour un échantillon de taille 102, avec une probabilité théorique de 0,75 de gagner, l'intervalle de fluctuation est [;] car $p(X \leq 67) \approx 0,022$ et $p(X \leq 68) \approx 0,036$ donc $a = 68$
$p(X \leq 84) \approx 0,970$ et $p(X \leq 85) \approx 0,983$ donc $b = 85$
$68 \leq X \leq 85 \Leftrightarrow \frac{68}{102} \leq F \leq \frac{85}{102} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq F \leq \frac{5}{6}$ donc on obtient $[0,66; 0,84]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 95%.
$f = \frac{58}{102} \approx 0,57$ et $f \notin I$ donc on peut rejeter l'hypothèse que 75% des billets sont gagnants.

Exercice 7

1) Au seuil de 90% : $\frac{1-0,9}{2} = 0,05$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,05$ et $p(X \leq b) \geq 0,95$
$p(X \leq 5) \approx 0,048$ et $p(X \leq 6) \approx 0,103$ donc $a = 6$
$p(X \leq 14) \approx 0,939$ et $p(X \leq 15) \approx 0,969$ donc $b = 15$
L'intervalle de fluctuation au seuil de 90% est donc $\left[\frac{6}{50};\frac{15}{50}\right]$ soit $I = [0,12; 0,3]$
$f = 0,26 \in I$ donc il n'y a pas lieu de s'inquiéter.

2) Au seuil de 98% : : $\frac{1-0,98}{2} = 0,01$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,01$ et $p(X \leq b) \geq 0,99$
$p(X \leq 3) \approx 0,005$ et $p(X \leq 4) \approx 0,018$ donc $a = 4$
$p(X \leq 16) \approx 0,985$ et $p(X \leq 17) \approx 0,993$ donc $b = 17$
L'intervalle de fluctuation au seuil de 98% est donc $\left[\frac{4}{50};\frac{17}{50}\right]$ soit $I = [0,08; 0,34]$
$f = 0,26 \in I$ donc il n'y a pas lieu de s'inquiéter.

Exercice 8

Au seuil de 95% : $\frac{1-0,95}{2} = 0,025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,025$ et $p(X \leq b) \geq 0,975$
Pour 30 lancers :
$p(X \leq 9) \approx 0,021$ et $p(X \leq 10) \approx 0,049$ donc $a = 10$
$p(X \leq 19) \approx 0,095$ et $p(X \leq 20) \approx 0,978$ donc $b = 20$
$I_{30} = \left[\frac{10}{30};\frac{20}{30}\right] \approx [0,33; 0,67]$ Comme $0,42 \in I_{30}$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la pièce n'est pas équilibrée.
Pour 100 lancers :
$p(X \leq 39) \approx 0,017$ et $p(X \leq 40) \approx 0,028$ donc $a = 40$
$p(X \leq 59) \approx 0,971$ et $p(X \leq 60) \approx 0,982$ donc $b = 60$
$I_{100} = [0,4; 0,6]$ Comme $0,42 \in I_{100}$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la pièce n'est pas équilibrée.
Pour 1000 lancers, on obtient $I_{1000} = [0,469; 0,531]$ et cette fois $0,42 \notin I_{1000}$ donc on peut rejeter l'hypothèse que la pièce est équilibrée.

Partie E : Bilan

Exercice 1

1) Les n tirages sont indépendants les uns des autres et à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $\frac{5}{9}$. Le nombre X de boules blanches suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{5}{9}$.

$$p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = \boxed{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}$$

2) A l'aide de la calculatrice : $1 - \left(\frac{4}{9}\right)^5 \approx 0{,}983$ et $1 - \left(\frac{4}{9}\right)^6 \approx 0{,}992$ donc il faut tirer au moins 6 boules pour que la probabilité d'en avoir au moins une blanche soit supérieure à 0,99.

Exercice 2

1) Le choix des n touristes est indépendant les uns des autres. Pour chacun, la probabilité de partir à l'Est est $\frac{1}{2}$ donc le nombre X de touristes qui part vers l'Est suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \boxed{\binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}}$$

2)

a. Comme n est supérieur à 3, si un touriste est seul sur un plage (et donc qu'il est heureux), il y en a au moins deux sur l'autre plage et il n'y a donc qu'un seul touriste heureux au maximum.

b. Un touriste est heureux s'il est seul sur la plage. Cela peut se produire sur la plage à l'Est (et ceci correspond à $X = 1$) ou à l'Ouest (et ceci correspond à $X = n - 1$).

$$p = p(X = 1) + p(X = n - 1) = \binom{n}{1} \times \frac{1}{2^n} + \binom{n}{n-1} \times \frac{1}{2^n} = n \times \frac{1}{2^n} + n \times \frac{1}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \boxed{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

c. Pour $n = 10$, $p = \frac{10}{2^9} = \frac{10}{512} \approx \boxed{0{,}02}$

Exercice 3

1) La pièce est équilibrée donc les tirages sont indépendants et à chaque tirage, la probabilité d'avoir pile est $\frac{1}{2}$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$; Y suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$ et Z suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$.

2) $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 252 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256} \approx \boxed{0{,}246}$

3) $p(Y = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{2^5} = \boxed{\frac{5}{16} = 0{,}3125}$

$$p(Z = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{5}{16} = 0{,}3125}$$

$p(Y = 2 \text{ et } Z = 3) = p(Y = 2) \times p(Z = 3) = \frac{25}{256} \approx \boxed{0{,}098}$ car les événements sont indépendants donc on multiplie les probabilités entre elles.

4)

a. $p(E_2) = p(Y = 2 \text{ et } Z = 3) = \boxed{\frac{25}{256}}$

b. $p(E_0) = p(Y = 0 \text{ et } Z = 5) = p(Y = 0) \times p(Z = 5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boxed{\frac{1}{1024}}$

$$p(E_1) = p(Y = 1 \text{ et } Z = 4) = p(Y = 1) \times p(Z = 4) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boxed{\frac{25}{1024}}$$

$$p(E_3) = p(Y = 3 \text{ et } Z = 2) = p(Y = 3) \times p(Z = 2) = \boxed{\frac{25}{256}}$$

$$p(E_4) = p(Y = 4 \text{ et } Z = 1) = p(Y = 4) \times p(Z = 1) = \boxed{\frac{25}{1024}}$$

$$p(E_5) = p(Y = 5 \text{ et } Z = 0) = \boxed{\frac{1}{1024}}$$

c. Pour obtenir exactement 5 piles en 10 lancers, on peut avoir obtenus entre 0 et 5 piles parmi les 5 premiers lancers et le complément à 5 piles sur les 5 derniers lancers. On a donc bien $p(X = 5) = p(E_0) + p(E_1) + \cdots + p(E_5)$. On a alors

$$\binom{10}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\sum_{k=0}^{k=5}\binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}\times\binom{5}{5-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \binom{10}{5}\times\frac{1}{2^{10}}=\sum_{k=0}^{k=5}\binom{5}{k}^2\times\frac{1}{2^{10}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\binom{10}{5}=\sum_{k=0}^{k=5}\binom{5}{k}^2}$$

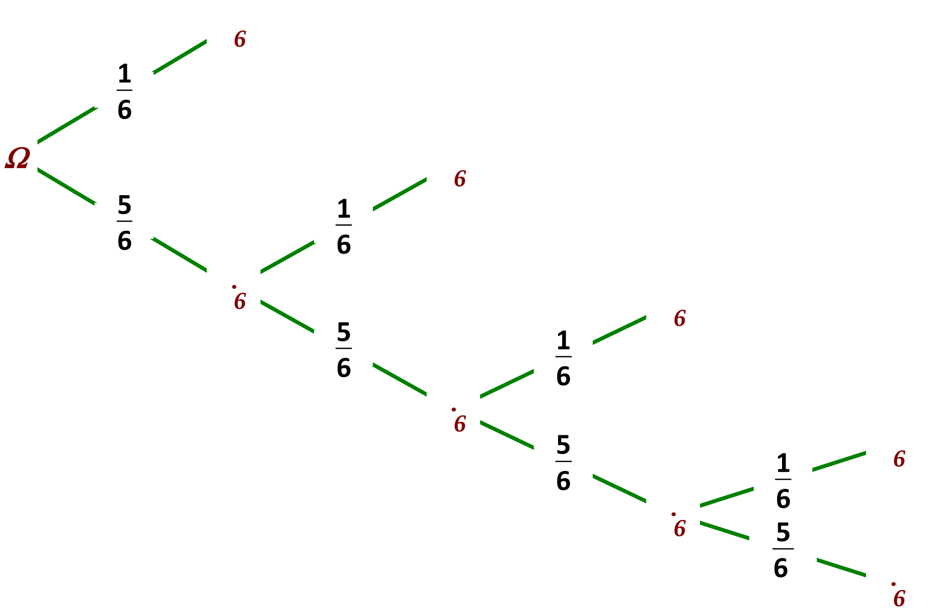
5) On lance $2n$ fois la pièce et on note X le nombre de fois où on a obtenu Pile, Y le nombre de fois où on a obtenu Pile sur les n premiers lancers et Z le nombre de fois où on a obtenu Pile sur les n derniers lancers.
X, Y et Z suivent des lois binomiales de paramètres $2n$ (respectivement n et n) et $\frac{1}{2}$.

$$p(X=n)=\sum_{k=0}^{k=n}p(Y=k \text{ et } Z=n-k)=\sum_{k=0}^{k=n}p(Y=k)\times p(Z=n-k)=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{2n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\binom{2n}{2n-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\times\sum_{k=0}^{k=n}\binom{2n}{k}^2$$

On a donc bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}}$$



Exercice 4

1)

a. Il semble que la tortue soit favorisée : elle doit obtenir quatre fois un nombre entre 1 et 5 alors que le lièvre n'a qu'un seul résultat possible.

b.

$$p_4(T)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{625}{1296}\approx 0{,}48$$

$$p_4(L)=1-p_4(T)=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}\approx 0{,}52$$

C'est donc le lièvre qui a plus de chance de gagner.

c. Grâce à l'arbre précédent, on a

x_i	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{216}$

Par exemple : $p(X=2)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$.
X ne suit donc pas une loi binomiale.

d. $E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{5}{36}+3\times\frac{25}{216}+4\times\frac{125}{216}=\frac{36}{216}+\frac{60}{216}+\frac{75}{216}+\frac{500}{216}=\frac{671}{216}\approx 3{,}1$
En moyenne, il faut donc environ 3 lancers pour obtenir un gagnant.

e. Dix parties indépendantes sont jouées. Pour chacune la probabilité que la tortue gagne est $\frac{625}{1296}$. Le nombre Y de victoires de la tortue suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{625}{1296}$.

$$p(Y=5)=\binom{10}{5}\times\left(\frac{625}{1296}\right)^5\times\left(\frac{671}{1296}\right)^5\approx\boxed{0{,}245}$$

$$p(Y\geq 2)=1-p(Y\leq 1)\approx\boxed{0{,}986}$$

2)

a. La tortue gagne si le dé donne n fois de suite un résultat autre que 6. On a donc $p_n(T)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Le jeu est favorable à la tortue si et seulement si $p_n(T)\geq p_n(L)$ or $p_n(L)=1-p_n(T)$.

On a donc : $p_n(T) \geq 1 - p_n(T) \Leftrightarrow p_n(T) \geq \frac{1}{2}$.
A la calculatrice : $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}58$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48$
Donc le jeu est favorable à la tortue pour des valeurs de n inférieures ou égales à 3

b. Comme à la question 1, Y, le nombre de parties remportées par la tortue sur n parties suit une loi binomiale de paramètres n et $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. L'espérance est donc $E(Y) = n \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Pour $n = 10$, on a $E(Y) = 10 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 1{,}6$
En moyenne, la tortue gagne 1,6 parties sur 10.