Produit scalaire et plans dans l'espace

Table des matières

1 Produit scalaire **2**
1.1 Définition 2
1.2 Propriétés et orthogonalité de deux vecteurs 3

2 Orthogonalité dans l'espace **4**
2.1 Droites orthogonales 4
2.2 Droite et plan orthogonaux 4
2.3 Plans orthogonaux 5

3 Équation cartésienne d'un plan **5**
3.1 Vecteur normal 5
3.2 Équation d'un plan 6
3.3 Distance d'un point à un plan 7

-

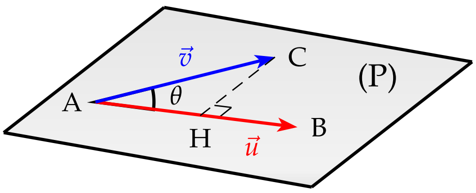
1 Produit scalaire

1.1 Définition

Définition 1 : Le produit scalaire dans le plan se généralise à l'espace.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, tel que :

- **Par le cosinus :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$
- **Par le projeté :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$
  avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
- **Par la norme :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$.
- **Par les coordonnées :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$
  avec $\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$

Démonstration : L'équivalence de ces définitions est identique à la démonstration dans le plan. En effet, on peut toujours trouver un plan (P) passant par un point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (cf 1re).



Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

Remarque : On écrira $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Le mot « scalaire » renvoie à un nombre réel en opposition au mot « vecteur ».

Pour la définition avec le cosinus, on pourra considérer l'angle $(\vec{u},\vec{v})$, comme un **angle géométrique** $\theta \in [0\,;\,\pi]$, car la fonction cosinus est paire. Cela explique la symétrie du produit scalaire. Le signe du produit scalaire est celui du $\cos\theta$

- $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ si $\theta < \dfrac{\pi}{2}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ si $\theta > \dfrac{\pi}{2}$

La définition par la norme est aussi appelée formule de **polarisation**.
Elle peut aussi s'écrire sous la forme : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$.

Exemple : Soit les vecteurs $\vec{u}(2\,;\,\sqrt{3}\,;\,1)$ et $\vec{v}(3\,;\,\sqrt{3}\,;\,2)$.

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, puis déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ au degré près.

On calcule le produit scalaire avec les coordonnées :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2\times 3 + (\sqrt{3})^2 + 1\times 2 = 11$$

On détermine l'angle en utilisant la formule avec le cosinus :

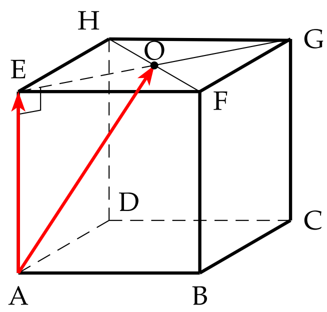
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\overrightarrow{u}, \vec{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||}$$

$$\left.\begin{array}{l} ||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ ||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{11}{2\sqrt{2}\times 4} = \frac{11}{8\sqrt{2}}$$

On a alors : $(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\dfrac{11}{8\sqrt{2}}\right) \approx 13,5° \approx 14°$

Exemple : ABCDEFGH est un cube d'arête a.
O est le centre de la face EFGH.
Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AO}$ en fonction de a
O se projette orthogonalement en E sur (AE) donc

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AO} = AE^2 = a^2$$



1.2 Propriétés et orthogonalité de deux vecteurs

Propriété 1 : Le produit scalaire est une forme :

- Symétrique : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Bilinéaire : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v}) = ab \times (\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Remarque : La bilinéarité du produit scalaire est une sorte de « distributivité ».
Symétrie et bilinéarité permettent d'écrire les « identités remarquables » suivantes :

$$(\vec{u}\pm\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \pm 2\vec{u}\cdot\vec{v} \quad \text{et} \quad (\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Que l'on peut transposer avec les normes :

$$||\vec{u}\pm\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 \pm 2\vec{u}\cdot\vec{v} \quad \text{et} \quad (\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$$

Propriété 2 : Colinéarité et orthogonalité de deux vecteurs

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens : $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemple : Soit les points A(6 ; 8 ; 2), B(4 ; 9 ; 1) et C(5 ; 7 ; 3).
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

$$\overrightarrow{AB} = (-2\,;1\,;-1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\,(-1\,;-1\,;1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2)\times(-1) + 1\times(-1) + (-1)\times 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Droites orthogonales

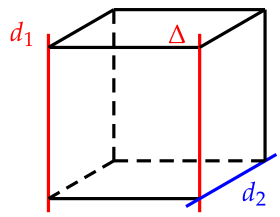
Définition 2 : Deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont :

- **orthogonales** si, et seulement si : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.
- **perpendiculaires** si et seulement si d_1 et d_2 sont orthogonales et sécantes.

Remarque : On écrit indistinctement $d_1 \perp d_2$ dans le deux cas.
Dans l'espace, on distingue droites « orthogonales » et droites « perpendiculaires ».

Dans le cube :

- les droites d_1 et d_2 sont orthogonales mais pas perpendiculaires.
- les droites Δ et d_2 sont perpendiculaires donc orthogonales.



Exemple : Soit les points A(2 ; −5 ; 1) et B(0 ; 2 ; 6).
Démontrer que la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(-4\,;\,1\,;-3)$ est orthogonale à la droite (AB)

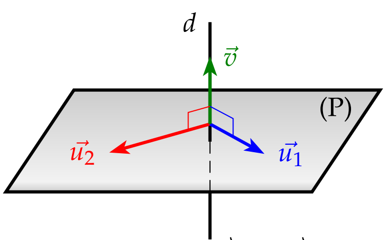
$\overrightarrow{AB}\,(-2\,;\,7\,;\,5)$ et $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = -4\times(-2)+1\times7-3\times5 = 8+7-15=0$.

$\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ donc les droites d et (AB) sont orthogonales.

2.2 Droite et plan orthogonaux

Définition 3 : Un plan (P) de vecteurs directeurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est orthogonal à une droite d de vecteur directeur $\vec{v}$ si, et seulement si, $u_1 \cdot \vec{v} = 0$ et $u_2 \cdot \vec{v} = 0$

Exemple : Soit les points A(2 ; 0 ; 2), B(4 ; 0 ; 0), C(1 ; −2 ; 1), D(−1 ; 1 ; 0) et E(1 ; −1 ; 2).
Le plan (ABC) et la droite (DE) sont-ils orthogonaux ?



On a : $\overrightarrow{AB} = (2\,;\,0\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1\,;-2\,;-1)$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forment un couple de vecteurs directeurs de plan (ABC).
On a : $\overrightarrow{DE} = (2\,;-2\,;\,2)$ donc

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = 4-4=0 \text{ et } \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = -2+4-2=0$$

$\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AC}$ donc le plan (ABC) et la droite (DE) sont orthogonaux.

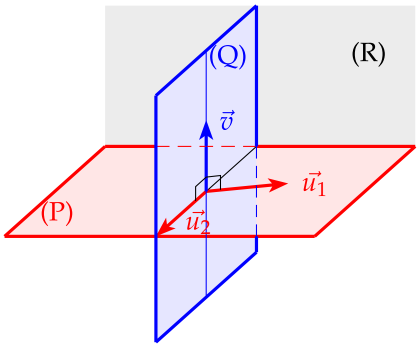
2.3 Plans orthogonaux

Définition 4 : Un plan (P) est orthogonal à un plan (Q) si, et seulement si, il existe une droite d du plan (Q) orthogonale au plan (P).

Pour que deux plans (P) et (Q) soient orthogonaux, il suffit qu'un vecteur $\vec{v}$ de (Q) soit orthogonal à un couple de vecteurs directeurs $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ de (P).

⚠ Si un plan (R) est perpendiculaire à deux plans (P) et (Q), les plans (P) et (Q) ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.

⚠ De même deux plans (P) et (Q) peuvent être orthogonaux et avoir des droites parallèles.



3 Équation cartésienne d'un plan

3.1 Vecteur normal

Définition 5 : Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan (P) si $\vec{n}$ est orthogonal à un couple de vecteurs directeur $(\vec{u}, \vec{v})$ de (P).

Remarque : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forme alors une base de l'espace.

Théorème 1 : Deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

Remarque : Méthode à privilégier pour montrer l'orthogonalité de deux plans.

Démonstration : Immédiate en se référant à la définition du vecteur normal et de la définition de l'orthogonalité de deux plans.

Théorème 2 : Le plan (P) passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Démonstration : Si $(\overrightarrow{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs directeur de (P) alors pour tout point M, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

On a alors : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{n} = a \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}_{=0} + b \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{n}}_{=0} = 0$

3.2 Équation d'un plan

Théorème 3 : Une équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } a, b, c \text{ non tous nuls}$$

Le vecteur $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ est alors un vecteur normal au plan.

Démonstration : Par une double implication.

- Soit le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$.

  Un point $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z) \in$ (P) vérifie alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a(x - x_\mathrm{A}) + b(y - y_\mathrm{A}) + c(z - z_\mathrm{A}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + cz - (ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A}) = 0 \end{aligned}$$

  On pose $d = -(ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A})$, on a alors $ax + by + cz + d = 0$

- Réciproquement, soit : $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nuls.

  On peut alors trouver un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A}\,;\,z_\mathrm{A})$ vérifiant l'équation, en effet :

  par exemple avec $a \neq 0$, si $x_\mathrm{A} = -\dfrac{d}{a}$ et $y_\mathrm{A} = z_\mathrm{A} = 0$, on a :

$$ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d = a\left(-\frac{d}{a}\right) + b \times 0 + c \times 0 + d = 0.$$

  Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant l'équation, alors $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & (1) \\ ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d = 0 & (2) \end{cases}$

  $(2) - (1)$ donne alors : $a(x - x_\mathrm{A}) + b(y - y_\mathrm{A}) + c(z - z_\mathrm{A}) = 0$

  Cette égalité traduit alors, en prenant $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$, la relation $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$.

  Cela montre que l'ensemble des points M est un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $\mathrm{A}(3\,;\,5\,;\,2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;-3\,;-1)$.

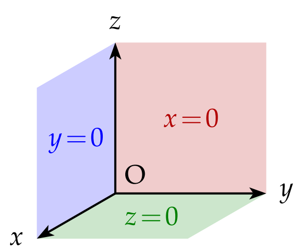
Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z) \in$ (P), on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2(x-3) - 3(y-5) - (z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; 2x - 3y - z - 6 + 15 + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - 3y - z + 11 = 0$$

Remarque : Équation des plans de coordonnées :

Plans	Oxy	Oxz	Oyz
Équations	$z = 0$	$y = 0$	$x = 0$



3.3 Distance d'un point à un plan

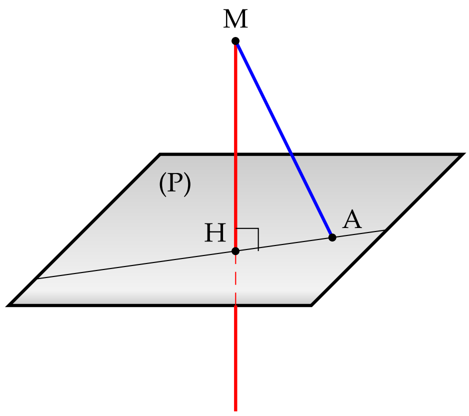
Définition 6 : Projeté orthogonal.

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d ou un plan (P) est le point d'intersection H, de la droite d ou du plan (P), et de la perpendiculaire, à cette droite ou à ce plan, passant par le point A.

Théorème 4 : Distance d'un point à un plan.

On appelle distance d'un point M au plan (P), la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur le plan (P). Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point du plan (P).

Démonstration : Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan (P) et A un point de (P) distinct de H.



La droite (MH) est orthogonale au plan (P) donc elle est orthogonale à toutes droites du plan (P) et donc à la droite (AH).

Le triangle AMH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore : $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{MH}^2$.

Comme $\mathrm{AH} \neq 0$ alors $\mathrm{AM} > \mathrm{MH}$. La distance MH est la plus courte distance de M à un point du plan (P).

Exemple : Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A(7 ; 0 ; 4) sur le plan (P) d'équation : $2x - y + 3z + 1 = 0$.
En déduire la distance du point A au plan (P).

- La droite orthogonale d à (P) passant par A a pour vecteur directeur, un vecteur normal à (P) donc $\vec{n}(2\,;-1\,;\,3)$.

  d a alors pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

  Les coordonnées de H vérifie le système de la droite d et l'équation du plan (P). En remplaçant les coordonnées de H en fonction de t dans l'équation de (P) :

  $$2(7+2t) - (-t) + 3(4+3t) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14t + 26 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -2$$

  On trouve en prenant par $t = -2$ dans d, les coordonnées du point H(3 ; 2 ; −2).

- La distance du point H au plan (P) est alors :

  $$\mathrm{AH} = \sqrt{(3-7)^2 + (2-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$