I Exercices

1 Limites sans indétermination

Calculer les limites des fonctions suivantes, et préciser lorsque la courbe représentative de f (notée $(\mathcal{C}_f)$) admet une asymptote horizontale ou verticale.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $+\infty$.
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ en $-\infty$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ en $+\infty$.
4. $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = (-x+3)^5$ en $+\infty$.
6. $f(x) = (-x+3)^5$ en $-\infty$.
7. $f(x) = (4-2x)^2$ en $+\infty$.
8. $f(x) = -5\sqrt{x^2-1}$ en $-\infty$.
9. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en 2.
10. $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{2-x}}$ en 2 par valeurs inférieures.
11. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ en 1 par valeurs inférieures.
12. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ en 1 par valeurs supérieures.
13. $f(x) = \dfrac{5}{4-x^2}$ en -2 par valeurs inférieures.
14. $f(x) = \dfrac{5}{4-x^2}$ en -2 par valeurs supérieures.

Réponses

2 Limite en l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle

Calculer les limites des fonctions suivantes, et préciser lorsque la courbe représentative de f (notée $(\mathcal{C}_f)$) admet une asymptote horizontale.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3$, en $+\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$ en $-\infty$.
3. $f(x) = x^4 + x$ en $-\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2-2}{2x+3}$ en $-\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+x^2}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \dfrac{4-2x^4}{x^2(x+1)^2}$ en $-\infty$. Aide
7. $f(x) = \dfrac{(3x+1)^2}{(2x-3)^3}$ en $+\infty$. Réponses

3 Limites indéterminées

Pour chaque limite il faut trouver la bonne méthode. C'est difficile au début, puis avec l'expérience ….

Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-3} - \sqrt{x+1}$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - 2x$.
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - 5} + 2x$.
8. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9}$.
9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 5}{4 + \sin x}$.
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 5 \cos x$.

Aide
Réponses

4 Asymptotes obliques

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4}$, et on appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
   (a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
   (b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ).
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 3}{x + 2}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe.
   (a) Déterminer des réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.
   (b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote en $-\infty$ et donner l'équation de cette asymptote.
3. On donne la fonction f définie sur $]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$.
   Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$
4. (a) Montrer que la courbe représentative de la fonction g, définie par $g(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.
   (b) Déterminer sur quel ensemble l'écart entre la courbe et l'asymptote est inférieur à un centième d'unité.

Aide
Réponses

II Aide

2 Limite en l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle

Première méthode :
Je mets le terme de plus haut degré en facteur, je simplifie dans le cas d'une fraction, puis je calcule la limite.
Deuxième méthode :
J'applique une des règles suivantes :
- La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Retour

3 Limites indéterminées

Quelques méthodes pour lever une indétermination :
- Les règles de comparaison de fonctions : inégalités, théorème des gendarmes.
  Utilisation possible : limites en l'infini d'une fonction trigo.
- L'expression conjuguée.
  Utilisation possible : limites avec des sommes ou des différences contenant des racines.
- Retour à la définition du nombre dérivé.
  Utilisation possible : limites d'un quotient en un point. (avec éventuellement des différences au numérateur et au dénominateur)
- Factorisation.
  Utilisation possible : limites en l'infini avec des racines, ou limites en un point de fractions.

Aide spécifique à chaque question :

1. Comparaison.
2. Comparaison (gendarmes).
3. Expression conjuguée.
4. Nombre dérivé.
5. Nombre dérivé ou expression conjuguée.
6. Factorisation.
7. Factorisation. Attention, si $x < 0$, $\sqrt{x^2} \neq x$.
8. Factorisation.
9. Nombre dérivé.
10. Comparaison.
11. Comparaison.

Retour

4 Asymptotes obliques

Rappel de cours :

Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- La droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ ssi

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

- La droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ ssi il existe une fonction φ telle que :

$$f(x) = ax + b + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$$

(La fonction φ représente l'écart entre la courbe et la droite.)

Même chose si je remplace $+\infty$ par $-\infty$.

Méthodes :

- Si dans le texte on me donne l'équation de l'asymptote, alors je simplifie l'expression de $f(x) - (ax + b)$, puis je calcule la limite.
- Si on ne me donne pas l'équation , j'essaie de reconnaître la forme $ax + b + \varphi(x)$.
- Pour déterminer les positions relatives, j'étudie le signe de la différence : $f(x) - (ax + b)$.

Retour

III Correction

1 Limites sans indétermination

1. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -3 = -3 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x-3 = +\infty$.

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} -6x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-6x^2+1 = -\infty$.

3. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2 = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$.
   La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

4. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x}+\dfrac{1}{x} = -\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+5) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+3)^5 = -\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+3) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+3)^5 = +\infty$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-2x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-2x)^2 = +\infty$.

8. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} -5 = -5 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1) = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5}{\sqrt{x^2-1}} = 0$.
   La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$.

9. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2} x^2 = 4 \\ \lim\limits_{x\to2} -3x = -6 \\ \lim\limits_{x\to2} + = 1 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to2} x^2-3x+1 = -1$.

10. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} -3 = -3 \\ \lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} 2-x = 0^+ \text{ donc } \lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} \sqrt{2-x} = 0^+ \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} \dfrac{-3}{\sqrt{2-x}} = -\infty$.
    La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.

Retour

11. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} 2x-3=-1 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x-1=0^-\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$.
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

12. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} 2x-3=-1 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} x-1=0^+\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$.
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

13. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} 5=5 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} 4-x^2=0^-\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} \dfrac{5}{4-x^2}=-\infty$.
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-2$.

14. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} 5=5 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} 4-x^2=0^+\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \dfrac{5}{4-x^2}=+\infty$.
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-2$.

Retour

2 Limite en l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle

1. Première méthode :
$f(x)=x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)=1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Deuxième méthode :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-2x+3=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.
2. Première méthode :
$f(x)=\dfrac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}}$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=2$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$.
Deuxième méthode :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.
Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ en $-\infty$.

Remarque : La deuxième méthode étant plus rapide, j'utiliserais dorénavant celle-ci dans les calculs. Mais attention :
- Cette méthode ne s'applique qu'en + ou - l'infini.
- Cette méthode ne s'applique p=pas lorsque l'on a des fonctions racines, trigonométriques, logarithmes ....

Retour

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 + x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.
   $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-2x^4}{x^2(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^4}{x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2 = -2$.
   $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x+1)^2}{(2x-3)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2}{8x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9}{8x} = 0$.
   $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Retour

3 Limites indéterminées

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin x \geqslant -1$, donc $x + \sin x \geqslant x - 1$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \sin x = +\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc si $x > 0$, on a : $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.
3. Pour tout $x > 1$, $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+1} = \dfrac{(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{(x-3)-(x+1)}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{-4}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-3}+\sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}} = 0$
4. Rappel : si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
   La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable en 0 et sa dérivée est : $x \mapsto -\sin x$,
   donc : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x-1} = -\sin 0 = 0$.
5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable en 0 et sa dérivée est : $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$,
   $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{0+1}}{x-0} = \dfrac{1}{2\sqrt{0+1}} = \dfrac{1}{2}$.
6. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2-1} - 2x = \sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} - 2x = \sqrt{x^2}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} - 2x = x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} - 2\right)$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} - 2\right) = -1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x = -\infty$.

7. Ici x est négatif, donc $\sqrt{x^2} = -x$.
Pour $x < 0$, $\sqrt{2x^2-5}+2x = \sqrt{x^2\left(2-\dfrac{5}{x^2}\right)}+2x = -x\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}+2x = x\left(-\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}+2\right)$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}+2\right) = -\sqrt{2}+2 > 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
8. 3 annule le numérateur et le dénominateur, donc il sont tous les deux factorisables par $x-3$.
Pour tout $x \neq 3$, $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9} = \dfrac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x+1}{x+3}$.
Donc $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{7}{6}$.
9. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus , donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \cos 0 = 1$.
10. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin x \leqslant 1$, donc $4+\sin x \leqslant 5$ donc $\dfrac{1}{4+\sin x} \geqslant \dfrac{3x-5}{5}$ et $\dfrac{3x-5}{4+\sin x} \geqslant \dfrac{1}{5}$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-5}{5} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-5}{4+\sin x} = +\infty$.
11. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos x \leqslant 1$, donc $x^2 - 5\cos x \geqslant x^2-5$, or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-5 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 5\cos x = +\infty$.

Retour

4 Asymptotes obliques

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$,
$f(x) - (2x-1) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 8x + 7 - (2x-1)(x^2-4)}{x^2-4} = \dfrac{3}{x^2-4}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-1)) = 0$ et la droite (Δ) d'équation $y = 2x-1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
(b) J'étudie le signe de $f(x) - (2x-1)) = \dfrac{3}{x^2-4}$.
x^2-4 est un trinôme du second degré dont les racines sont -2 et 2.
Donc :
- $\dfrac{3}{x^2-4}$ est positif et la courbe est au dessus de son asymptote sur $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$
- $\dfrac{3}{x^2-4}$ est négatif et la courbe est en dessous de son asymptote sur $]-2;2[$.

(Les intervalles sont ouverts, car ce sont des valeurs qui annulent le dénominateur.)

2. (a) Pour tout $x \neq -2$, $ax+b+\dfrac{c}{x+2} = \dfrac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$.

   J'identifie les cœfficients du numérateur avec ceux de $\dfrac{x^2-x-3}{x+2}$, ce qui donne :

   $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-1 \\ 2b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=3 \end{cases}$, donc $f(x) = x-3+\dfrac{3}{x+2}$.

   (b) $f(x) = x-3+\dfrac{3}{x+2}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x+2} = 0$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = x-3$ comme asymptote en $-\infty$.

3. $f(x)-(x-2) = \sqrt{x^2-4x}-(x-2) = \dfrac{(\sqrt{x^2-4x}-(x-2))(\sqrt{x^2-4x}+(x-2))}{\sqrt{x^2-4x}+(x-2)} = \dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4x}+(x-2)}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{1-\dfrac{4}{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$,

   donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4x}+(x-2)} = 0$.

   Donc la droite d'équation $y = x-2$ est bien asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2} = x+\dfrac{4}{x^2}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe.

   (b) L'écart entre deux courbes est donnée par la valeur absolue de la différence, donc je résous

   $$\begin{array}{rrcl} & |f(x)-x| & \leqslant & 10^{-2} \\ \Leftrightarrow & \left|\dfrac{4}{x^2}\right| & \leqslant & 10^{-2} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{4}{x^2} & \leqslant & 10^{-2} \\ \Leftrightarrow & x^2 & \geqslant & 400 \\ \Leftrightarrow & x & \in &]-\infty;-20] \cup [20;+\infty[. \end{array}$$

Retour