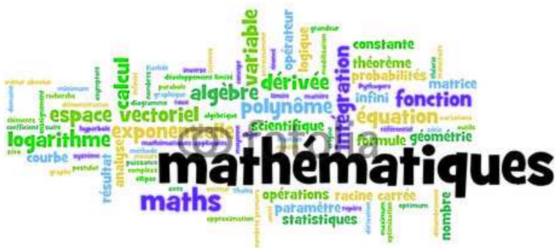
Wallis et Futuna

# Cours de MATHÉMATIQUES

— Fabien PUCCI —

Classe de Terminale S




## Enseignement obligatoire

Année 2015

# Table des matières

Chapitre

1

# Suites - Raisonnement par récurrence

L'année dernière, nous avons découvert le monde des suites et essentiellement celui des suites particulières que sont les suites arithmétiques et géométriques.

Cette année concentre ses efforts sur le comportement des suites en général et aborde la notion de convergence, c'est-à-dire leur comportement à l'infini.

Pour ce faire, nous démontrerons quelques théorème fondamentaux et découvrirons un nouveau mode de raisonnement très efficace : *le raisonnement par récurrence.*

## Sommaire

# I Démonstration par récurrence

## I.1 Un exemple pour susciter l'intérêt

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases}$.

On souhaiterait obtenir une formule permettant de calculer explicitement $u_n$ en fonction de $n$. À première vue, cette formule ne saute pas aux yeux.

Dans une telle situation, le calcul des premiers termes est souvent intéressant pour dégager une relation. Un calcul rapide donne :

$$\begin{array}{ll} u_1 = 2u_0 + 1 = 1 & (2^1 - 1) \\ u_2 = 2u_1 + 1 = 3 & (2^2 - 1) \\ u_3 = 2u_2 + 1 = 7 & (2^3 - 1) \\ u_4 = 2u_3 + 1 = 15 & (2^4 - 1) \\ u_5 = 2u_4 + 1 = 31 & (2^5 - 1) \end{array}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble obéir à une loi toute simple : les puissances successives de 2 moins 1.

Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1.$$

**ATTENTION** Une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation nécessairement vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations. [1]

Alors comment confirmer, par une démonstration, la propriété conjecturée ci-dessus ?

Notons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$.

Supposons un instant, que pour un certain entier $n$, on ait effectivement la propriété $u_n = 2^n - 1$. Alors, on aurait :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Ce qui correspond à la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ à l'ordre $n + 1$.

Autrement dit, si la propriété est vraie à un certain rang $n$ alors elle le sera également au rang suivant $n + 1$. On dit que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est **héréditaire**.

Or, on a déjà vérifié que la propriété $((\mathscr{P})_n)$ était vraie au rang 0, 1, 2, 3, 4, 5, c'est-à-dire que $((\mathscr{P})_0)$, $((\mathscr{P})_1)$, $((\mathscr{P})_2)$, ..., $((\mathscr{P})_5)$ sont vraie. On dit que la propriété $((\mathscr{P})_n)$ est **initialisée**.

Mais comme elle est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$, etc... Si bien que notre propriété est finalement vraie à tout rang $n$.

1. En gros et comme toujours : « Affirmer n'est pas démontrer ».

## I.2 Démonstration par récurrence

**Définition 1** (Axiome de récurrence)

Soit une propriété $((\mathscr{P})_n)$ définie sur $\mathbb{N}$.

- Si la propriété est initialisée à partir du rang 0 (ou $n_0$),
- et si la propriété est héréditaire à partir du rang 0 (ou $n_0$), c'est à dire que pour tout $k > 0$ (ou $k > n_0$), $(\mathscr{P})_k \implies (\mathscr{P})_{k+1}$,

Alors : la propriété est vraie à partir du rang 0 (ou $n_0$).

**Méthode 1** (Démonstration par récurrence)

Pour démontrer que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_n$ (proposition qui dépend de $n$) est vraie, il faut et il suffit :

- **(Initialisation)** Vérifier que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie [2].
- **(Hypothèse de récurrence)** Supposer que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un certain entier $k \geqslant n_0$.
- **(Propriété d'hérédité)** Démontrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie [3].
- **(Conclusion)** Pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Ce principe de récurrence va nous permettre de démontrer une inégalité importante, historiquement et pour la suite.

**ROC** (Inégalité de Bernoulli)

Soit un réel $a$ strictement positif. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1+na.$$

**Preuve:** Notons $((\mathscr{P})_n)$, la proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1+na$. et démontrons que celle-ci est vraie par récurrence.

- **Initialisation :** Pour $n=0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$, donc $(1+a)0 \geqslant 1+0\times a$. $((\mathscr{P})_0)$ est donc vraie et la propriété est initialisée.
- **Hérédité :** Supposons $((\mathscr{P})_k)$ vraie pour un certain entier $k > 0$, c'est-à-dire $(1+a)^k \geqslant 1+ka$ et montrons que, sous cette hypothèse, $((\mathscr{P})_{k+1})$ est vraie aussi, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$ :

$$\begin{aligned}
(1+a)^k &\geqslant 1+ka && \text{Hypothèse } ((\mathscr{P})_k)\\
(1+a)(1+a)^k &> (1+a)(1+ka) && \text{On multiplie par } 1+a \text{ strictement positif}\\
(1+a)^{k+1} &\geqslant 1+ka+a+ka^2 &&\\
&= 1+(k+1)a+ka^2 &&\\
&\geqslant 1+(k+1)a && ((\mathscr{P})_{k+1})
\end{aligned}$$

3. En pratique, on aura souvent $n_0 = 0$
3. Sous et seulement sous l'hypothèse $P_k$ vraie !!!

La proposition est héréditaire.

- La proposition $((\mathscr{P})_n)$ est donc initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n$ :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1+na.$$

1

**Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.

**1/** Démontrer que pour tout naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

**2/** Prouver que la suite est strictement croissante.

**ATTENTION** Les deux conditions de l'axiome (1) doivent être soigneusement vérifié. Deux exemples pour le prouver :

**Exemple 1 (Hérédité seulement vérifiée):** Soit la propriété suivante : $((\mathscr{P})_n)$ : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 3 divise $2^n$.

Si l'on suppose que 3 divise $2^n$ c'est-à-dire $((\mathscr{P})_n)$ vraie alors il existe un entier naturel $k$ tel que : $2^n = 3k$.

En multipliant par 2 : $2^{n+1} = 2\times 3k = 3(2k)$ et 3 divise donc $2^{n+1}$ et $((\mathscr{P})_{n+1})$ est alors vérifiée.

Conclusion : la proposition est héréditaire mais comme elle n'est jamais initialisée, la proposition ne peut être vraie. Heureusement car cette proposition est fausse ! Elle l'est déjà pour $n = 1$ : 3 ne divise pas 2 ! ! !

**Exemple 2 (Initialisation vérifiée jusqu'à un certain rang):** Soit la propriété $((\mathscr{P})_n)$ suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n + 41$ est un nombre premier.

L'initialisation est vérifiée car pour $n = 0$ on obtient 41 qui un nombre premier. Cependant l'hérédité n'est pas assurée bien que $((\mathscr{P})_n)$ soit vraie jusqu'à $n = 40$ [4].

Pourtant, pour $n = 41$, on a : $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ qui n'est pas un nombre premier. La propriété est donc fausse.

Conclusion : La véracité d'une proposition pour certaines valeurs au départ ne prouve pas la généralité !

## II Comportement global

Avant de s'intéresser à ce qu'il va se passer « loin », il est toujours une bonne idée de chercher à connaître le comportement global de la suite globalement et notamment voir s'il est possible de restreindre et simplifier l'étude ultérieure.

Intuitivement et en première approche, le comportement de la suite en $+\infty$ va tenir des variations de la suite. On commence donc par rappeler quelques définitions de première.

## II.1 Suites monotones

**Définition 2**

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- **constante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Attention, les suites peuvent être ni croissantes, ni décroissantes. Prenez par exemple, $u_n = (-1)^n$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$, $u_n = \tan(n)$, ...

Comparez deux termes d'une suite reste toujours aussi difficile directement. On se ramène donc encore à comparer leur différence à 0 ou leur quotient à 1 :

**Méthode 2**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2

**Exercice** Étudier le sens de variation des suites suivantes :

**1/** $u_n = n^2 - n + 2$.

**2/** $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

**3/** $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$

**4/** $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2+1)\alpha_n \end{cases}$

**5/** $\begin{cases} \gamma_0 = 2 \\ \gamma_{n+1} = -\gamma_n^2 + \gamma_n \end{cases}$

**6/** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n = \dfrac{2^n}{n}$.

**Proposition 1** (Suites définies explicitement par une fonction)

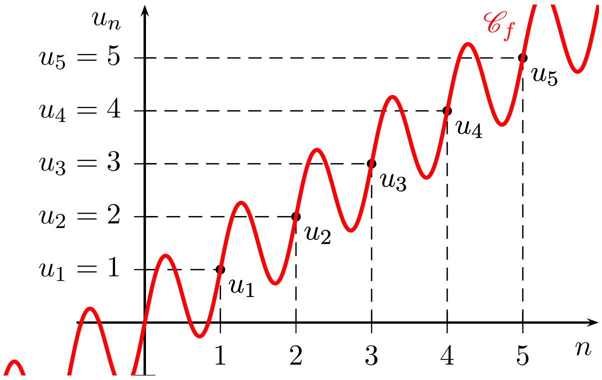
Soient $f$ une fonction définie sur $[0\,;+\infty\,[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si $f$ est croissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $f$ est décroissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

En gros, la suite a le même comportement que la fonction mais la réciproque est fausse, c'est-à-dire que la fonction n'a pas nécessairement le même comportement que la suite.

Prenons par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x + \sin(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n+\sin(2\pi n) = n$ [5]. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
- La fonction, représentée en rouge, n'est même pas monotone.




**3** **Exercice** A l'aide des fonctions associées, déterminer le sens de variations des suites suivantes :

**1/** $u_n = n^2 - 10n + 26$.

**2/** $v_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.

**3/** $w_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$.

**4/** $x_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$.

**ROC** (Suites définies par récurrence)

Soient $f$ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Si $f$ est croissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation dépend de l'ordre de ses premiers termes.

Globalement, l'idée vient de la définition d'une fonction croissante : « $f$ est croissante ssi elle conserve l'ordre ».

Si, par exemple, $u_0 > u_1$ alors $f(u_0) > f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 > u_2$ puis $u_2 = f(u_1) > u_3 = f(u_2)$, $\dots u_n = f(u_{n-1}) > u_{n+1} = f(u_n)$, ...et ainsi de suite pour tous les termes de la suite. La suite est donc décroissante dans ce cas.

**Preuve:** Cette démonstration se fait par récurrence.

Considérons une fonction quelconque $f$ croissante sur son intervalle de définition et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que ces deux premiers termes soient tels que $u_0 \leqslant u_1$. On veut donc montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Posons donc la propriété $((\mathscr{P})_n)$ : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

**Initialisation :** D'après les données, on a $u_0 \leqslant u_1$ et $((\mathscr{P})_0)$ est réalisée.

**Hérédité :** Supposons que $((\mathscr{P})_k)$ soit vraie pour un certain entier $k > 0$ et montrons que $((\mathscr{P})_{k+1})$ est vérifiée dans ce cas.

| | | |
|---|---|---|
| $u_k \leqslant u_{k+1}$ | Hypothèse de récurrence | $((\mathscr{P})_k)$ |
| $f(u_k) \leqslant f(u_{k+1})$ | $f$ est croissante donc conserve l'ordre | $\Downarrow$ |
| $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$ | Définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | $((\mathscr{P})_{k+1})$ |

5. $\sin(0\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = \sin(4\pi) = \ldots = 0$ !

La propriété $((\mathscr{P})_{k+1})$ est donc vérifiée. On a prouvé l'hérédité de la propriété.

La propriété $((\mathscr{P})_n)$, initialisée et héréditaire, est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite est croissante.

La démonstration est analogue pour une suite telle que $u_0 \leqslant u_1$ qu'on montrerait décroissante.[6]

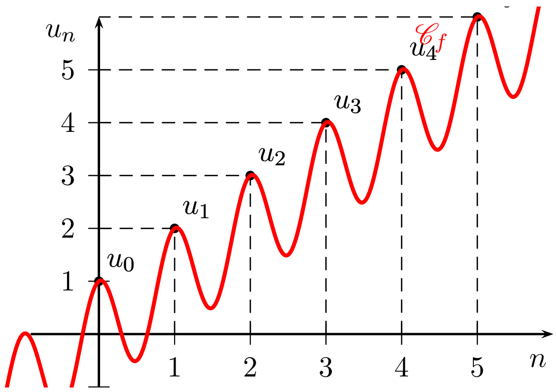
**ATTENTION**

- Ce théorème ne dit absolument rien si la fonction $f$ est décroissante.
- Ce n'est qu'une implication. On pourrait très bien avoir une suite définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ qui soit croissante sans que $f$ ne le soit.

  Considérez par exemple, la fonction définie par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$ et

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_{n+1} &= f(u_n) \\ &= u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

  Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que $u_n = n+1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pourtant, $f$ ne l'est pas le moins du monde.




**4 Exercice** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

**1/** Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{4}x + 3$, puis placer les points $A_0$, $A_1$, $A_2$ et $A_3$ d'ordonnée nulle et d'abscisse respective $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**2/** Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

## II.2 Encadrement de suites

**Définition 3** (Suites majorées, minorées, bornées…)

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe un réel $M$ tel que pour tout entier $n$, $u_n \leqslant M$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe un réel $m$ tel que pour tout entier $n$, $u_n \geqslant m$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

**5 Exercice** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ est telle que

$$1 < u_n \leqslant 2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

6. Un bon exercice !

6

**Exercice** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est bornée par l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

**Méthode 3**

Avant de se lancer, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

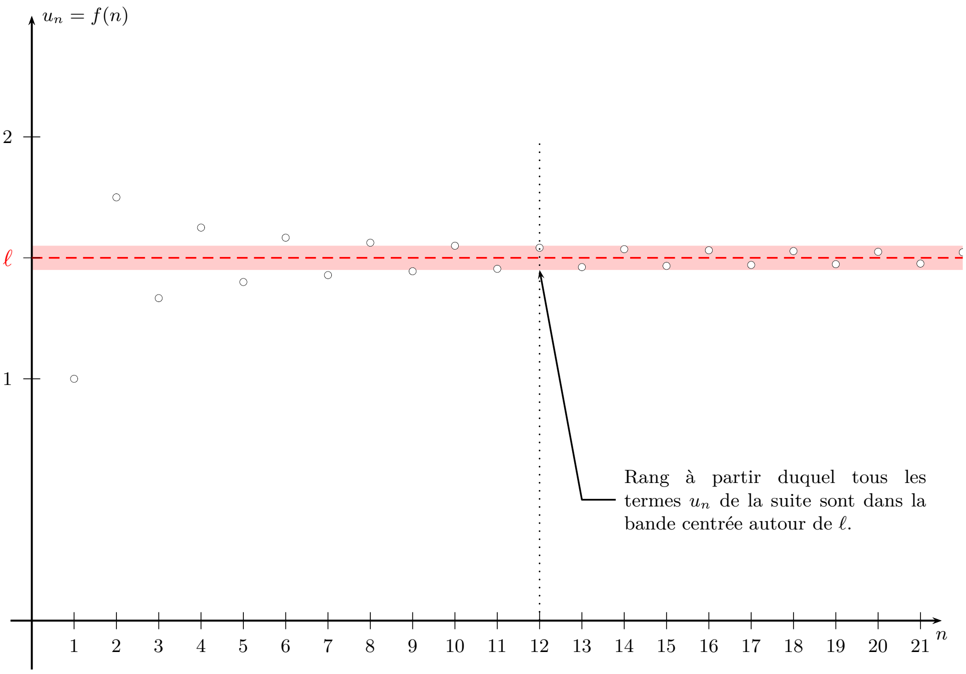
- On étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - M$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $[0\,;+\infty[$ pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, on utilisera généralement le raisonnement par récurrence pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.

# III Convergence d'une suite

On considère une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à son comportement lorsque $n \to +\infty$.

## III.1 Suites convergentes

Considérons, par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{2n}$.

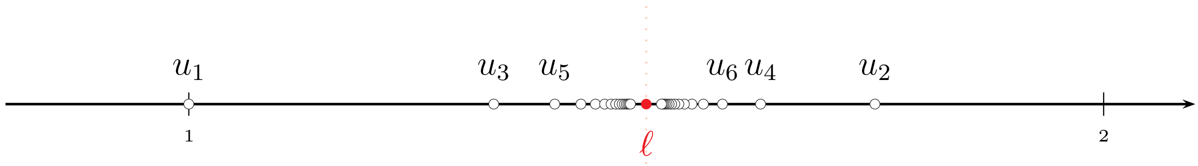


Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{2}$ : les termes de la suite, pour $n$ grand, semblent s'accumuler dans une bande de plus en pus étroite centrée en $\frac{3}{2}$. C'est ce que formalise la définition ci-dessous, la plus **importante** du chapitre :

**Définition 4**

Dire que la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers un réel** $\ell$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que $\ell$ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

En apparence absconse, cette définition, si on la regarde de plus près, traduit simplement qu'une suite convergente, vu le nombre infini de ses termes, n'a pas d'autre choix que de s'agglutiner autour de sa limite.




Les termes de la suite $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{2n}$ s'agglutine autour de $\ell = \dfrac{3}{2}$.

Quel que soit le voisinage de celle-ci, aussi petit soit-il, tous les termes, sauf un nombre fini entreront plus ou moins rapidement dans ce voisinage.

Toutefois, l'utilisation directe de cette définition n'est pas toujours commode. Heureusement, nous disposons de théorèmes (voir ci-dessous) pour prouver la convergence d'une suite dont l'emploi est bien plus aisé que cette définition. Cette dernière sera surtout utile dans la démonstration de certains théorèmes (comme le **théorème** (IV) des gendarmes par exemple).

On peut formuler la définition comme suit :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ si tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ si pour tout intervalle ouvert $I$ contenant $\ell$, il existe un entier $n_o$ tel que $n \geqslant n_o \Longrightarrow u_n \in I$.

A la manière de Newton et d'un point de vue infinitésimal, on peut encore voir cette définition de la manière suivante :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ si pour tout nombre réel strictement positif $\varepsilon$[7] (lire « epsilon »), il existe un rang $n_o$, à partir duquel, toutes les valeurs de $u_n$ sont proches de $\ell$ à $\varepsilon$ près.
- ou encore : pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_o$ tel que : si $n > n_o$, alors $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

7. aussi petit soit-il.

Enfin et à la manière des grands, une dernière écriture qui résume tous les commentaires précédents :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists\, n_o \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\; n \geqslant n_o \implies -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon.$$

**Exemple 3:** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers 0.

Tout intervalle ouvert $]a;b[$ $a$ et $b \in \mathbb{R}^*$ avec $a < b$ , contenant 0 contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang $n_0 = E\left(\max\left(\dfrac{1}{|a|}, \dfrac{1}{|b|}\right)\right) + 1$ où $E$ désigne la fonction partie entière.

**Remarques:**

- Si une suite ne converge pas elle est dite **divergente**. Autrement dit, une suite est divergente si et seulement si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite. Cette situation n'est pas aussi simple qu'elle n'y paraît. Une section est consacrée à ce type de suites.

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_n = f(n)$ avec $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$, les théorèmes sur les limites des fonctions en $+\infty$ s'appliquent.[8]

**Théorème 1**

Si une suite converge alors sa limite est unique.

Par la contraposée, « si une suite possède plusieurs limites alors elle diverge. »

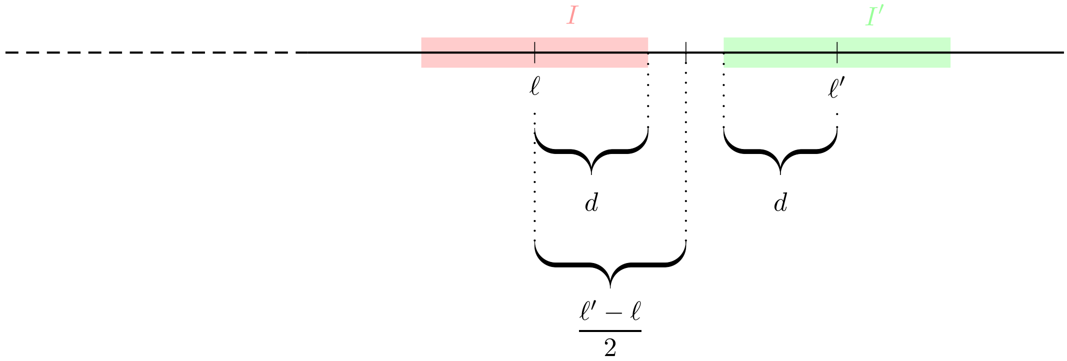
Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ qui possède deux valeurs d'adhérence 1 et $-1$ est divergente.

**Preuve:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Supposons qu'elle admette deux limites distinctes $\ell$ et $\ell'$ avec, par exemple, $\ell < \ell'$. On va montrer que ne n'est pas possible sans contradiction.

Soit $d$ un réel positif inférieur strictement à $\dfrac{\ell' - \ell}{2}$[9].

On pose $I = ]\ell - d\,;\ell + d\,[$ et $I' = ]\ell' - d\,;\ell' + d\,[$.

8. Nous verrons plus tard.




Comme $d < \dfrac{\ell'-\ell}{2}$ alors $2d < \ell' - \ell$ ou encore $d + \ell < \ell' - d$. Les deux intervalles $I$ et $I'$ sont donc disjoints et contiennent respectivement $\ell$ et $\ell'$.

Venons-en à la contradiction : Par définition, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$, l'intervalle $I$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $n_o$. Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\ell'$ donc $I'$ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $n_1$.

Finalement, si l'on prend $n$ supérieur au plus grand des deux nombres $n_o$ et $n_1$, $u_n$ devra appartenir à la fois à $I$ et $I'$, ce qui est impossible car ces intervalles sont disjoints.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc admettre deux limites distinctes et la limite d'une suite est, de ce fait, unique.

**Proposition 2**

Les suites définies pour tout entier naturel $n$ non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n}, \qquad v_n = \frac{1}{n^2}, \qquad w_n = \frac{1}{n^3}, \qquad t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ont pour limite 0.

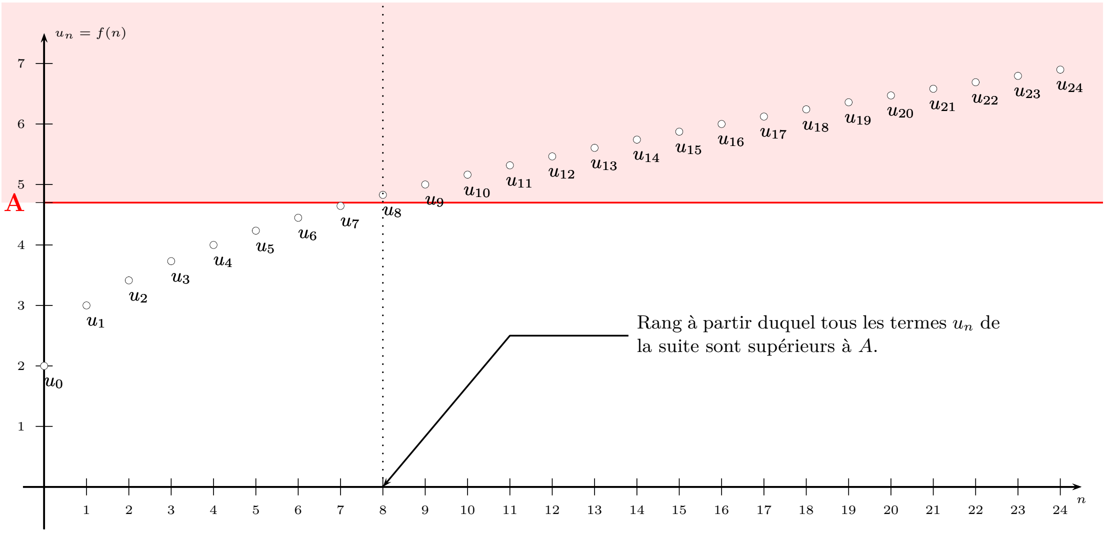
**Preuve:** Entraînez-vous !

9. La moitié de la distance entre $\ell$ et $\ell'$.

## III.2 Suites divergentes

### Suites de limite infinie

Considérons, par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sqrt{n} + 2$.




Par analogie avec une suite convergente, une suite qui diverge vers $+\infty$ doit nécessairement dépasser toute valeur de $A$, aussi grand soit-il. La définition suivante formalise cette idée :

**Définition 5**

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty\,[$ avec $A\in\mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On définit de la même façon une suite qui diverge vers $-\infty$ :

Comme les grands, cela s'écrit :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A\in\mathbb{R}, \exists\, n_o\in\mathbb{N} \,/\, \forall\, n\in\mathbb{N},\; n\geqslant n_o \implies A\leqslant u_n.$$

Vient alors un théorème simple mais important :

**ROC** (Suites monotones 1)

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

**Preuve:** On applique la **définition** (5) ainsi que celle d'une suite croissante.

Soit $A$ un nombre réel quelconque.

- Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on peut trouver un entier $p$ tel que $u_p \geqslant A$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$ d'où $u_n > A$.
- A partir du rang $p$, tous les termes de la suite sont donc dans l'intervalle $]A; +\infty[$.
- Conclusion, on est bien dans les cas d'application de la **définition** (5). D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Et pour les suites décroissantes, on a, par symétrie :

**ROC** (Suites monotones 2)

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

**Preuve:** Démonstration identique à la précédente en considérant un intervalle de la forme $]-\infty\,;A\,[$. [10]

**7**

**Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

**1/** Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2$.

**2/** En déduire la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**ATTENTION** La réciproque de ce théorème est fausse, si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante. Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

**Corollaire 1**

Les suites définies pour tout entier naturel par :

$$u_n = n, \qquad v_n = n^2, \qquad w_n = n^3, \qquad t_n = \sqrt{n}$$

ont pour limite $+\infty$.

10. Un bon exercice à montrer au gentil professeur !

### III.3 Suites arithmétiques

**Théorème 11**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $r$.

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite diverge vers $+\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. La suite diverge vers $-\infty$.
- Si $r = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$. La suite est constante.

**Preuve:** C'est relativement simple avec les propriétés précédentes. Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle n'est pas majorée et appliqué le ROC (III.2).

Supposons, par l'absurde, que $M \in \mathbb{R}$ soit un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n$ entier, on aurait $u_n \leqslant M$, c'est-à-dire $u_0 + nr \leqslant M$.

Or, tout entier $n_o$ tel que $n_o > \dfrac{M - u_0}{r}$ contredit cette inégalité. La suite ne peut donc être majorée.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante et non majorée, est donc divergente vers $+\infty$.

Les autres cas se montrent de manière analogue.

Une suite arithmétique est donc, dans les cas non dégénéré, divergente vers $\pm\infty$.

#### Suites qui n'ont pas de limite

**ATTENTION** S'il est correct de dire qu'une suite non convergente est divergente, il est cependant **faux** de penser qu'une suite divergente s'envole nécessairement vers l'infini [11]. En effet, il existe des suites qui n'ont pas de limite. Elles sont, elles aussi, appelées suites divergentes.

**Exemple 4:** Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \sin n$ sont divergentes sans pour autant diverger vers l'infini.

## IV Opérations sur les limites

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitives et parfaitement déterminées. D'autres opérations mènent à des formes dites « indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.

Pour ce faire, il faudra alors user de différentes méthodes et techniques pour transformer l'écriture de la suite et « lever l'indétermination ». Notamment, factoriser une somme, développer un produit, séparer une fraction en éléments simples ou multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée. Nous verrons cela.

11. et au-delà !

## IV.1 Suites explicites

**Proposition 3**

Soit $f$ une fonction définie sur $[0\,;+\infty\,[$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$

**1/** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

**2/** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Preuve:** Un peu plus tard dans l'année.... Il nous faudra d'abord parler d'un peu de topologie et de limite de fonctions

La proposition signifie simplement que le comportement des suites définies de manière explicite est exactement le même que celui des fonctions qui les définissent.

**Exemple 5:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+5}$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à l'aide de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{2x+5}$.

$$\frac{3x+1}{2x+5} = \frac{3x\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)}{2x\left(1+\dfrac{5}{2x}\right)} = \frac{3}{2} \times \frac{1+\dfrac{1}{3x}}{1+\dfrac{5}{2x}}.$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

En appliquant la proposition précédente, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.
- $\dots$

## IV.2 Cas général

Les théorèmes suivants sont admis. Il est assez intuitif de penser que la limite de la somme, du produit ou du quotient est la somme, le produit ou le quotient des limites et cela a déjà été montré dans le cas des suites convergentes.

Seuls 4 cas à bien identifier représentent des formes indéterminées. Il faudra alors soit essayer de changer la forme de la suite, soit utiliser le théorème de comparaison ou des gendarmes, soit le théorème sur les suites monotones (voir plus loin) pour pouvoir conclure [12].

12. Dans tous les cas, réfléchir avant d'affirmer.

### Limite d'une somme

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme Indéter. |

**Exemple 6:** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2+\dfrac{4}{\sqrt{n}}$, converge vers 2.

En effet $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0+2 = 2$.

8 **Exercice** Déterminer les limites des suites suivantes :

**1/** $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = 3n+1+\dfrac{2}{n}$.

**2/** $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 5 - \dfrac{1}{n}$.

**3/** $\forall\, n\in\mathbb{N},\ w_n = n^2-n+2$.

### Limite d'un produit

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\ell$ | $\ell\neq 0$ | $0$ | $\infty$ |
| Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\ell'$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| alors $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\ell\times\ell'$ | $\infty$ [13] | Forme Indéter. | $\infty$ [13] |

9 **Exercice** Déterminer les limites des suites suivantes :

**1/** $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n = n^2-n+2$.

**2/** $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n}(3n^2-7)$.

**3/** $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n = (2-n)\times 3^n$.

**4/** $\forall\, n\in\mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{n+1}\times(n^2+3)$.

### Limite d'un quotient

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\ell$ | $\ell\neq 0$ | $0$ | $\ell$ | $\infty$ | $\infty$ |
| Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\ell'\neq 0$ | $0$ [14] | $0$ | $\infty$ | $\ell'$ | $\infty$ |
| alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | $\infty$ [13] | Forme Indéter. | $0$ | $\infty$ [13] | Forme Indéter. |

10 **Exercice** Déterminer les limites des suites suivantes :

13. Appliquer la règle des signes d'un produit.
14. Signe constant.

**1/** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5}{2n^2+1}$.

**2/** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+7}}$.

**3/** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1-n}{0,5^n}$.

**4/** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{n^2+3}{n+1}$.

**5/** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{5n^2-3}{n^2+n+1}$.

**6/** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{0,6^n}{0,2^n}$.

### Synthèse

En prenant la convention que chaque fois que l'on verra $\infty$, la règle des signes s'applique, on peut résumer tous les résultats précédents dans le tableaux ci-dessous :

| Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $0$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $0$ | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $0$ | $\ell'$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $0$ | $\ell+\ell'$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme Indéter. |
| alors $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $0$ | $\ell\times\ell'$ | $\infty$ | $\infty$ | Forme Indéter. | Forme Indéter. | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | Forme Indéter. | $\dfrac{\ell'}{\ell}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\infty$ | Forme Indéter. | Forme Indéter. | Forme Indéter. |

## V Théorèmes fondamentaux

**Théorème III** (Théorème de comparaison)

- Si $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**Preuve:** Soit $A$ un réel quelconque.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier $n_0$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $v_n \in ]A\,;+\infty\,[$.

Or, $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang $p$ donc si $n \geqslant \max(n_0, p)$ alors $u_n \in ]A\,;+\infty\,[$.

On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**11** **Exercice** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = n + \sin n$ diverge vers $+\infty$.

**12** **Exercice** Même question avec la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

**Théorème N** (dit « des gendarmes »)

Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on ait

$$w_n \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même réel $\ell$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.

**Preuve:** **(Hors-programme [15])**

Soit $I$ un intervalle ouvert contenant $\ell$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$. Il existe donc un rang $n_0$ à partir duquel tous les termes $w_n \in I$.

De même pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe un rang $n_1$ à partir duquel tous les termes $v_n \in I$.

On a donc pour $n$ tel que $N \geqslant max(n_0, n_1, p)$ tous les $v_n$ et tous les termes $w_n$ sont dans l'intervalle $I$.

Or, pour tout $n \geqslant N \geqslant p$ on a $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ d'où à partir du rang $N$ tous les termes $u_n \in I$.

D'après la définition de la convergence d'une suite on peut dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.

**13** **Exercice** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ est convergente.

**14** **Exercice** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

**Correction:** Pour tout entier non nul, on a :

$$\begin{array}{rcl}
-1 \leqslant & (-1)^n & \leqslant 1 \\
-\dfrac{1}{n} \leqslant & \dfrac{(-1)^n}{n} & \leqslant \dfrac{1}{n} \\
2 - \dfrac{1}{n} \leqslant & 2 + \dfrac{(-1)^n}{n} & \leqslant 2 + \dfrac{1}{n} \\
2 - \dfrac{1}{n} \leqslant & u_n & \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}.
\end{array}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

**15** **Exercice** On considère la suite définie à la partie (III.1) sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{2n}$.

Après avoir encadré $u_n$ intelligemment, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

15. Il paraît.

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left.\begin{array}{r} v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

# VI Comportement de suites particulières

## VI.1 Suites géométriques

**Théorème V**

Soit $q$ un réel.

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

**Preuve:**

- Seule la 3e assertion est exigible en terminale. Pour celle-ci on utilise l'inégalité de Bernoulli (I.2) démontrée à la partie I.2 :
$$\forall\, a > 0, \forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geqslant 1 + na.$$
Posons $q = 1 + a$. Avec $a > 0$, on a bien $q > 1$ et l'inégalité devient
$$q^n \geqslant 1 + na.$$
Comme $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$. Puis, d'après le théorème de comparaison on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$$
- Pour la première assertion, il suffit de poser $Q = \dfrac{1}{|q|}$. Comme $-1 < q < 1$ alors $Q > 1$. D'après la démonstration précédente, la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $+\infty$. D'après les relations sur les quotient de limites, la suite $\left(\dfrac{1}{Q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0 et le résultat est prouvé.
- La deuxième assertion est évidente.
- Enfin et malheureusement, la dernière assertion est hors de notre portée. Lorsqu'on saura ce que cela veut dire, il suffira de montrer que dans ce cas, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$.

**Exemple 7:** Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

$$\text{D'où, } \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + + \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q$ alors $u_n = u_o q^n$. Le théorème précédent permet donc de trouver sa limite.

**Corollaire 1** (Limite d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison $q$ non nulle.
Pour tout entier $n$ : $u_n = u_0 \times q^n$

- Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & si \quad u_0 > 0, \\ -\infty & si \quad u_0 < 0. \end{cases}$
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

## VI.2 Théorème de convergence monotone

Commençons par un théorème logique... mais à montrer quand même :

**Proposition 4**

Si une suite croissante a pour limite $\ell$, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à $\ell$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell.$$

**Preuve:** Raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite croissante convergeant vers $\ell$, qu'il existe un entier $k$ tel que $u_k \geqslant \ell$ et montrons qu'il y a contradiction.

Comme la suite est croissante, pour tout $n$ tel que $n \geqslant$k, $u_n \geqslant u_k \geqslant \ell$. Notons $d$ la distance entre $\ell$ et $u_k$.

L'intervalle $]\ell - d\,;\ell + d\,[$ contient $\ell$ pas pas les $u_n$ pour $n \geqslant k$, ce qui contredit la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\ell$.

**ROC** (Suites monotones 3)

- **Une suite croissante et majorée est convergente.**
- Une suite décroissante et minorée est convergente.

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite.

**Preuve:** Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée, $\alpha \in \mathbb{R}$, un réel quelconque et notons $A$, le plus petit des majorants de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Tout intervalle $]A-\alpha; A+\alpha[$ contient au moins un terme $u_p$ de la suite. Sinon, $A-\alpha$ serait un majorant de la suite, ce qui contredit le fait que $A$ soit le plus petit des majorants.

- Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.

- L'intervalle $]A-\alpha; A+\alpha[$ contient donc tous les termes de la suite à partir du rang $p$. Ceci est vrai, quel que soit le réel $\alpha > 0$.

- D'après la **définition** (4), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et à pour limite $A$.

La démonstration est identique pour une suite décroissante et minorée.[16]

**ATTENTION** Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite $\ell$ mais ne donne pas la valeur de cette limite. On peut seulement dire que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $M$ alors $\ell \leqslant M$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $m$ alors $\ell \geqslant m$.

**16** **Exercice** Que peut-on dire de la convergence de la suite de l'**exercice** (1) ?

**17** **Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n+4} \end{cases}$.

**1/** Démontrer que pour tout naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

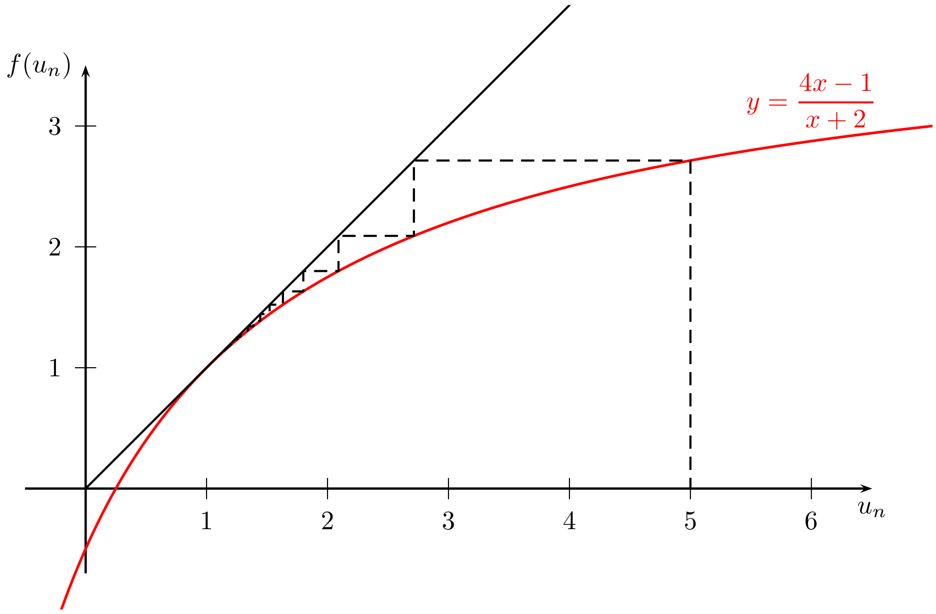
**2/** Prouver que la suite est strictement croissante.

**3/** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**18** **Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{4u_n-1}{u_n+2} \end{cases}$.

En vous inspirant du graphique ci-dessous, étudier la convergence de la suite $u_n$.

16. N'oubliez pas de toujours faire plaisir au gentil professeur.




Malheureusement [17], toutes les suites ne sont pas monotones. Dans ce cas, on tentera d'utiliser les théorème d'encadrement et de comparaison vus précédemment en V qui restent des outils extrêmement puissants.

## VI.3 Suites adjacentes

**Définition 6**

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

**Théorème VI**

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et elles ont la même limite.

17. ou heureusement. On s'ennuierait !

# Récurrence

**1** **Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.

**1/** Démontrer que pour tout naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

**2/** Prouver que la suite est strictement croissante.

**2** **Exercice** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$$

Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

**3** **Exercice** Démontrer par récurrence les propriétés ci-dessous :

**1/** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 6$, $2^n \geqslant 6n+7$.

**2/** On pose $\mathscr{S}_n = 1+2+3+\ldots+n$ où $n \geqslant 1$.

Montrer que $\mathscr{S}_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

**3/** On pose $\mathscr{S}_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ où $n \geqslant 1$.

Montrer que $\mathscr{S}_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**4/** On pose $\mathscr{S}_n = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ où $n \geqslant 1$.

Montrer que $\mathscr{S}_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

**5/** On pose $\mathscr{S}_n = 1\times 2+2\times 3+\ldots+n\times(n+1)$.

Montrer que $\mathscr{S}_n = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

**6/** On pose $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$ où $n \geqslant 1$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.

**7/** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n+2 \end{cases}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

**8/** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2^{2n}+2$ est un entier divisible par 3.

**9/** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $4^n+5$ est un multiple de 3.

**4**

**Exercice** On rappelle que la dérivée du produit $fg$ où $f$ et $g$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est donné par :

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n$ la fonction, définie pour $x \in \mathbb{R}$, par : $f_n(x) = x^n$.

Démontrer par récurrence que $f_n$ est dérivable et que pour tout réel $x$ : $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

**5**

**Exercice** Soit $n$ un entier naturel non nul, et $\mathscr{S}_n$ la somme :

$$\mathscr{S}_n = \sum_{p=1}^{n} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

**1/** Écrire un algorithme permettant de calculer $\mathscr{S}_n$ où $n$ est un entier non nul choisi par l'utilisateur.

**2/** Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathscr{S}_n = \dfrac{n}{n+1}$.

**3/** (a) Vérifier que pour tout entier $p$ non nul, $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

(b) Retrouver alors le résultat du (2) par une autre méthode [18].

**6**

**Exercice** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 1,\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$.

Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

**ATTENTION** Il faut deux termes pour initialiser cette propriété.

**7**

**Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\begin{cases} u_0 &\in\ ]0\,;1\,[ \\ u_{n+1} &= u_n(2-u_n) \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

**Remarque:** On pourra étudier les variations de la fonction $f$ définie par : $f(x) = x(2-x)$.

18. dite « par télescopage ».

# Comportement global

1

**Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

**1/** Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2/** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > n^2$.

**3/** Que peut-on dire alors sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2

**Exercice** **Suites homographiques** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la forme explicite $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3n-1}{2n+2}$.

**1/** Montrer que la suite suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**2/** Montrer que la suite suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

**3/** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

3

**Exercice (Antilles-Guyane 2012 extrait)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{array}\right.$.

**1/** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ est strictement positif.

**2/** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

**3/** Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

4

**Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2u_n+3} \end{array}\right.$.

On considère la fonction définie pour $x \in [0\,;3]$ par : $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

**1/** Calculer la dérivée de la fonction $f$. En déduire que la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;3]$ et dresser son tableau de variations. Préciser les valeurs de de la fonction aux bornes de cet intervalle.

**2/** Démontrer que : si $x \in [0\,;3]$ alors $f(x) \in [0\,;3]$.

**3/** Démontrer par récurrence, que pour tout entier $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

**4/** Démontrer par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

**5/** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**6/** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5

**Exercice** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \dfrac{5u_n-1}{u_n+3} \end{cases}$.

**1re méthode :**

**1/** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n+3}$.

**2/** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1\,;2\,]$.

**3/** Établir la relation $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n+3}$ et en déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**4/** Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite $\ell$.

**2e méthode :** On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n-1}$.

**1/** Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

**2/** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

**3/** En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

# Limite de suites

**1** **Exercice** Pour les cas suivants, préciser si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.

**1/** $u_n = \sin n$.

**2/** $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$.

**3/** $u_n = 2^n$.

**4/** $u_n = n + \cos n$.

**5/** $u_n = (-1)^n \times n^2$.

## I Suites auxiliaires

**2** **Exercice** **Suites homographiques 1**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, par :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{4u_n + 1}$$

**1/** On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Exprimer le terme général $v_n$ en fonction de $n$.

**2/** En déduire le terme général $u_n$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n$.

**3** **Exercice** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ non nul par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

**1/** Déterminer la fonction $f$ telle que $u_n = f(n)$.

**2/** Étudier le sens de variation de $f$ et en déduire celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**3/** Calculer $u_{10}$, $u_{100}$, $u_{10000}$, $u_{10^8}$ et $u_{10^{16}}$.
Que peut-on dire des valeurs de $u_n$ lorsque $n$ devient de plus en plus grand ?

**4** **Exercice** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right) u_n + \dfrac{6}{n+1} \end{cases}$.

**1/** (a) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

(b) Soit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $d_n = u_{n+1} - u_n$.

Écrire un algorithme permettant de calculer $u_n$ et $d_{n-1}$ en fonction de $n \geqslant 1$ puis remplir le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 5 | | | | | | |
| $d_n$ | | | | | | | |

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2/** On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$. Justifier que la somme des $n$ premiers termes de cette suite est égale à $n^2 + 12n$.

**3/** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

**4/** Valider la conjecture émise à la question (1b).

## II Limite d'une suite

**5**

**Exercice** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$

**1/** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

**2/** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**3/** La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.

**4/** Toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

**6**

**Exercice** Déterminer les limites des suites suivantes :

**1/** $u_n = n^2 - 3n + 5$.

**2/** $u_n = \dfrac{2n+5}{3n-2}$.

**3/** $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2-2}$.

**4/** $u_n = \dfrac{n}{4} - 2 + \dfrac{2n}{n^2+5}$.

**5/** $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1} - 3n$.

**6/** $u_n = \dfrac{2n^2-3}{n^2+n+1}$.

**7/** $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+1}{2(n+1)^2}$.

**8/** $u_n = \sqrt{n^2+3} - n$.

**9/** $u_n = \dfrac{2+3\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

**10/** $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{n+2}$.

**11/** $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n-2}$.

**7**

**Exercice** Déterminer la limite des suites suivantes à l'aide du théorème de comparaison :

**1/** $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$.

**2/** $u_n = n + 1 - \cos n$.

## III Suites monotones

**8** **Exercice** Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes en justifiant votre réponse.

**1/** Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.

**2/** Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.

**3/** Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.

**4/** Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

**9** **Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2u_n+3} \end{array}\right.$.

**1/** Démontrer que pour tout naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.

**2/** Prouver que la suite est strictement croissante.

**3/** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**10** **Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \end{array}\right.$$

**1/** (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.
(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2/** (a) Donner les valeurs exactes des quatre premiers termes de la suite.
Que peut-on conjecturer concernant l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ ?
(b) Démontrer votre conjecture par récurrence.

**3/** Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## IV Limite d'une suite géométrique

**11** **Exercice** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$.

**12** **Exercice** Soient la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_n + 3$.

**1/** (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

(b) Calculer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

**2/** On note $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

(a) Calculer $S_n$ puis $S'_n$ en fonction de $n$.

(b) En déduire les limites des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**13**

**Exercice (Centres étrangers juin 2013)** Soit la suite $u_n$ définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

On définit une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall\, n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

**1/** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

**2/** En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + 0,5^n}{n}$.

**3/** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**4/** Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + 0,5^n(1 + 0,5n)}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.[19]

**14**

**Exercice (Deux méthodes pour trouver la limite d'une suite)**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

**1re méthode :**

**1/** (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n$, $0 \leqslant u_n < 1$.

(b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante.

**2/** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $\ell$.

**3/** On admet que cette limite $\ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec $f$ définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$.

(a) Déterminer la valeur de $\ell$.

(b) Proposer un algorithme pour déterminer la valeur de $N$ tel que : $\forall\, n > N$, $|u_n - \ell| < 10^{-3}$.
Entrer cet algorithme sur votre calculatrice puis déterminer $N$.

**2e méthode :** On définit la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout entier $n$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

**1/** Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

**2/** Exprimer $v_n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.

**3/** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

19. Question qui n'a aucun intérêt ici mais bon, c'est une question de bac

# V Théorème d'encadrement

**15**

**Exercice** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$.

**1/** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$.

**2/** En déduire que $1 < u_n < 1 + \dfrac{1}{n}$ puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**16**

**Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

**1/** Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**2/** Écrire un algorithme qui donne $u_n$, $n$ étant donné. Donner alors $u_{10}$, $u_{20}$ et $u_{50}$.
Que peut-on conjecturer quant à la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**3/** Démontrer que pour $n \geqslant 1$ : $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

**4/** En déduire la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

# VI D'après bac

**17**

**Exercice (Métropole juin 2013)** Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 2, \\ u_{n+1} &= \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}.$$

**1/** (a) Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$. On pourra en donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.
(b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

**2/** (a) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_n \leqslant n+3$.
(b) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}\big(n+3-u_n\big)$.
(c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

On désigne par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

**1/** Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

**2/** En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

**3/** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n$ non nul, on pose : $S_n = Sum_{k=0}^{n} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.

**1/** Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

**2/** Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.

18

## Exercice (Antilles-Guyane juin 2014)

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2, \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n. \end{array}\right.$

**1/** (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approchées à $10^{-2}$ près :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2 | | | | | | | | |

(b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2/** (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ non nul : $u_n > \dfrac{15}{4}\times 0,5^n$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

(c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**3/** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.

(a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. On précisera son premier terme. En déduire, que pour tout entier naturel $n$, $u_n = -8\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n$.

(b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**4/** Recopier et compléter les pointillés de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de $n$ telle que $u_n < 0,01$.

Donner alors la valeur trouvée par l'algorithme.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE ... FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR ...
    u PREND_LA_VALEUR ...
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

19

## Exercice (Liban mai 2013)

On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & 1, \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n}. \end{array}\right.$

### Partie A

**1/** Écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel $n$ donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang $n$ ?

**2/** Compléter le tableau suivant pour $n = 8$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_n$ | 1 | 1,800 | 2,143 | | | | | | |

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,967 | 2,968 | 2,968 | 2,968 | 2,969 | 2,969 | 2,969 | 2,970 | 2,970 | 2,9701 |

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**3/** (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ : $0 < v_n < 3$.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

(c) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**Partie B** Recherche de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

**1/** Démontrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

**2/** En déduire l'expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n$.

**3/** Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**20**

## Exercice (Asie juin 2013)

### Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

**1/** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n > 1$.

**2/** (a) Établir que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

(b) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

### Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

**1/** On considère l'algorithme suivant :

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 9$. Les valeurs de $u$ seront arrondies à $10^{-4}$.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE POSITIF
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR 2
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR (1+0,5u)/(0,5+u)
    FIN_POUR
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

Conjecturer alors le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'infini.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | | | | | | | | | |

**2/** On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel $n$, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

(b) Calculer $v_0$ puis écrire $v_n$ en fonction de $n$.

**3/** (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $v_n \neq 1$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**21** **Exercice** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$$

**1/** Calculer $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

**2/** Résoudre l'équation du second degré suivante : $x^2 = 6x - 5$.

**3/** Déterminer deux réels $A$ et $B$ tels que : $u_n = A \times 5^n + B$.

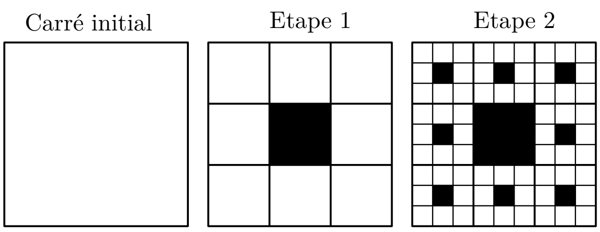
**4/** En déduire $u_{10}$.

**22** **Exercice (Le Tapis de Sierpinski)** On dispose d'un carré de côté 1.

**Etape 1 :** on partage le carré en 9 carrés identiques et on colorie le carré central ;

**Etape 2 :** les carrés restants sont à leur tour divisés en neuf carrés et on colorie le carré central ;

**Ainsi de suite** ...




On note $A_n$ l'aire coloriée à la $n^e$ étape ($n$ entier supérieur à 1).

**1/** Déterminer $A_1$ et $A_2$.

**2/** Justifier que $A_{n+1} = A_n + \dfrac{1}{9}(1 - A_n) = \dfrac{8A_n + 1}{9}$.

**3/** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $n$ entier supérieur à 1, par $u_n = A_n - 1$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

(b) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ puis celle de $A_n$.

**4/** Evaluer à l'aide de la calculatrice à quelle étape 90 % au moins de l'aire du carré initial est colorée.

Combien de carrés coloriés comporte le carré à cette étape ?

**23** **Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [1\,;3\,] \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n} \end{cases}$$

**1/** (a) Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à l'intervalle $[1\,;3\,]$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2/** On conjecture que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3, donc on étudie la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 3 - u_n.$$

(a) Vérifier que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{3}}v_n$.

(b) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}v_n$.

(c) Montrer, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$.

**3/** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Pour démontrer que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_n$ (proposition qui dépend de $n$) est vraie, il faut et il suffit :

**1/** **(Initialisation)** Vérifier que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.

**2/** **(Hypothèse de récurrence)** Supposer que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un certain entier $k \geqslant n_0$.

**3/** **(Propriété d'hérédité)** Démontrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie sous et seulement sous l'hypothèse $\mathcal{P}_k$ vraie.

**4/** **(Conclusion)** Pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ n & & u_n \end{array}$$

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante } &\iff u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \\ &\iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \text{ et } u_n \neq 0 \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée par $M \iff u_n - M \leqslant 0.$

| Définition récurrente | Définition explicite |
|---|---|
| $\begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ | $u_n = f(n)$ |
| $f$ croissante $\Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone | $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f$ ont le même comportement et les mêmes limites |

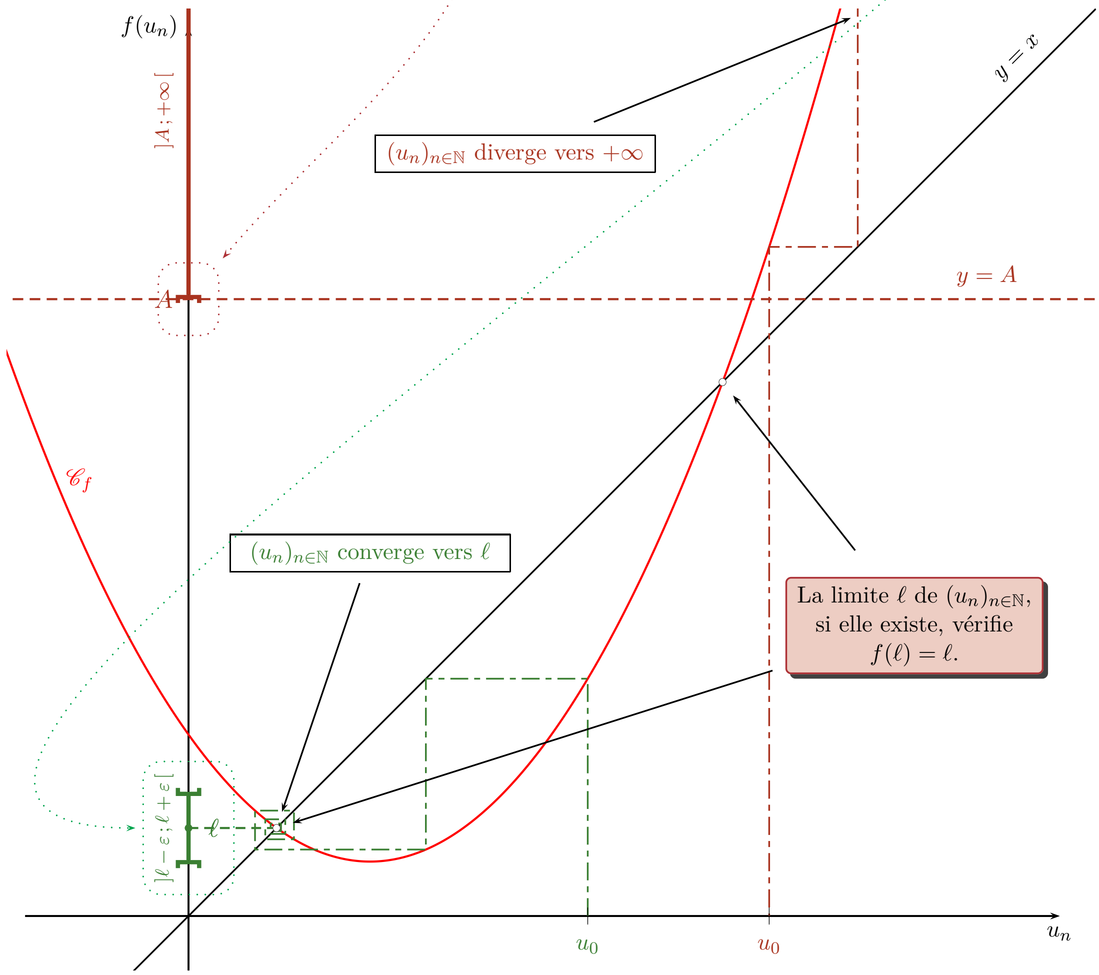
| Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $0$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $0$ | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $0$ | $\ell'$ | $\infty$ | $0$ | $\infty$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $0$ | $\ell+\ell'$ | $\infty$ | $\ell$ | $\infty$ | $\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme Indéter. |
| alors $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $0$ | $\ell\times\ell'$ | $\infty$ | $0$ | Forme Indéter. | Forme Indéter. | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | Forme Indéter. | $\frac{\ell'}{\ell}$ | $0$ | $\infty$ | $0$ | $\infty$ | Forme Indéter. | Forme Indéter. | Forme Indéter. |

| Suites arithmétiques | Suites géométriques |
|---|---|
| $u_{n+1} - u_n = r$ | $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ |
| $u_n = u_p + (n-p)r$ | $u_n = u_p q^{n-p}$ |
| $r > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$<br>$r < 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$<br>$r = 0 \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante. | $q > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty.$<br>$q \leqslant -1 \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.<br>$q = 1 \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante.<br>$-1 < q < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$ |
| $u_m + \ldots + u_n = (n-m+1)\frac{u_m+u_n}{2}$ | $u_m + \ldots + u_n = u_m\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$, si $q \neq 1$<br>$= n-m+1$, si $q = 1$. |

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes $\iff \begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

| Comportement | Caractérisation |
|---|---|
| $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ $\iff$<br><br>$\left(\implies \ell \text{ est unique.}\right)$ | Tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.<br>$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_o \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_o \implies u_n \in ]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[.$ |
| | $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang<br>et<br>$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell.$ |
| $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ? $\iff$ | $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par $M$).<br>$\left(\implies \textit{limite} \leqslant M\right)$ |
| $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ $\iff$ | Tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.<br>$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_o \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies A \leqslant u_n.$<br>$v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang<br>et<br>$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$ |
| | $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée. |

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas elle est divergente $(ie)$ limite infinie ou pas de limite.




Représentation graphique d'une suite définie par récurrence : $\begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$

# Suites

**1**

**Exercice (QCM)** Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. L'identifier et justifier la réponse.

**1/** Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et majorée par 3. Alors, nécessairement :

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 3$.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**2/** Si pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant u_n - 2 \leqslant \dfrac{1}{n}$.

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

**2**

**Exercice (Limites)** Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

**1/** $u_n = \dfrac{4n^2+3n-1}{2n+1} - 2n + 3$.

**2/** $u_n = 3 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-\dfrac{1}{4}}$.

**3**

**Exercice (ROC)**

**1/ Cours :** Donner la définition d'une suite divergent vers $+\infty$.

**2/ Restitution de connaissances :** Démontrer le théorème suivant :

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.*
*Si pour tout entier naturel supérieur à un certain entier naturel $n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*

**3/ Application :** La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$.

(a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant n^2$.

(b) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4

**Exercice (Suite homographique)** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$.

**1/** (a) Montrer que l'on peut écrire : $u_{n+1} = 2 - \dfrac{5}{u_n+4}$.

(b) Montrer par récurrence que pour tout $n$, $0 \leqslant u_n < 1$.

**2/** On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $\ell$.

(b) **Bonus** On admet que cette limite $\ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$ où $f$ est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$.
Déterminer la valeur de $\ell$.

**3/** Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ dont on déterminera le premier terme.

(b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

(c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**4/** **Bonus** On cherche à déterminer la valeur de $\mathbb{N}$ à partir de laquelle $\ell - u_n \leqslant 10^{-6}$. On propose alors l'algorithme suivant où certaines instructions ont été effacées.

(a) Recopier cet algorithme et compléter les instructions effacées.

(b) A l'aide de cet algorithme ou de votre calculatrice, donner la valeur de $N$.

(c) Que pensez-vous de la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

```
VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
U EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  N PREND_LA_VALEUR 0
  U PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE 1-U... FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR ...
    U PREND_LA_VALEUR ...
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

$\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{1}{x-8} = \infty$ *mais* $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{x-5} \neq \backsim$.

**Un professeur de mathématiques**

# Suites

1

**Exercice (QCM)** Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. L'identifier et justifier la réponse.

**1/** Pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n = \dfrac{3n+n^2}{n-1}$.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**2/** Si pour tout entier naturel $n$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$, alors :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas pour limite $+\infty$. (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

2

**Exercice (Limites)** Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

**1/** $u_n = \dfrac{n^2+5n+7}{2-n}$.

**2/** $u_n = 2 - n + (-1)^n$.

3

**Exercice (Vrai-Faux ?)** On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{2}{u_n}$.

*Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et énoncer le théorème utilisé pour la réponse indiquée. Dans le cas où la proposition est fausse, la démonstration consistera en un contre-exemple ou à donner la proposition vraie correspondante.*

**1/** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**2/** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

**3/** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**4/** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4

**Exercice (ROC)**

**1/** Soit $a$ un réel strictement positif.
Démontrer que pour tout entier $n > 1$ : $(1+a)^n > 1 + na$.

**2/** En déduire et démontrer la limite d'une suite géométrique de raison $q > 1$.

**3/** Énoncer le théorème démontré.

5

**Exercice (Suite monotone)** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

**1/** Donner les valeurs exactes de $u_1$ et $u_2$.

**2/** On définit la fonction $f$ associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$.

(a) Montrer que $f$ est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty\,[$.

(b) Montrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

**3/** (a) Montrer que : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$.

(b) En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Peut-on en déduire sa limite ?

*On demande à plusieurs scientifiques : « **Combien vaut** $\pi$ ? »*
*Le chimiste répond : « **C'est environ 3 et** $\frac{1}{7}$. »*
*Le physicien dit : « **C'est** $3,14$. »*
*Le mathématicien : « **C'est égal à** $\pi$. ».*

Chapitre

# 2 Droites et Plans de l'espace

Jusqu'ici la géométrie ne s'est faite que dans le plan (euclidien). Celui n'est, en fait, qu'un plan parmi d'autres dans l'espace. L'objectif de ce chapitre est donc de prolonger les notions de géométrie euclidienne à ce dernier.

Dans les chapitres suivants, nous verrons comment prolonger les notions vectorielles et analytiques.

## Sommaire

# I Rappels

**Rappels 1** (Règles d'incidence)

Les règles suivantes sont valables dans l'espace :

- Par deux points distincts $A$ et $B$ passe une seule droite, notée $(AB)$.
- Par trois points non alignés $A$, $B$ et $C$ passe un seul plan, noté $(ABC)$.
- Si un plan contient deux points $A$ et $B$, il contient toute la droite $(AB)$.
- Dans tout plan de l'espace, tout résultat de géométrie plane s'applique.

[ Exercices 40 à 42 page 309-310 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

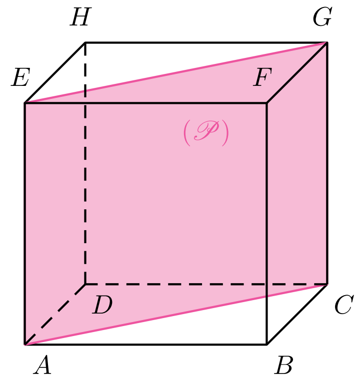
**Remarques:**

- Un plan est une « surface » plane « illimitée ». Elle est représentée en perspective par un parallélogramme.
- La dernière règle indique que, dans tout plan de l'espace, tout se passe comme dans « LE » plan de la géométrie plane. On cherchera donc très souvent à se placer dans un plan de l'espace.

**Exemple 1:**

Dans le cube ABCDEFGH le plan $(\mathscr{P})$ peut être défini, de **manière unique**, par :

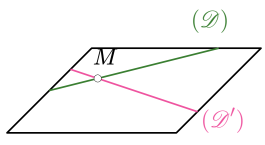
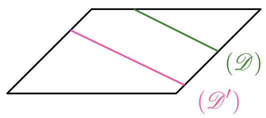
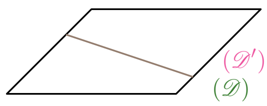
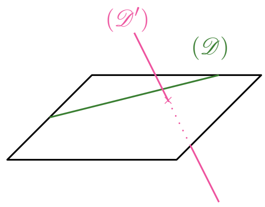
- les points $A$, $E$, $C$. Il peut être noté $(AEC)$.
- les droites $(EC)$ et $(AG)$ sécante non confondues.
- les droites $(AE)$ et $(CG)$ strictement parallèles



# II Positions relatives de droites et de plans

## II.1 Positions relatives de deux droites

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

| Droites coplanaires | | | Droites non coplanaires |
|---|---|---|---|
| Sécantes | Strictement parallèles | Confondues | |
|  Un unique point d'intersection |  Aucun point d'intersection |  Au moins 2 points d'intersection |  Il n'existe aucun plan contenant $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ |

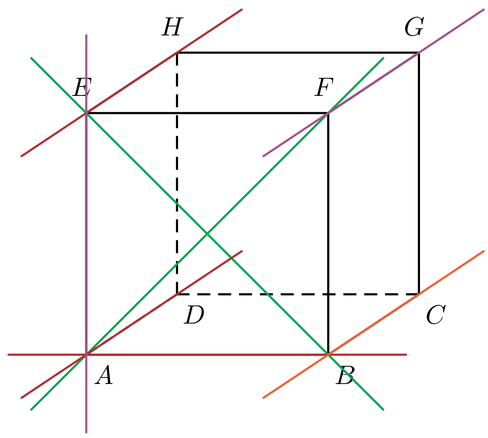
**ATTENTION**

- Dans l'espace, il existe des droites qui ne sont ni parallèles, ni sécantes.
- Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

**Exemple 2:**

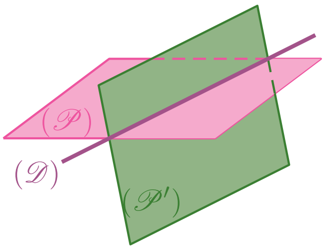
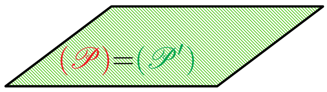
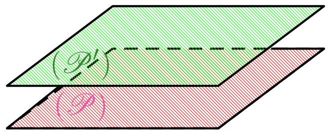
Dans le cube ABCDEFGH le plan $(\mathscr{P})$ peut être défini, de **manière unique**, par :

- les droites $(AF)$ et $(BE)$ sont coplanaires.
- les droites $(AB)$ et $(AD)$ sont sécantes.
- les droites $(BC)$ et $(EH)$ sont parallèles (strictement).
- les droites $(AE)$ et $(FG)$ ne sont pas coplanaires.



## II.2 Positions relatives de deux plans

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

| Sécants | Parallèles | |
|---|---|---|
| | Confondus | Strictement parallèles (ou disjoints) |
|   |   |   |
| L'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ est la droite $(\mathscr{D})$ | L'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ est le plan $(\mathscr{P})$ | L'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ est vide |

**Remarque:** Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite. Il suffit donc de déterminer deux points appartenant simultanément aux deux plans pour déterminer cette droite.

**Exemple 3:**

Dans le cube ABCDEFGH le plan $(\mathscr{P})$ peut être défini, de **manière unique**, par :

- les plan $(ABC)$ et $(EBC)$ sont sécants en $(BC)$ :

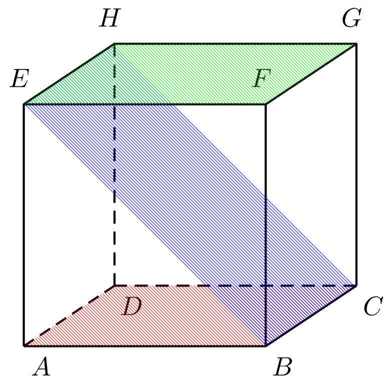
$$(ABC) \cap (EBC) = (BC)$$

- les plan $(EHG)$ et $(EBC)$ sont sécants en $(EH)$ :

$$(EHG) \cap (EBC) = (EH)$$

- les plan $(EHG)$ et $(ABC)$ sont strictement parallèles :

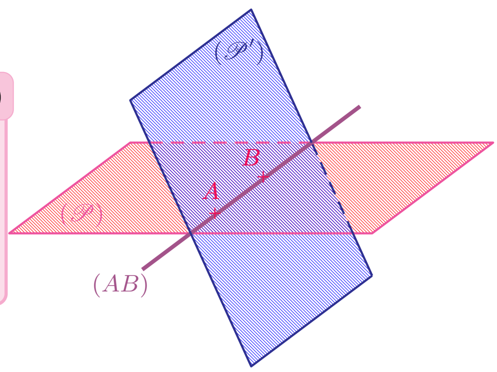
$$(EHG) \cap (ABC) = \emptyset$$




[ Exercices 13 à 16 page 307 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Méthode 1** (Déterminer l'intersection de deux plans)

Pour trouver l'intersection de deux plans sécants $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$, il suffit de trouver deux points $A$ et $B$ distincts et communs aux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.
L'intersection cherchée est alors la droite $(AB)$.



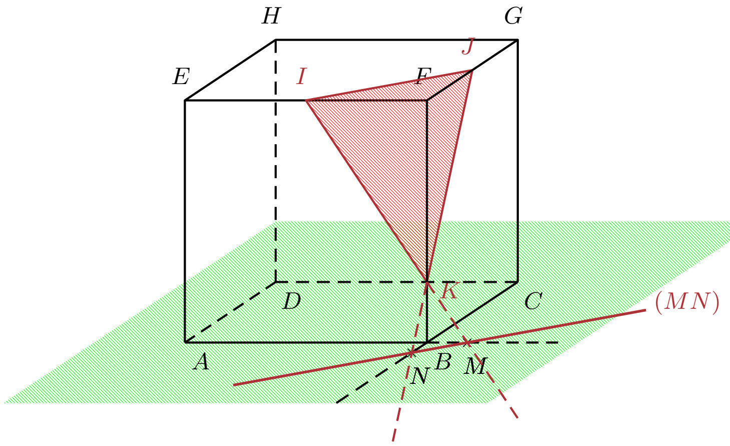
1

**Exercice** On pose un cube ABCDEFGH sur un plan $(\mathscr{P})$.

$I$ et $J$ sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[FG]$ et $K$ est le point de $[BF]$ tel que $4BK = BF$.

Construire la droite $(\Delta)$, intersection des plans $(IJK)$ et $(\mathscr{P})$.

**Correction:**




Il suffit d'appliquer la méthode :

- Les droites $(IJ)$ et $(AB)$ sont coplanaires et sécantes. Leur point d'intersection $M$ appartient à $(\mathscr{P}) = (ABC)$ et $(IJK)$ puisqu'il appartient respectivement à $(AB) \in (\mathscr{P})$ et $(IJ) \in (IJK)$.
- De la même manière $N = (JK) \cap (BC)$ appartient à $(\mathscr{P})$ et $(IJK)$.

Donc, l'intersection de $(IJK)$ et de $(\mathscr{P})$ est la droite $(MN)$.

2

**Exercice** $ABCD$ est un tétraèdre.

$E$, $F$ et $G$ sont respectivement des points des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ tels que les droites $(EF)$, $(FG)$ et $(EG)$ ne sont pas parallèles au plan $(BCD)$.

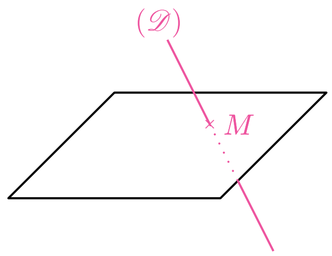
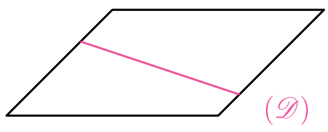
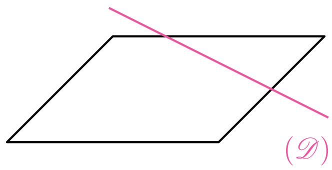
**1/** Construire la droite $(\Delta)$, intersection des plans $(EGH)$ et $(BCD)$.

**2/** Démontrer que les droites $(\Delta)$, $(BC)$ et $(EF)$ sont concourantes.

[ Applications page 285 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

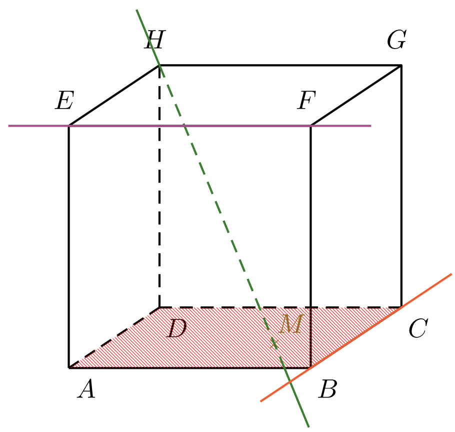
## II.3 Positions relatives d'un plan et d'une droite

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

| Sécants | Parallèles | |
|---|---|---|
|   $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D})$ ont un unique point d'intersection $M$ |   $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$ |   $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D})$ n'ont aucun point commun |

**Exemple 4:**

Dans le cube ABCDEFGH le plan $(\mathscr{P})$ peut être défini, de **manière unique**, par :




- la droite $(HM)$ et le plan $(ABC)$ sont sécants en $M$ :

$$(HM)\cap(ABC)=M$$

- la droite $(EF)$ et le plan $(ABC)$ sont parallèles :

$$(ABC)\cap(EF)=\emptyset$$

- la droite $(BC)$ est contenue dans le plan $(ABC)$ :

$$(ABC)\cap(BC)=(BC)$$

**Remarque:** Les droites $(EF)$ et $(BC)$ ne sont pas coplanaires.

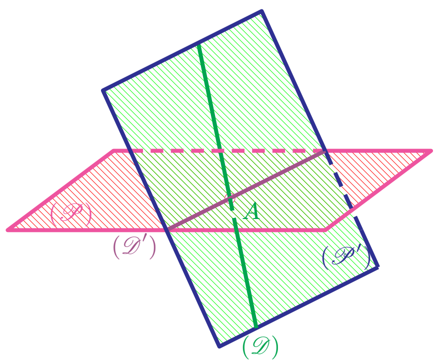
**Méthode 2** (Intersection d'une droite et d'un plan)

Pour déterminer l'intersection d'un plan $(\mathscr{P})$ et d'une droite $(\mathscr{D})$ non parallèle à $(\mathscr{P})$ :

**1/** On trouve un plan $(\mathscr{P}')$ qui contient $(\mathscr{D})$ et sécant à $(\mathscr{P})$.

**2/** On détermine la droite $(\mathscr{D}')$, intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.
(*cf méthode 1*)

**3/** Le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ est lors l'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$.

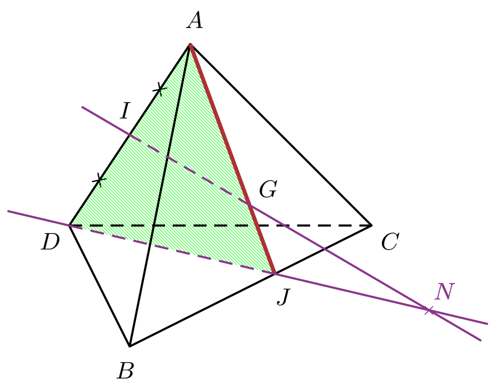


3

**Exercice** ABCD est un tétraèdre. $I$ est le milieu de l'arête $[AD]$, $G$ un point de la face $ABC$ distinct des sommets et tel que la droite $(IG)$ ne soit pas parallèle au plan $(BCD)$.

Construire le point $N$, intersection de la droite $(IG)$ et du plan $(BCD)$.

**Correction:**




Ici aussi, on applique la méthode :

**1/** Le plan $(AIG)$ ou encore $(ADG)$ contient la droite $(AI)$ et est sécant au plan $(BCD)$.

**2/** Le point $D$, par définition, appartient aux deux plans $(ADG)$ et $(BCD)$.
Posons $J$ l'intersection entre la droite $(AG)$ et la droite $(BC)$. Le point $(J)$ appartient aussi aux deux plans $(ADG)$ et $(BCD)$.
L'intersection entre les deux plans $(ADG)$ et $(BCD)$ est donc la droite $(DJ)$.

**3/** L'intersection entre le plan $(BCD)$ et la droite $(IG)$ est donc l'intersection entre les droites $(DJ)$ et $(IG)$, intersection qui existe bien car $(IG)$ n'est pas parallèle au plan $(BCD)$.

4

**Exercice** SABCD est une pyramide de sommet $S$, $M$ est un point de $[AS]$ et $N$ est un point de $[CS]$ tels que $(MN)$ n'est pas parallèle au plan $(ABC)$.

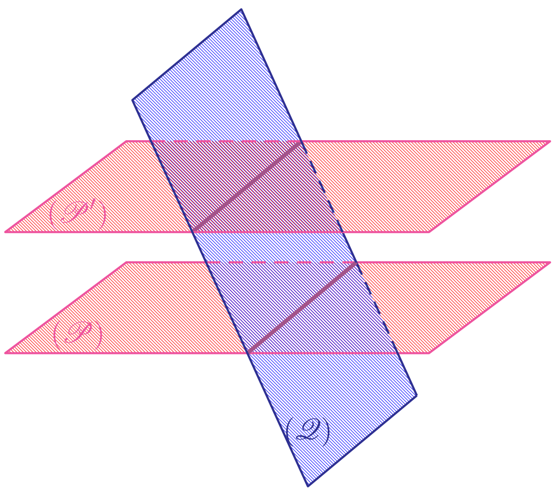
Construire, en justifiant, le point $E$, intersection de la droite $(MN)$ et du plan $(ABC)$.

# III Parallélisme

## III.1 Parallélisme entre deux plans

**Théorème 1** (Admis)

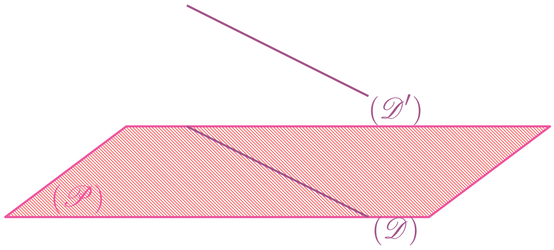
Si un plan $(\mathscr{Q})$ coupe deux plans parallèles $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ alors les droites d'intersection sont parallèles.



### III.2 Parallélisme entre droites et plans

**Proposition 1**

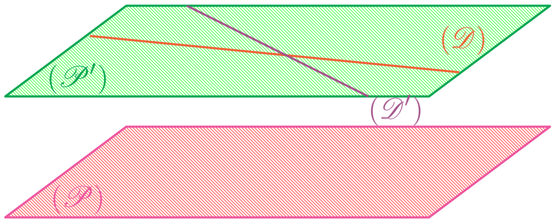
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.




$$\left.\begin{array}{r}(\mathscr{D}) \mathbin{/\!/} (\mathscr{D}') \\ (\mathscr{D}) \subset (\mathscr{P})\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad (\mathscr{D}) \mathbin{/\!/} (\mathscr{P}).$$

**Théorème II** (Admis)

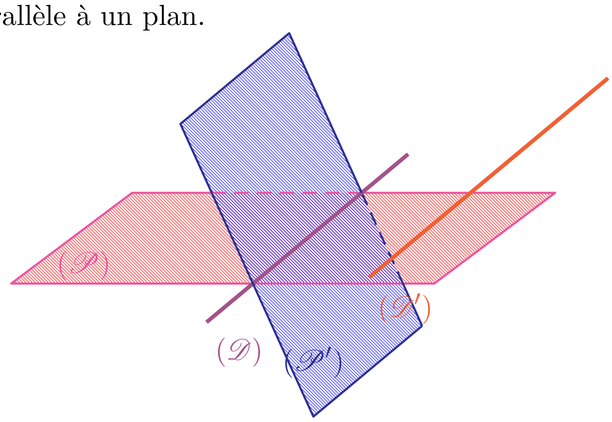
Si un plan $(\mathscr{P})$ contient deux droites sécantes $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ parallèles à un plan $(\mathscr{P}')$, alors les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles.




On remarquera que, contrairement à la proposition précédente, pour montrer que deux plans (de dimension 2) sont parallèles, il est nécessaire de disposer d'une droite supplémentaires que pour montrer qu'une droite (de dimension 1) est parallèle à un plan.

**Corollaire 1** (Admis)

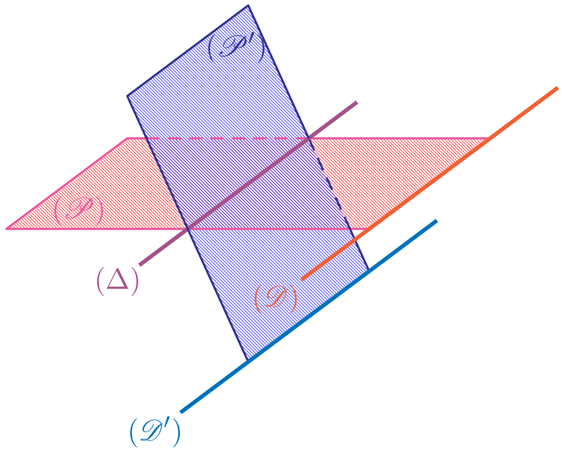
Si une droite $(\mathscr{D}')$ est parallèle à deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sécants en une droite $(\mathscr{D})$ alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles.




**Théorème III** (Théorème du toit)

Soient $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.
Si $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants en une droite $(\Delta)$, alors la droite $(\Delta)$ est parallèle à $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

$$\left.\begin{array}{r}(\mathscr{D}) \subset (\mathscr{P}) \\ (\mathscr{D}') \subset (\mathscr{P}') \\ (\mathscr{D}) \mathbin{/\!/} (\mathscr{D}')\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{avec } (\Delta) = (\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}') \\ (\mathscr{D}) \mathbin{/\!/} (\Delta) \\ (\mathscr{D}') \mathbin{/\!/} (\Delta)\end{array}\right.$$




[ Exercice résolu 3 page 302 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# IV Applications : sections d'un cube et d'un tétraèdre par un plan

Déterminer la section d'un polyèdre par un plan revient à déterminer l'intersection d'un plan avec chacune de ses faces. Un polyèdre étant constitué de faces planes, l'exercice revient alors à déterminer autant d'intersection de plans que celui-ci a de faces.

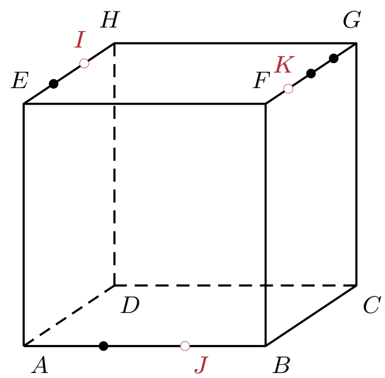
## IV.1 Section d'un cube par un plan

5

**Exercice** Soit un cube ABCDEFGH et un plan $(IJK)$ tel que :

- $I$ est un point de $[EH]$ tel que $EI = \frac{2}{3}EH$.
- $J$ est un point de $[AB]$ tel que $AJ = \frac{2}{3}AB$.
- $K$ est un point de $[FG]$ tel que $FK = \frac{1}{4}FG$.

Déterminer et construire l'intersection, lorsqu'elle existe du plan $(IJK)$ et de chaque face du cube.



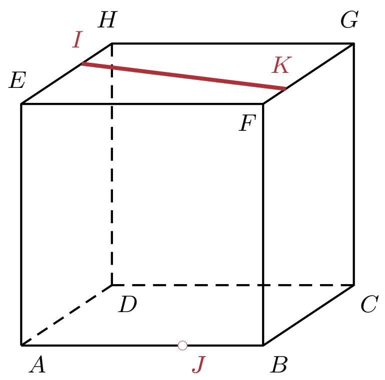
La section du cube par le plan $(IJK)$ est le polygone obtenu en reliant chacune de ces intersections.

On avance pas à pas :

- L'intersection de deux plans sécants est une droite donc l'intersection, lorsqu'elle existe, d'une face par le plan (IJK) est un segment.

- Si deux points du plan $(IJK)$ appartiennent à une face du cube, toute la droite limitée au cube délimite l'intersection entre le plan $(IJK)$ et cette face.

  L'intersection entre le plan $(IJK)$ et la face $EFGH$ est le segment $[IK]$.

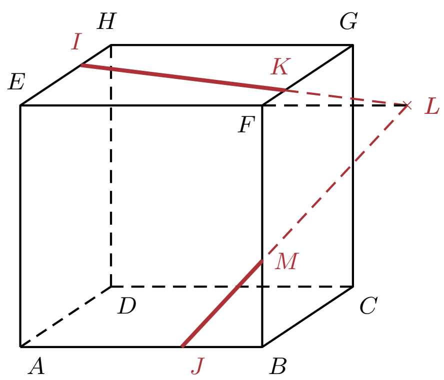



- Cherchons l'intersection de $(IJK)$ avec la face $ABFE$ :

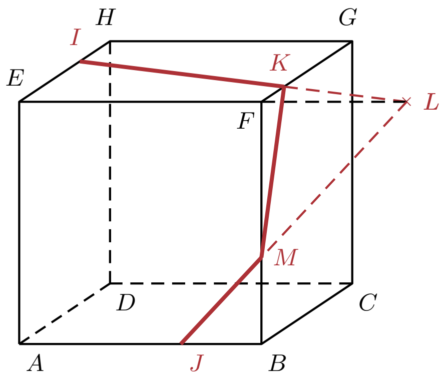
  Posons $L$, le point d'intersection entre la droite $(IK)$ et la droite $(EF)$. Par définition, $L$ appartient aux deux plans $(IJK)$ et $(ABF)$

  La droite $(JL)$ appartient alors aussi aux deux plans $(IJK)$ et $(ABF)$.

  Notons $M$ le point d'intersection entre les droites $(JL)$ et $(FB)$. Par définition, $M$ appartient aux deux plans $(IJK)$ et $(ABF)$. Le segment $[JM]$ représente l'intersection entre le plan $(IJK)$ et la face $ABFE$.




- Par construction, les points $K$ et $M$ appartiennent à l'intersection du plan $(IJK)$ et de la face $BCGF$. On trace le segment $[KM]$.




- On détermine alors successivement l'intersection avec les faces ADHE puis ABCD :

  - Soit $N = (MJ) \cap (AE)$.

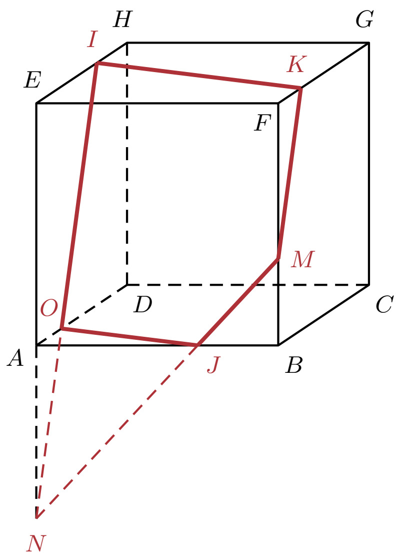
    Par construction $N \in (IJK) \cap ADHE$.

    Notons $O = (IN) \cap (AD)$.

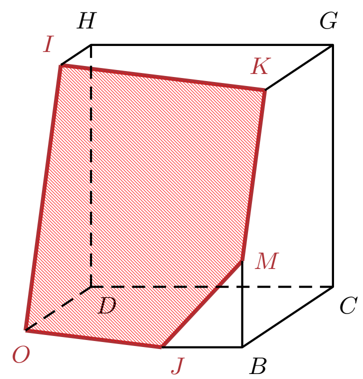
    Alors $[IO] = (IJK) \cap ADHE$.

  - $O$ et $J$ appartiennent à la face $ABCD$ et au plan $(IJK)$ par construction.

    Donc, $[OJ] = (IJK) \cap ABCD$.




Finalement, la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan $(IJK)$ est le pentagone $IKMJO$.




**Remarque:** Comme les faces $EFGH$ et $ABCD$ dont parallèles. Le plan $(IJK)$ coupe celles-ci faces en des segments parallèles. Il en est de même pour les faces $BCGH$ et $ADHE$ :

$$(IK) \mathbin{/\!/} (OJ) \quad \text{et} \quad (KM) \mathbin{/\!/} (IO).$$

[ Applications page 285 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

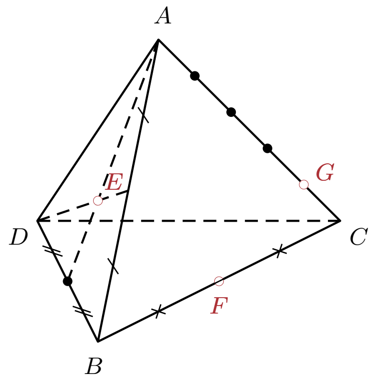
## IV.2 Section d'un tétraèdre par un plan

6

**Exercice** Soit un tétraèdre $ABCD$ et un plan $(EFG)$ tel que :

- $E$ centre de gravité du triangle $ABD$.
- $F$ est le milieu de $[BC]$.
- $G$ est un point de $[AC]$ tel que $AG = \dfrac{4}{5}AC$.

Déterminer l'intersection du plan $(EFG)$ et du tétraèdre.

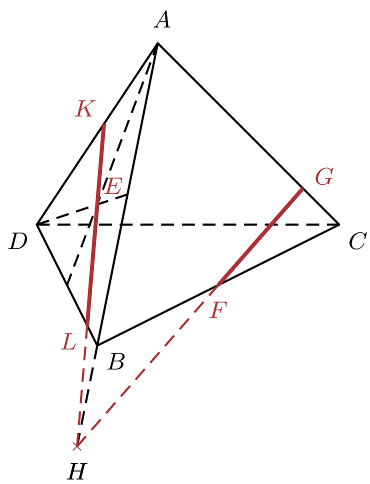



Comme précédemment, il s'agit de construire l'intersection d'un plan avec chaque face du tétraèdre :

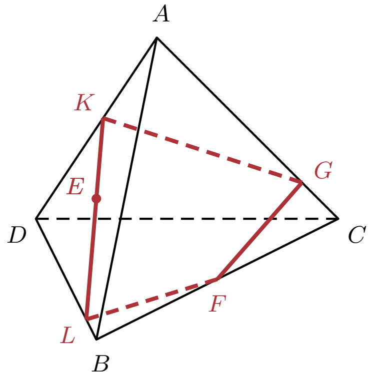
- $[FG]$ représente l'intersection de $(EGJ)$ avec la face $ABC$.
- On ne peut pas relier $E$ à $F$ ou $G$ car ces segments ne sont pas sur une face du tétraèdre.

  On cherche alors l'intersection de $(EFG)$ avec la face $ABD$. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite $(GF)$ avec la droite $(AB)$ qui contient l'arête $[AB]$ appartenant aux faces $ABC$ et $ABD$. Notons $H$ leur point d'intersection.

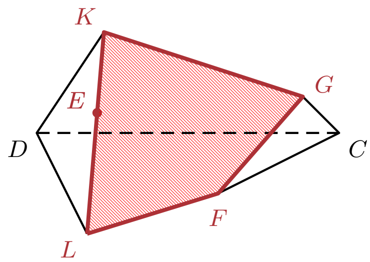
  - Comme $H \in (GF)$ alors $H \in (EFG)$.
  - Comme $H \in (AB)$ alors $H \in (ABD)$ contenant la face $ABD$
  - On trace alors la droite $(HE)$ qui coupe $[BD]$ en $L$ et $[AD]$ en K.
  - Comme $L \in (HE)$ et $K \in (HE)$ alors $K$ et $L$ appartiennent au plan $(EFG)$.
  - On trace le segment $[KL]$ qui est donc l'intersection de $(EFG)$ et de la face $ABD$.



- Il ne reste plus qu'à tracer (en pointillés car cachés) les segments $[GK]$ et $[LF]$ qui représentent les intersection respectives avec les faces $ADC$ et $BCD$.




Finalement, la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $(EFG)$ est le quadrilatère $GFLK$.




# V Orthogonalité

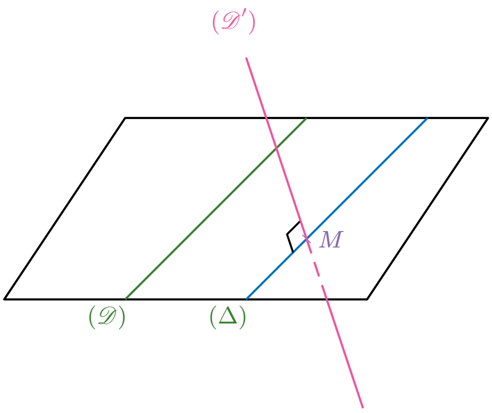
## V.1 Droites orthogonales

**Définition 1**

On dit que deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont :

- **Perpendiculaires** si, et seulement si, $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ se coupent perpendiculairement.
- **Orthogonales** si, et seulement si, il existe une droite $(\Delta)$ parallèle à $(\mathscr{D})$ qui est perpendiculaire à $(\mathscr{D}')$.

On écrira indistinctement pour deux droites perpendiculaires ou orthogonales : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$.




ATTENTION Dans l'espace, on fait une différence pour des droites entre « orthogonales » et « perpendiculaires ».

Dans l'espace, des droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et n'ont donc pas nécessairement de point d'intersection.

Tout d'abord une variante des postulats d'Euclide :

**Théorème IV**

Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

**Preuve:** Immédiate avec la définition de deux droites orthogonales.

[ Applications page 287
Exercices 25 à 26 page 308 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

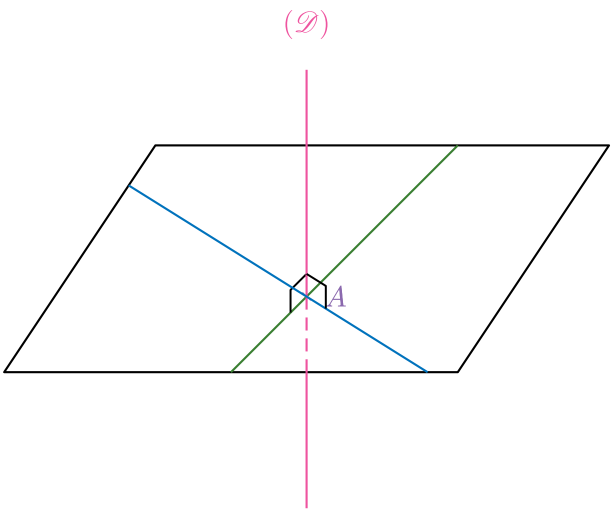
## V.2 Droites perpendiculaires à un plan

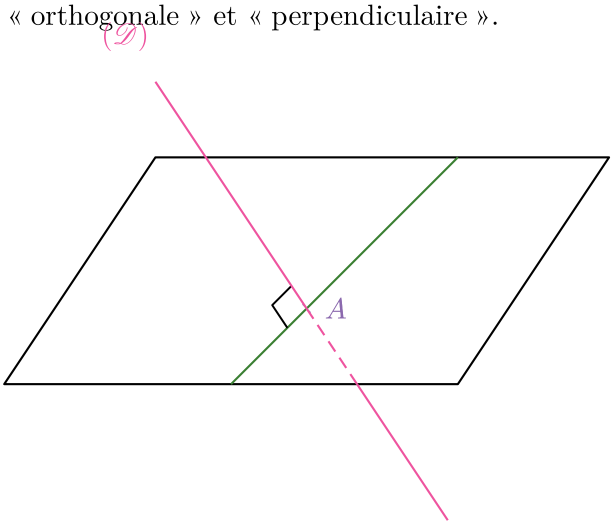
D'abord la définition : « Que faut-il démontrer pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan ? »

**Définition 2**

Une droite $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan $(\mathscr{P})$ si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de $(\mathscr{P})$ perpendiculaires à $(\mathscr{D})$.

**Remarque:** On ne fait pas de différence ici entre « orthogonale » et « perpendiculaire ».



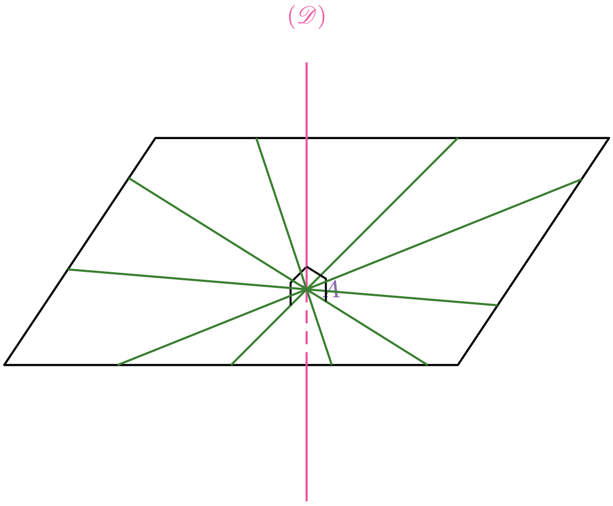




**ATTENTION** Une seule droite perpendiculaire ne suffit pas ! ! !

La réciproque maintenant : « Qu'obtient-on comme propriétés supplémentaires quand une droite est perpendiculaire à un plan ? »

**Théorème V** (Théorème de « la porte »)

Soit A le point d'intersection d'une droite $(\mathscr{D})$ et d'un plan $(\mathscr{P})$.
La droite $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire au plan $(\mathscr{P})$ si et seulement si elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan passant par $A$.




**Méthode 3** (Montrer que deux droites sont orthogonales)

Pour montrer qu'une droite $(\mathscr{D})$ est orthogonale à une droite $(\mathscr{D}')$ contenue dans un plan $(\mathscr{P})$ :

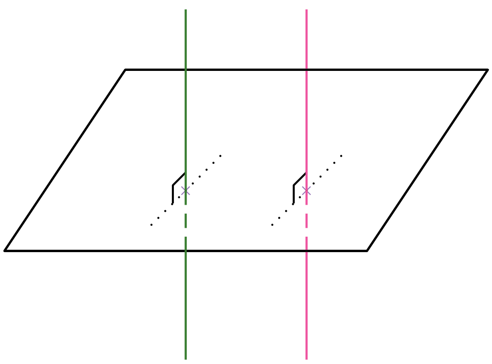
- A l'aide de deux droites sécantes de $(\mathscr{P})$ et de la **définition** (2), on montre que $(\mathscr{D})$ est orthogonale à $(\mathscr{P})$.
- A l'aide du **théorème** (V), on en déduit que $(\mathscr{D})$ est orthogonale à toutes les droites de $(\mathscr{P})$ donc à $(\mathscr{D}')$.

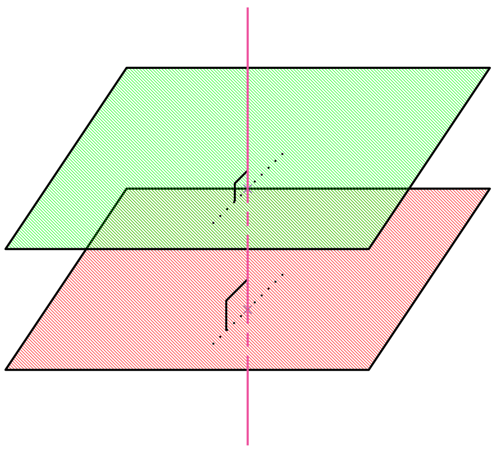
[ Exercice 43 page 310 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Enfin deux prolongements dans l'espace des postulats d'Euclide :

**Proposition 2**

- Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, ils sont parallèles.





[ Applications page 287
Exercices 25 à 26 page 308 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## V.3 Exemple

7

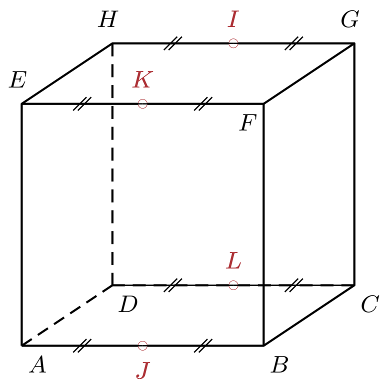
**Exercice** On considère un cube $ABCDEFGH$ dont $I$, $J$, $K$ et $L$ sont les milieux respectifs des côtés $[GH]$, $[AB]$, $[EF]$ et $[CD]$.

**1/** Justifier que $EG = GB = BD = DE$.
Peut-on en déduire que $EGBD$ est un losange ?

**2/** Démontrer que les quadrilatères $EIGK$, $GKJC$ et $EICJ$ sont des parallélogrammes.

**3/** Démontrer que $EICJ$ est un losange.

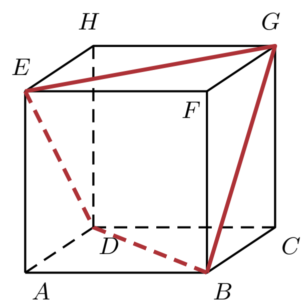
**4/** Le quadrilatère $EICJ$ est-il un carré ?




**1/** $EG = GB = BD = DE$ car ces longueurs correspondent à la longueur de la diagonale d'une face dans un cube. Ce sont toute des carrés isométriques.

$D$ n'appartient pas au plan $(EGB)$.

Donc, les points $E$, $G$, $B$ et $D$ ne sont pas coplanaires et $EGBD$ ne peut être un losange.




**2/** Comme $I$ et $K$ sont les milieux respectifs de $[GH]$ et $[EF]$, on a :

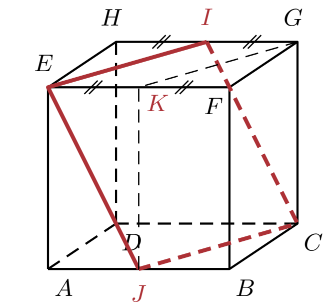
$$IG = EK \text{ et } (IG) \mathbin{/\!/} (EK) \quad \Longrightarrow \quad EIGK \text{ est un parallélogramme.} \tag{2.1}$$

Comme $K$ et $J$ sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[AB]$, on a :

$$\left.\begin{array}{c} KJ = FB = GC \\ (KJ) \mathbin{/\!/} (FB) \mathbin{/\!/} (GC) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad KJ = GC \text{ et } (KJ) \mathbin{/\!/} (GC).$$

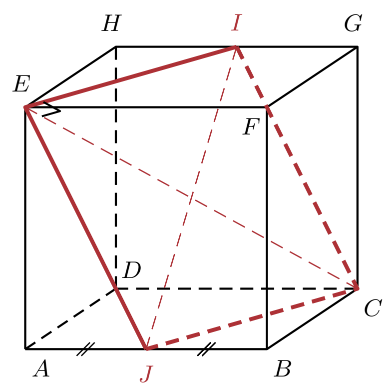
$$\text{Donc } GKJC \text{ est aussi un parallélogramme.} \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2), on en déduit successivement : $EI = GK = CJ$ puis $(EI) \mathbin{/\!/} (KG) \mathbin{/\!/} (CJ)$.
Donc $EICJ$ est un parallélogramme.




**3/** Les triangle $EHI$ et $EAJ$ sont isométriques donc $EI = EJ$, le parallélogramme $EICJ$ est un losange.

On peut ainsi en déduire que les droites $(EC)$ et $(IJ)$ sont perpendiculaires (diagonales d'un losange).




**4/** La perspective est trompeuse. On pourrait penser que les droites $(EI)$ et $(EJ)$ sont perpendiculaires. En réalité, elles ne le sont pas. Montrons par l'absurde que les droites (El) et (EJ) ne sont pas perpendiculaires.

Supposons donc que $(EJ) \perp (EI)$.

$(EH)$ est perpendiculaire au plan $(AEF)$, donc $(EH)$ est perpendiculaire à toutes droites de ce plan passant par $E$. En particulier $(EJ)$.

Comme $(EJ)$ est aussi perpendiculaire à $(EI)$ alors $(EJ)$ est perpendiculaire au plan $(HEF)$.

$(EJ)$ est donc perpendiculaire à toutes droites du plan $(HEF)$ passant par $E$, donc perpendiculaire à $(EF)$, ce qui est absurde.

Comme les droites $(EJ)$ et $(EI)$ ne sont pas perpendiculaires, $EICJ$ n'est pas un carré.

# Droites et Plans

**1**

## Exercice (Perpendicularité ou orthogonalité ?)

**1/** Dans un cube ABCDEFGH, quelle est la position relative des droites :

(a) $(AB)$ et $(CD)$ ? (b) $(CD)$ et $(CG)$ ? (c) $(AB)$ et $(CG)$ ?

**2/** Dans le cube précédent, quelles sont les autres arêtes orthogonales à $(AB)$ ?

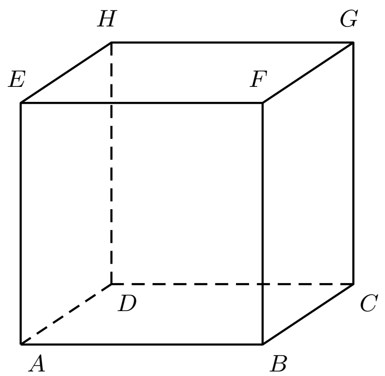
**3/** Quelle est la position relative de la droite $(AB)$ et du plan $(BCG)$ ?

**2**

## Exercice (Section plane d'un cube)

On considère un cube $ABCDEFGH$ et trois points $P$, $Q$ et $R$, distincts des sommets, tels que $P \in [CG]$, $Q \in [EH]$ et $R \in [EF]$.

On cherche à construire la section du cube par le plan $(PQR)$, c'est-à-dire où le plan $(PQR)$ coupe chacune des faces du cube.




**1/** (a) Expliquer pourquoi les droites $(FG)$ et $(QR)$ sont sécantes.
On appellera $M$ leur point d'intersection.

(b) Expliquer pourquoi les droites $(PM)$ et $(FB)$ sont sécantes.
On appellera $I$ leur point d'intersection.

(c) Expliquer pourquoi les droites $(QR)$ et $(GH)$ sont sécantes.
On appellera $N$ leur point d'intersection.

(d) Expliquer pourquoi les droites $(PN)$ et $(DH)$ sont sécantes.
On appellera $J$ leur point d'intersection.

(e) En déduire la section du plan $(PQR)$ sur le cube.

**2/** Quelles remarques peut-on faire sur certains côtés de ce pentagone ?

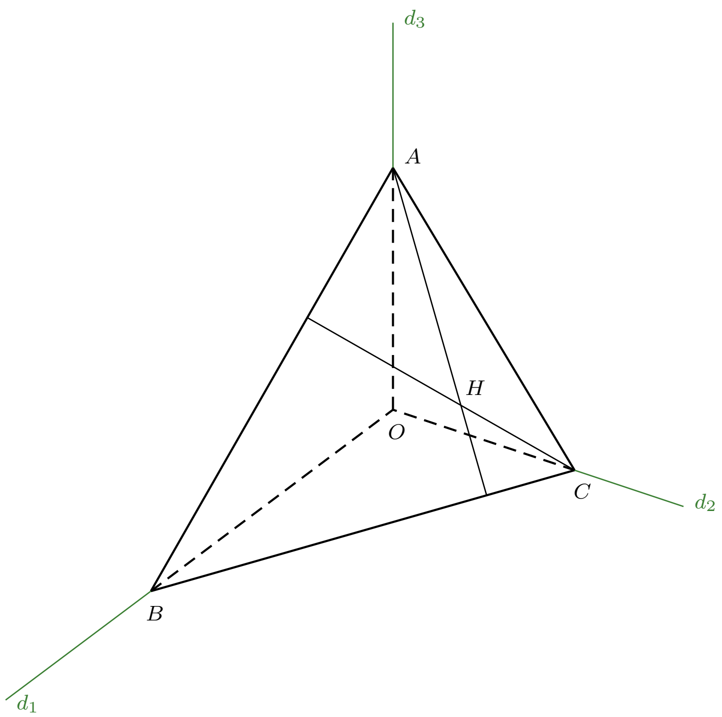
**3/** Le plan $(PQR)$ ne coupe pas la face $ABCD$ mais il coupe le plan $(ABC)$.
Comment trouver la droite d'intersection de ces deux plans ?

# Droites et Plans

3

**Exercice (Tétraèdre trirectangle)** $OABC$ est un tétraèdre, les droites $(d_1)$, $(d_2)$ et $(d_3)$ sont deux à deux perpendiculaires et le point $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

On cherche à montrer que la droite $(OH)$ est perpendiculaire au plan $(ABC)$.




**1/** (a) Montrer que la droite $(OA)$ est perpendiculaire au plan $(OBC)$.

(b) En déduire que la droite $(OA)$ est orthogonale à la droite $(BC)$.

(c) Montrer que la droite $(BC)$ est perpendiculaire au plan $(OAH)$.

(d) En déduire que la droite $(BC)$ est orthogonale à la droite $(OH)$.

**2/** Montrer de même que la droite $(AB)$ est orthogonale à la droite $(OH)$.

**3/** En déduire le résultat cherché.

Chapitre

# 3 Limites

Dans le chapitre d'analyse précédent, nous nous somme familiarisés avec les notions de limite et de convergence d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si l'on se rappelle qu'une suite n'est qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par le schéma :

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ n & & u_n \end{array},$$

on va pouvoir aisément prolonger ces notions à une fonction $f$ de la variable réelle :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & f(x) \end{array}.$$

En effet, une suite n'étant correctement définie que si tous ses termes le sont pour des valeurs finies de $n$, le comportement asymptotique n'est alors à étudier que pour des valeurs « grandes » de $n$. Seule nous restait l'étude de $\lim u_n$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

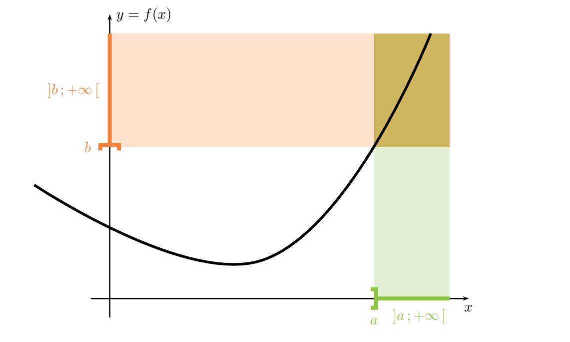
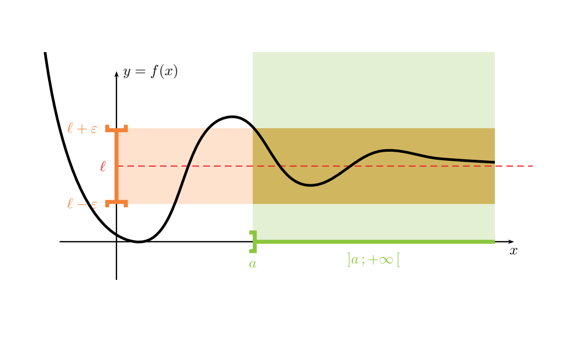
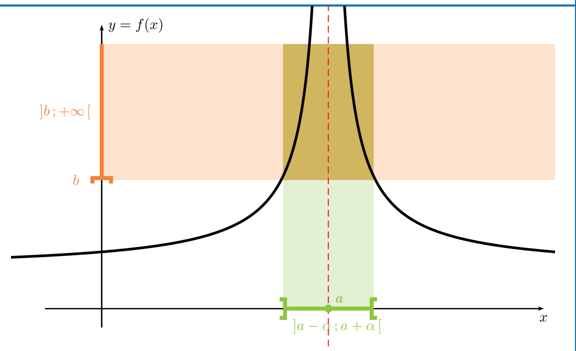
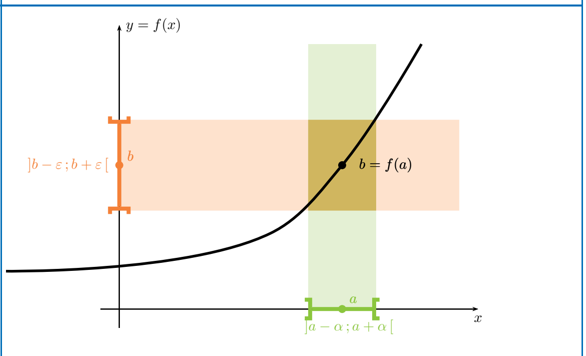
Le tableau ci-dessous illustre les 3 cas de figure rencontrés :

| $u_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas |
|---|---|---|---|
| $n \longrightarrow +\infty$ | $u_n = \dfrac{n^2+3n-1}{n+4}$ ou $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$ | $u_n = \dfrac{(-1)^n+3n}{n+\sqrt{n}}$ ou $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$ | $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= -u_n \end{cases}$ ou $u_n = \sin n$ |

Pour une fonction $f$, nous gagnons en dimensions :

- $x$ tout d'abord appartient à $\mathbb{R} = ]-\infty\,;+\infty[$ tout entier et pas seulement à $\mathbb{N}$ : on pourra regarder $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- $f(x)$ ensuite, peut prendre, elle aussi, toutes les valeurs de $\mathbb{R} = ]-\infty\,;+\infty[$ : on aura alors $\lim f(x) = -\infty$, $\lim f(x) = b \in \mathbb{R}$ ou $\lim f(x) = +\infty$
- Et, bien sûr, nul n'a jamais dit que ces limites existaient toujours !

Le tableau résumant le travail de ce chapitre devient alors :

| | $f(x) \longrightarrow \infty$ | $f(x) \longrightarrow \ell$ |
|---|---|---|
| $x \longrightarrow \infty$ |  |  |
| $x \longrightarrow a$ |  |  |

## Sommaire

# I Limite à l'infini

Commençons en prolongeant les résultats sur les suites :

## I.1 Limite finie à l'infini

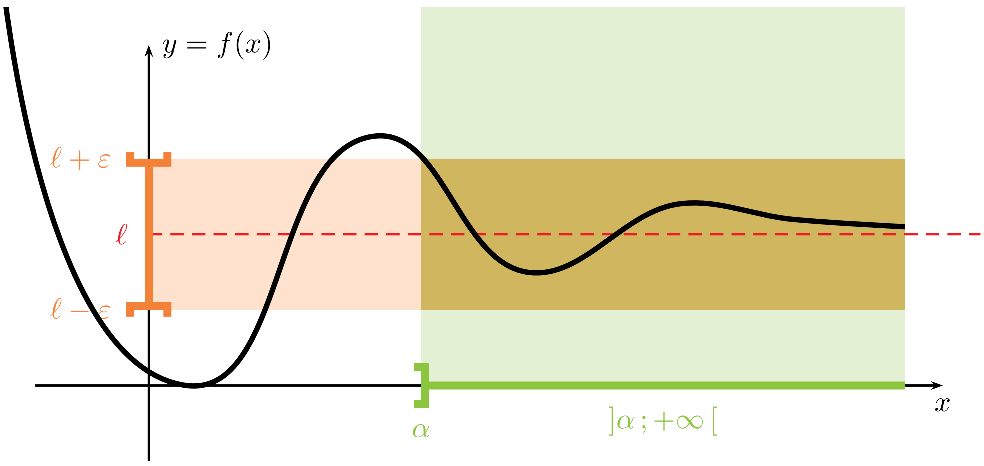
Comme pour les suites, on a :

**Définition 1**

Dire qu'une fonction $f$ a pour limite $\ell$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez « grand ». On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, x \in \mathbb{R},\ x > \alpha \implies f(x) \in ]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon\,[.$$




[ Applications page 59 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Corollaire 1** (Conséquence graphique)

La droite d'équation $y = \ell$ est alors asymptote (horizontale) à la courbe représentative de $f$.

**Exemple 1:** Les fonctions de référence $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ont des limites nulles en $+\infty$ et, pour les deux premières nulles en $-\infty$

Leurs courbes admettent alors l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

[ Exercices 41, 44 et 46 page 89 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** Dire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ est équivalent de dire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \ell = 0$. Cette dernière expression représente, au signe près, la distance entre la courbe et son asymptote : à l'infini, la courbe représentative se rapproche infiniment de son asymptote.

**Méthode 1** (Position relative d'une courbe et de son asymptote)

Soit $f$ une fonction et $y = \ell$ l'équation de son asymptote horizontale $(\mathscr{D})$.
Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $(\mathscr{D})$ en $+\infty$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - \ell$ sur un voisinage $]\alpha\,;+\infty\,[$ de celui-ci.

| $x$ | $\alpha$ | $\delta$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f(x) - \ell$ | $+$ | 0 | $-$ |
| Position de $\mathscr{C}_f$ et $(\mathscr{D})$ | $\mathscr{C}_f$ au dessus de $(\mathscr{D})$ | | $\mathscr{C}_f$ au dessous de $(\mathscr{D})$ |

**Remarque:** : Si l'équation de $(\mathscr{D})$ est $y = ax + b$, on étudiera le signe de $f(x) - (ax + b)$.

[ Exercice résolu 5 page 78
Exercice 45 page 89 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## I.2 Limite infinie à l'infini

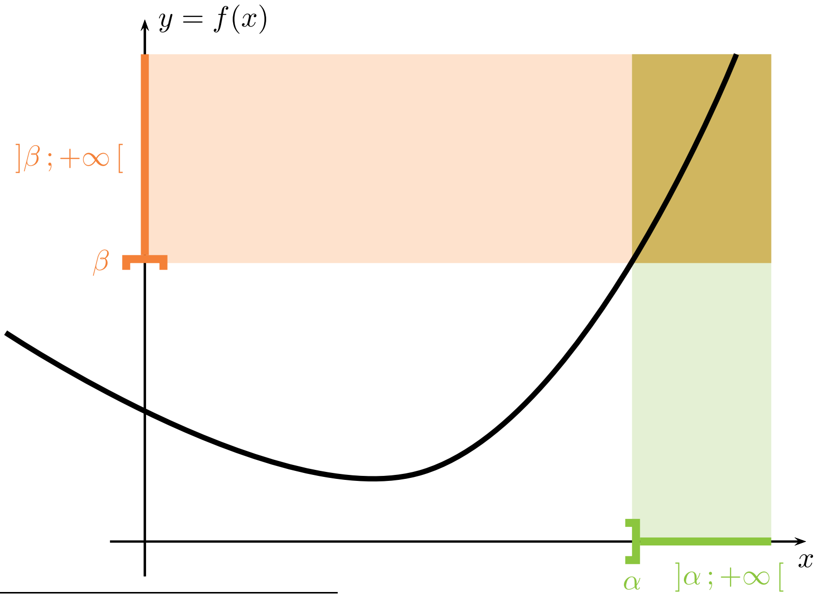
De la même manière, on a :

**Définition 2**

Dire qu'une fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]b\,;+\infty\,[$ [1], $\beta \in \mathbb{R}$ , contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez « grand ».
On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, x \in \mathbb{R},\ x > \alpha \implies f(x) \in ]\beta\,;+\infty\,[.$$




1. On peut aussi le considérer comme un voisinage de l'infini.

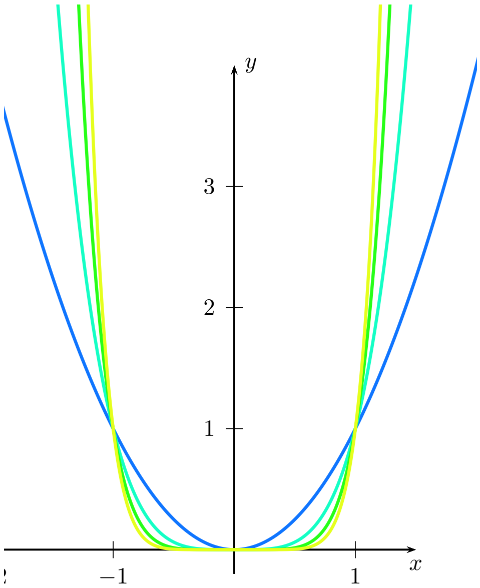
On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**Remarques:**

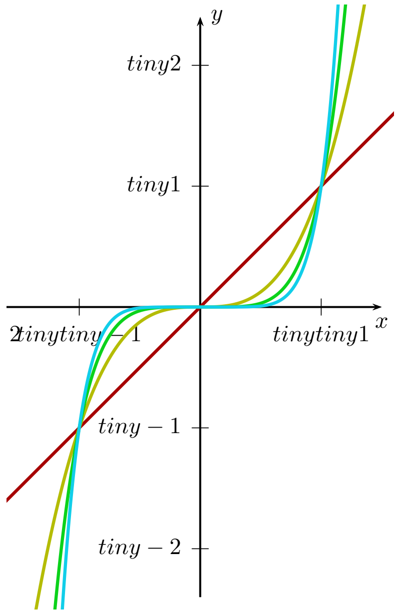
- Cela implique que la fonction $f$ n'est pas majorée.
- Il n'y a pas d'asymptote à la courbe en général. Quand viendra le temps, on parlera de direction asymptotique ou d'asymptote « oblique ».

**Exemple 2:** Les fonctions de référence $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

La fonction de référence $x \longmapsto x^n$ a pour limite $\begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$




$x \longmapsto x^n$ pour $n = 2, 4, 6, 8$.

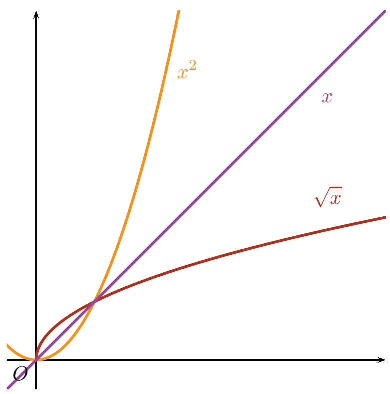



$x \longmapsto x^n$ pour $n = 1, 3, 5, 7$.

[ Applications page 61 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** Une fonction peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ de plusieurs façons. On parle de vitesse de divergence différentes. C'est le cas par exemple des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto x^2$ tend « rapidement » vers l'infini.
  La concavité est tournée vers le haut.
- $x \longmapsto x$ tend « moyennement » vers l'infini. Pas de concavité
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ tend « lentement » vers l'infini.
  La concavité est tournée vers le bas.



Ces simples informations sont importantes puisqu'elles nous permettront de conjecturer certaines limites. Une fonction rapide sera prépondérante sur une fonction lente en l'infini donc pourra y imposer sa limite.

On en verra d'autres qu'il faudra classer parmi celle qu'on connaît déjà.

Pour l'instant, en $+\infty$ :

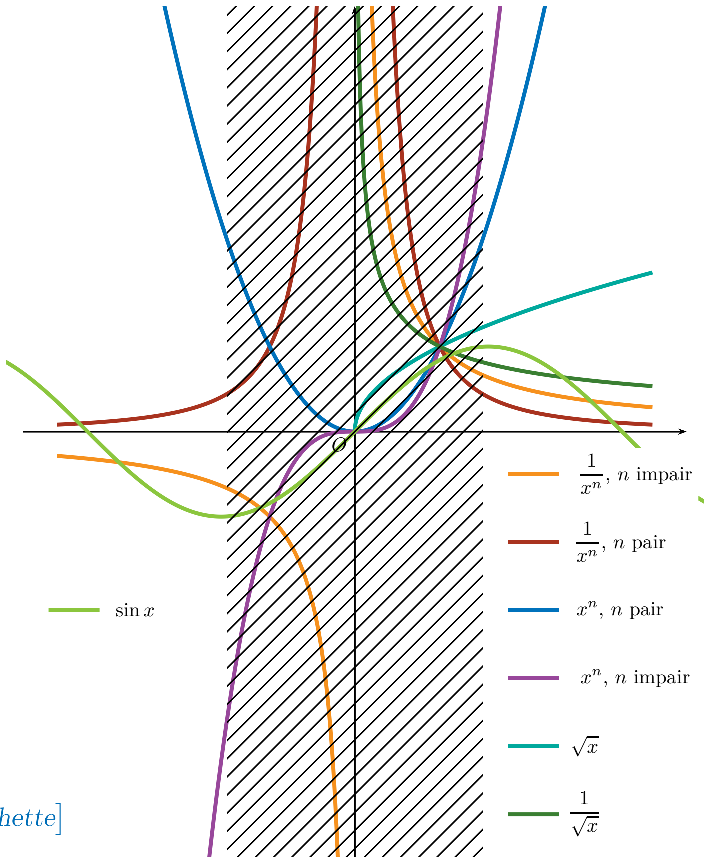
$$\boxed{1 \prec \sqrt{x} \prec x \prec x^m \prec x^n,\ m < n.}$$

[ Vrai ou faux ? 10 et 12 page 87 , **Maths Repère**, *Hachette*]

### I.3 Limites des fonctions de référence en l'infini

Le plus simple pour ne pas faire d'erreur, c'est de bien avoir en tête l'allure des courbes représentatives de ces fonctions élémentaires[2]. On ne se préoccupe ici que de ce qui se passe dans un voisnage de $\pm\infty$.

| $f(x)$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ |
|---|---|---|
| $x^n$ | $+\infty$ | $+\infty$ si $n$ pair<br>$-\infty$ si $n$ impair |
| $\dfrac{1}{x^n}$ | 0 | 0 |
| $\sqrt{x}$ | $+\infty$ | non défini |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | 0 | non défini |
| $\sin x$ | pas de limite | pas de limite |




[ Exercices 30 et 31 page 88 , **Maths Repère**, *Hachette*]

2. On les côtoie depuis la seconde quand même !

# II Limite en un point

C'est ici que les fonctions montrent leurs différences avec les suites :

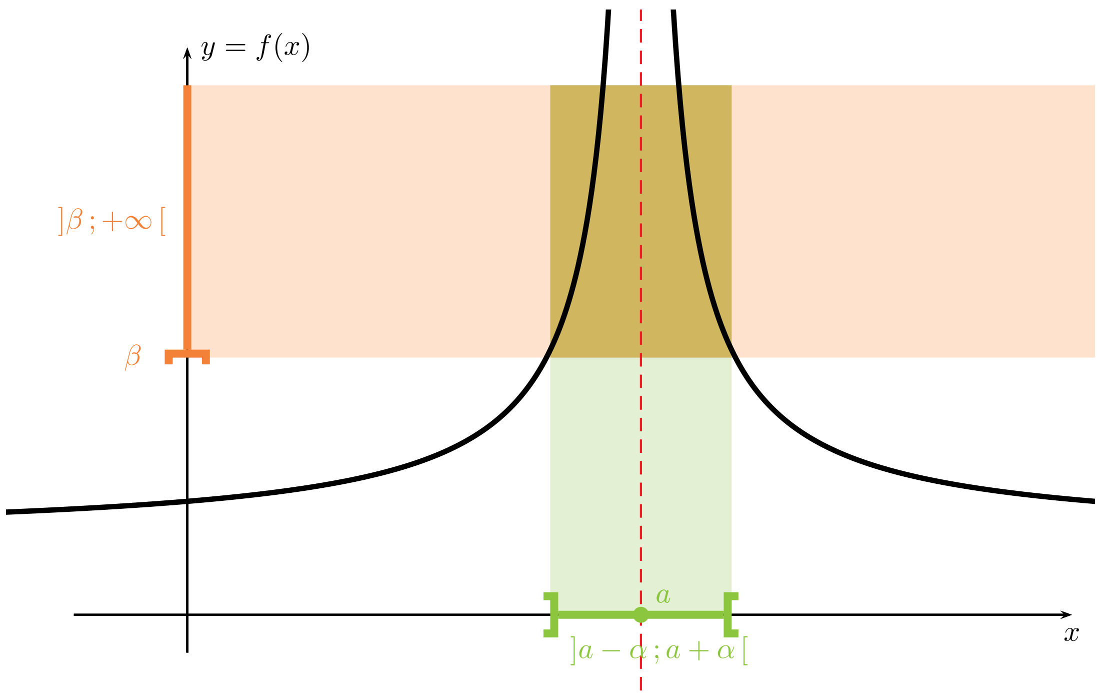
## II.1 Limite infinie en un point

**Définition 3**

Dire qu'une fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $a$, signifie que tout intervalle de la forme $]\beta\,;+\infty\,[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $a$, c'est à dire pour les $x$ d'un intervalle ouvert contenant $a$. On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

$$\forall\beta\in\mathbb{R}, \exists\,\alpha(\varepsilon)\in\mathbb{R}_+^*\ /\ \forall\,x\in\mathbb{R},\ x\in\,]a-\alpha\,;a+\alpha\,[\implies f(x)\in\,]\beta\,;+\infty\,[.$$




On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et on parle alors de la limite de $f$ en $a$.

**Corollaire 2** (Conséquence graphique)

La droite d'équation $x = a$ est alors asymptote (verticale) à la courbe représentative de $f$.

**Remarque:** Lorsque la limite en $a$ n'existe pas, on peut aussi définir les limite à gauche et à droite de $a$.

On notera alors :

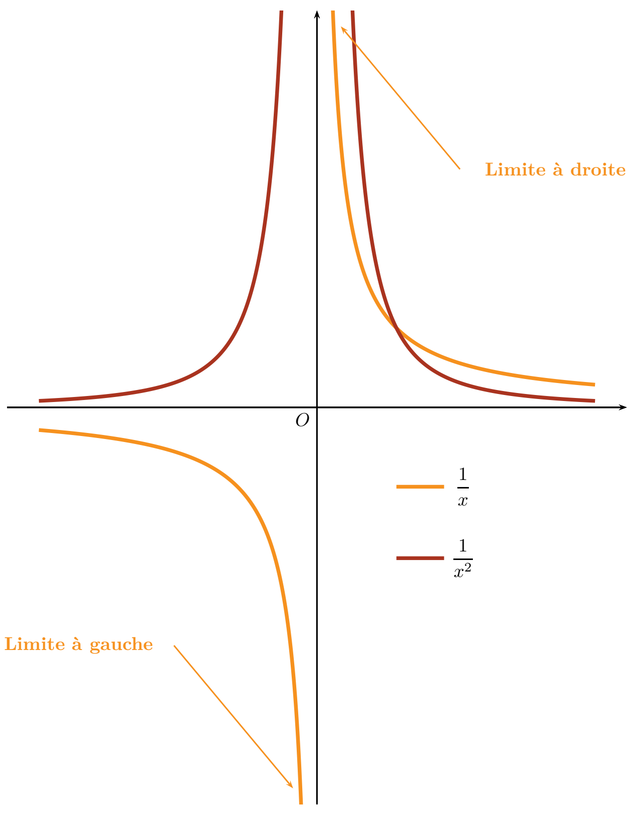
**Limite à gauche :** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

**Limite à droite :** $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

D'une manière générale, il est clair que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

**Exemple 3:**

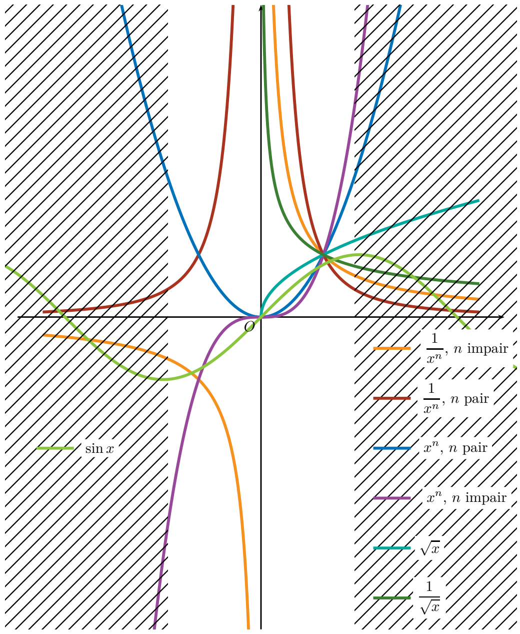
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.




Applications page 63
Vrai ou faux ? 13 page 87 , **Maths Repère**, *Hachette*

## II.2 Limites des fonctions de référence en 0

Comme précédemment, les courbes représentatives bien en tête, on se concentre sur ce qu'il se passe au voisinage 0.




| $f(x)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{x^n}$ | $+\infty$ | $+\infty$ si $n$ pair<br>$-\infty$ si $n$ impair |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $+\infty$ | non défini |

[ Exercice 40 page 89 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## II.3 Limite finie en un point

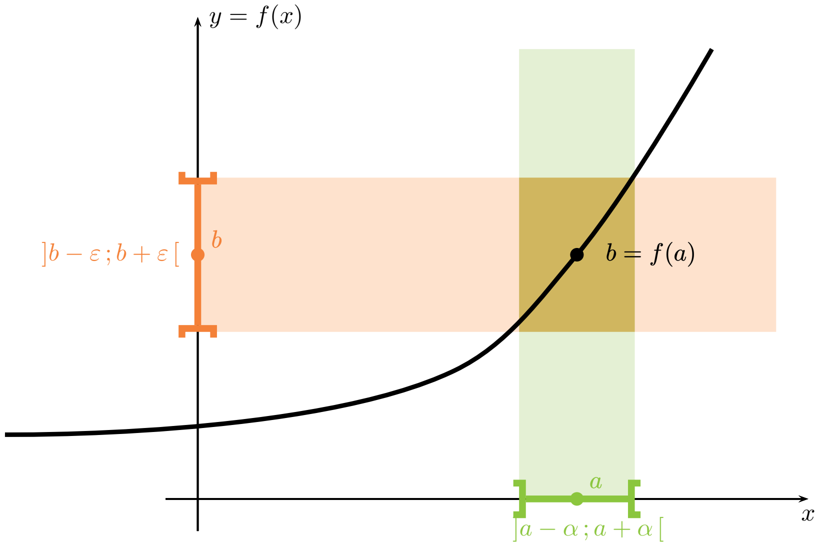
On empiète ici sur le chapitre suivant en abordant la notion de **continuité** d'une fonction en un point.

**Définition 4**

Dire qu'une fonction $f$ a pour limite $b$ en $a$, signifie que tout intervalle ouvert contenant $b$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $a$, c'est à dire pour les $x$ d'un intervalle ouvert contenant $a$. On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \forall\, x \in \mathbb{R},\; x \in ]a-\alpha\,;a+\alpha[ \implies f(x) \in ]b-\varepsilon\,;b+\varepsilon[.$$




Quand cette limite existe et coïncide avec $f(a)$, on dit que $f$ est **continue** en $a$. Graphiquement, cela signifie que l'on ne « lève pas le crayon » autour de $f(a)$. La courbe n'a pas de discontinuité.

*Exemple 4:*

- Les fonctions carrée, cube, racine, toutes les fonctions polynômes, les sinusoïdes sont continues sur tout leur ensemble de définition.
- La fonction inverse n'est pas continue en 0. Sa représentation graphique est donc en deux parties, de part et d'autre de l'axe des ordonnées.

# III Opérations sur les limites

## III.1 Somme de fonctions

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $f$ a pour limite | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Si $g$ a pour limite | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $f+g$ a pour limite | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme Indéter. |

- Limite en $+\infty$ de la fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x+3 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

- Limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x & = & -\infty \end{array}\right\}$$ Le théorème sur les sommes ne peut nous aider à conclure ici. . . on factorisera plus tard.

[ Exercice 49 page 90 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## III.2 Produit de fonctions

| Si $f$ a pour limite | $\ell$ | $\ell \neq 0$ | 0 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Si $g$ a pour limite | $\ell'$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| alors $f \times g$ a pour limite | $\ell \times \ell'$ | $\infty$ [3] | Forme Indéter. | $\infty$ [3] |

- Limite en $-\infty$ de la fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$.

  Comme pour les suites, on va factoriser par la forme prépondérante en $-\infty$ pour pouvoir conclure :

$$f(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{1}{x} & = & 1 \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

[ Exercice résolu 1 page 74 , **Maths Repère**, *Hachette*]

- Limite en $+\infty$ de la fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x + \sqrt{x}$.

  Ici aussi le théorème sur les sommes de limites est impuissant. . . on factorise par la forme prépondérante en $+\infty$ :

$$f(x) = x + \sqrt{x} = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} & = & 1 \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

- Limite à droite en 0 de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin x$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to0} \sin x & = & 0 \end{array}\right\} \text{Le théorème sur les produits ne peut nous aider à conclure ici. . . il faut être plus malin.}$$

Comme la fonction $x \longmapsto \sin x$ est dérivable en 0 et comme $\sin 0 = 0$, on a :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin)'(0) = \cos 0 = 1.$$

[ Exercice 50 page 90 , **Maths Repère**, *Hachette*]

3. Appliquer la règle des signes d'un produit.

### III.3 Quotient de fonctions

| Si $f$ a pour limite | $\ell$ | $\ell > 0$ | $\ell > 0$ | 0 | $\ell$ | $\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $g$ a pour limite | $\ell' \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | 0 | $\infty$ | $\ell'$ | $\infty$ |
| alors $\left(\dfrac{f}{g}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme Indéter. | 0 | $\infty$[3] | Forme Indéter. |

[ Exercice 51 page 90 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

- Limite en $-2$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$.

  On a le tableau de signes de $x+2$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-2} 2x-1 & = & -5\\ \lim\limits_{x\to-2^+} x+2 & = & 0^+\\ \lim\limits_{x\to-2^-} x+2 & = & 0^-\end{array}\right\}\overset{par\ quotient}{\Longrightarrow}\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) & = & -\infty,\\ \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) & = & +\infty\end{array}$$

**ATTENTION** à la règle des signes !!!

- Limite en $-\infty$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+2}$.

  Comme le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini en $-\infty$, nous avons une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. On factorise donc par les parties prépondérantes :

$$f(x)=\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{2\cancel{x}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{3\cancel{x}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)}=\frac{2\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{3\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-\infty} 2\left(1+\dfrac{1}{2x}\right) & = & 2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3\left(1+\dfrac{2}{3x}\right) & = & 3\end{array}\right\}\overset{par\ quotient}{\Longrightarrow}\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{3}.$$

[ Exercice résolu 2 page 75
Vrai ou faux ? 14 et 15 page 87 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

- Limite en $+\infty$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

  Le théorème sur les sommes de limites et la factorisation sont impuissants…on utilise la forme conjuguée pour lever l'indétermination :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty \overset{\textit{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

[ Exercice résolu 3 page 76
Applications page 65
Exercices 32 et 33 page 88
Exercices 56 à 58 page 91 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## III.4 Conclusion

Il existe donc quatre formes indéterminées (comme avec les limites de suites) où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.

Dans les cas d'indétermination, il faudra chercher à mettre le terme de plus haut degré en facteur (pour les polynômes et les fonctions rationnelles), à simplifier, à multiplier par la quantité conjuguée (pour les fonctions irrationnelles), à utiliser un théorème de comparaison, à effectuer un changement de variable, …

[ QCM 1 à 6 page 86 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# IV Limite d'une fonction composée

## IV.1 Composée de fonctions

**Définition 5**

Soit $f$ une fonction définie sur un ensemble $I$ et $g$ une fonction définie sur $J$ tel que $f(I) \subset J$. On appelle **composée** de $f$ par $g$ la fonction, notée $g \circ f$, définie sur $I$ par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f : & I & \longmapsto & f(I) \subset J & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & & f(x) & & g[f(x)]. \end{array}$$

Cette notion n'est pas vraiment nouvelle. Seule la formalisation l'est. En effet, la fonction définie par $(x+1)^2$ était déjà une composée. Celle de $x \overset{g}{\longmapsto} x+1$ et $x \overset{f}{\longmapsto} x^2$.

**Remarque:** La condition $f(I) \subset J$, ne doit pas effrayer. Il est bien nécessaire que la fonction $g$ soit correctement définie donc que $f$ envoie $I$ dans un sous-ensemble du domaine de définition de $g$.

**ATTENTION** La composition n'est pas une opération commutative :

$$(g \circ f)(x) = (x+1)^2 \neq x^2 + 1 = (f \circ g)(x).$$

**Exemple 5:** Soient $f$, $g$ et $h$ les fonctions définies par :

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{1+x}{2-x} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

- $(f \circ g)(x) = \left(\dfrac{1+x}{2-x}\right)^2$.
- $(h \circ g)(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2-x}}$.
- $(f \circ g \circ h)(x) = \left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right)^2$.
- $(g \circ f)(x) = \dfrac{1+x^2}{2-x^2}$.
- $(g \circ h)(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.
- $(h \circ g \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2-x^2}}$.

1

**Exercice** A l'aide des fonctions élémentaires $x^2$, $\sqrt{x}$, $\dfrac{1}{x}$, $\cos x$, … décomposer les fonctions définies par :

- $h(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.
- $k(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.
- $l(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

## IV.2 Limite d'une fonction composée

Les calculs précédents s'étendent facilement aux limites qu'elles soient finies ou infinies. C'est ce qu'exprime le théorème suivant :

**Théorème 1**

Soient deux fonctions $f$, $g$ et trois réels finis ou infinis $a$, $b$ et $c$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c \text{ alors } \lim_{x\to a} g[f(x)] = c.$$

Rien de compliqué là-dedans. Le théorème indique simplement que $g(f(x))$ tend vers $g(b)$ si $f(x)$ tend vers $b$ quand $x$ tend vers $a$.

**Preuve:** Démontrons ce théorème dans le cas $a$ et $c$ finis et $b = +\infty$, par exemple.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$ un voisinage ouvert de $c$.

Comme $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, $\exists\, A(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, X \in \mathbb{R},\ X > A \implies g(X) \in ]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$.

Or, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b(=+\infty)$, c'est-à-dire, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \in ]a-\alpha\,;a+\alpha[ \implies f(x) \in ]A\,;+\infty[$ (*ie*) $f(x) > A$.

Conclusion, $\exists\,\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \in ]a-\alpha\,;a+\alpha[$ entraîne $f(x) > A$ puis $g(f(x)) \in ]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$.

On a bien montré que $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.[4]

4. Cette démonstration n'est pas au programme mais c'est un bon exercice de formalisation, de compréhension et de vérification que les définitions sont claires dans votre tête.

QCM 7 page 86
Applications page 65
Exercice résolu 8 page 82 (Q.1 à 3) , **Maths Repère**, *Hachette*
Vrai ou Faux ? 11 page 87
Exercices 61 et 62 page 91

**2**

**Exercice** Déterminer les limites suivantes :

**1/** $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ avec $h(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$.

**2/** $\lim_{x \to -\infty} k(x)$ avec $k(x) = \cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.

**3/** $\lim_{x \to 2} l(x)$ avec $l(x) = \frac{1}{2-x}$.

**4/** $\lim_{x \to 2} m(x)$ avec $m(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$.

**Correction:**

**1/** S'il est nécessaire, on peut poser $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On reconnaît alors $h(x) = (g \circ f)(x)$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x^2} & = & 2 \\ \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x} & = & 2 \end{array}\right\} \overset{\textit{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} h(x) = \sqrt{2}.$$

**2/** En plus rapide :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+x^2} & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \cos x & = & 1 \end{array}\right\} \overset{\textit{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} k(x) = 1.$$

**3/** Comme $2 - x$ tend ver 0 en 2 et que l'on compose après par la fonction $\frac{1}{x}$, il faut se méfier du signe dans ce cas là :

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2-x$ | $+$ | $0$ | $-$ |

Avec les conventions de notations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 2^-} 2 - x & = & 0^+ \\ & \textit{et} & \\ \lim\limits_{x \to 2^+} 2 - x & = & 0^- \end{array}\right.$$

On obtient alors :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 2^-} 2 - x & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \overset{\textit{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 2^-} l(x) = +\infty,$$

et

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 2^+} 2 - x & = & 0^- \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} & = & -\infty \end{array}\right\} \overset{\textit{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 2^+} l(x) = -\infty.$$

**4/** Ici, malgré la difficulté apparente, $\lim_{x \to 2^-} (2-x)^2 = \lim_{x \to 2^+} (2-x)^2 = \lim_{x \to 2} (2-x)^2 = 0^+$.

D'où :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 2} (2-x)^2 & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \overset{\textit{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 2} m(x) = +\infty.$$

Exercices 63 à 68 page 92 , **Maths Repère**, *Hachette*

## IV.3 Composée d'une suite par une fonction

Les deux théorèmes suivants sont de simples corollaires du théorème précédent. Leurs applications sont cependant loin d'être triviales. Nous en verrons quelques exemples.

**Corollaire 1** (Limite d'une suite explicite)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant A$. Soit $\ell$ un réel fini ou pas.

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Rien à démontrer ici. C'est la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ en remplaçant $x$ par $n$ [5]

**Exemple 6:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$ et $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = 3$, on a aisément $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

**Corollaire 2** (Limite d'une suite récurrente)

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes appartiennent à $I$. Soient $a$ et $b$ deux réels finis ou non.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

**Preuve:** Encore un bon exercice de formalisation. On le fait par étapes :

- Soit $J_b$ un voisinage ouvert quelconque de $b$ [6].
- Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, il existe un voisinage $I_a$, dépendant de $J_b$, ouvert de $a$ [7] tel que :
$$\forall\, X \in \mathbb{R},\ X \in I_a \cap I \implies f(X) \in J_b.$$
- Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ $(ie)$ , il existe un rang $n_0(I_a) \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies u_n \in I_a.$$
- Conclusion, $n \geqslant n_0$ entraîne $u_n \in I_a$ puis $f(u_n) \in J_b$.
On a bien prouvé que :
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$$

Cet énoncé est la base d'un théorème fort des suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, si $u_n \longrightarrow \ell$, $\ell$ fini, alors $u_{n+1} \longrightarrow \ell$. Le corollaire précédent permet donc d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right).$$

5. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, pas de soucis.
7. de la forme $]b-\varepsilon\,;b+\varepsilon[$ ou $]\beta\,;+\infty[$ suivant que $b$ est fini ou non.
7. de la forme $]a-\alpha\,;a+\alpha[$ ou $]\alpha\,;+\infty[$ suivant que $a$ est fini ou non.

C'est le premier théorème d'interversion de limites que vous voyez. Ceci a des implications fortes !

Imaginons que, tout naturellement, on ait $\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$. On obtiendrait alors un moyen efficace de trouver la limite d'une suite récurrente à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ que l'on ferait « passer à la limite » :

$$u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell = f(\ell).$$

La limite cherchée est alors nécessairement une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

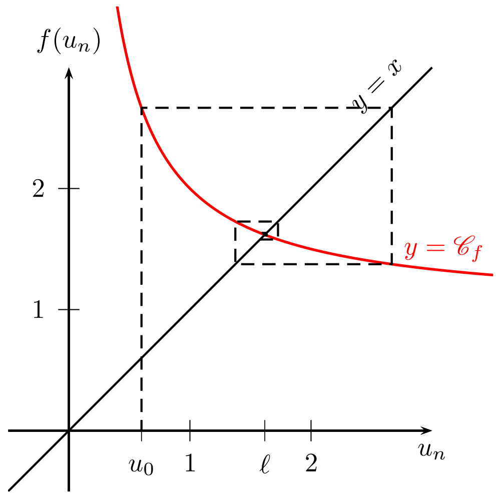
Nous y reviendrons plus avant dans le futur chapitre d'analyse car, pour l'instant, rien ne nous assure que $\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$ ! ! !

**Exemple 7:**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par une fonction dont est tracée la courbe représentative ci-contre.

Les termes de la suite semblent converger vers le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, un « point fixe » de $f$.

On verra[8] que c'est un fait général.




[ Exercice 132 page 102 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercices 129 et 131 page 102
Exercices 133 à 135 page 103 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## V Théorèmes de comparaison

**Proposition 1** (Limite et ordre)

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I = ]a\,; +\infty[$.
Si, $\forall\, x \in I$, $g(x) \leqslant f(x)$, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell'$ alors $\ell \leqslant \ell'$.

En gros, si des fonctions sont dans un certain ordre, alors leurs limites sont dans le même ordre.

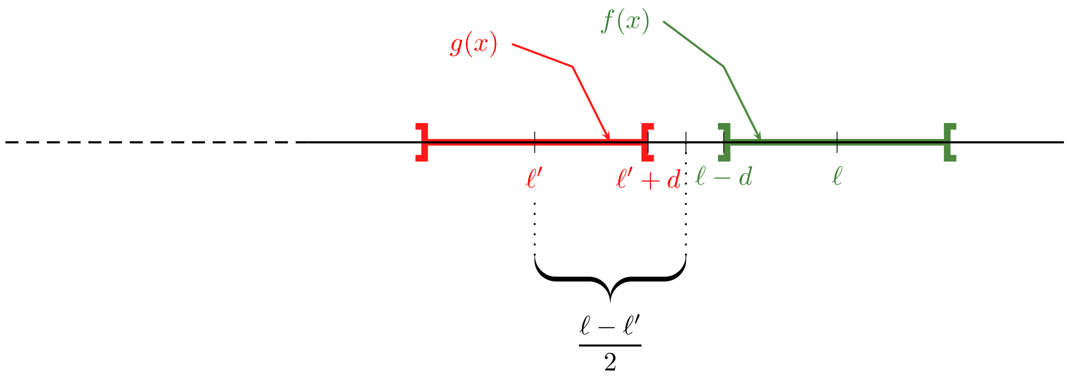
8. et on démontrera !

**Preuve:** Supposons, par l'absurde, que $\forall\, x \in I$, $g(x) \leqslant f(x)$ avec $\ell > \ell'$.

Posons alors, comme pour la démonstration de l'unicité de la limite d'une suite, $d < \dfrac{\ell - \ell'}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell'$, il existe donc deux réels $\alpha_f(d)$ et $\alpha_g(d)$ tels que :

$$\forall\, x \in I, \left\{ \begin{array}{lcl} x > \alpha_f & \Longrightarrow & f(x) \in ]\ell - d\,;\ell + d\,[ \\ x > \alpha_g & \Longrightarrow & g(x) \in ]\ell' - d\,;\ell' + d\,[ \end{array} \right.$$




D'où, pour $x > \max(\alpha_f, \alpha_g)$, on obtiendrait :

$$g(x) < \ell' + d < \ell - d < f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad g(x) < f(x).$$

D'où la contradiction et la nécessité que $\ell \leqslant \ell'$.

**Remarques:**

- La propriété n'est pas vraie avec des inégalités strictes : $g(x) < f(x)$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$ mais seulement $\ell \leqslant \ell'$ :

  Prenez, par exemple $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui tendent toutes deux vers 0 alors qu'il est clair que $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.
- La propriété permet de comparer deux limites, mais elle ne permet pas de démontrer l'existence de la limite d'une fonction.
- Cette propriété peut s'étendre à des limites quand x tend vers $-\infty$, vers $a$, ainsi qu'à des limites à gauche ou à droite. (Il suffira simplement de modifier l'intervalle de définition des fonctions).

**Théorème 11**

Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur un intervalle $I = ]a\,;+\infty\,[$ et $\ell$ un réel.

**Théorème des « Gendarmes »**

Si, $\forall\, x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

**Théorème de comparaison**

Si, $\forall\, x \in I$, $g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3

**Exercice** Énoncer les théorèmes analogues en $-\infty$ et en un réel $a$.

**Preuve:**

**Théorème des « Gendarmes »** Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon\,[$ un voisinage ouvert de $\ell$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$, il existe deux réels $\alpha_1$ et $\alpha_2$ tels que :

$$\forall\, x\in I,\ \begin{cases} \alpha_1 < x & \Longrightarrow \quad \ell-\varepsilon < g(x) < \ell+\varepsilon \\ et & \\ \alpha_2 < x & \Longrightarrow \quad \ell-\varepsilon < h(x) < \ell+\varepsilon. \end{cases}$$

Comme $\forall\, x\in I$, $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, si $x>\max(\alpha_1,\,\alpha_2)$ alors $\ell-\varepsilon < g(x) < f(x) < h(x) < \ell+\varepsilon$, c'est-à-dire $f(x)\in]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon\,[$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

**Théorème de comparaison** La démonstration est identique en plus simple.

Soit $A\in\mathbb{R}$ et $]A\,;+\infty\,[$ un voisinage ouvert de $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, il existe une réel $\alpha$ tel que : $\forall\, x\in I$, $\alpha<x \Longrightarrow A<g(x)$.

Comme $\forall\, x\in I$, $g(x)\leqslant f(x)$, si $x>\alpha$ alors $A<g(x)<f(x)$, c'est-à-dire $f(x)\in]A\,;+\infty\,[$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

[ Exercices 69 à 71 page 92
Exercices 136 et 137 page 104 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

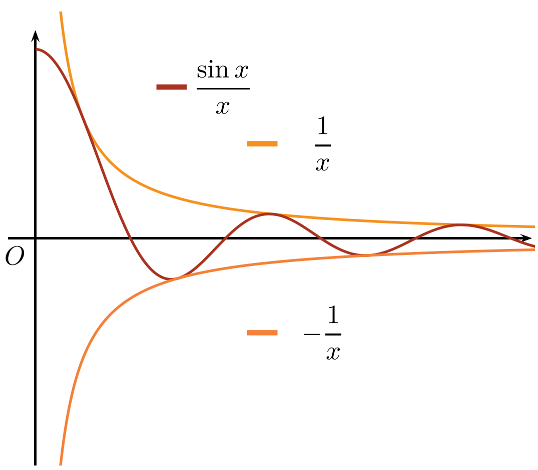
4

**Exercice** Déterminer les limites suivantes :

**1/** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$. **2/** $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\cos x$.

**Correction:**

**1/** $\forall\, x_i n\mathbb{R}$, $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$, d'où $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*$, $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\sin x}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$.



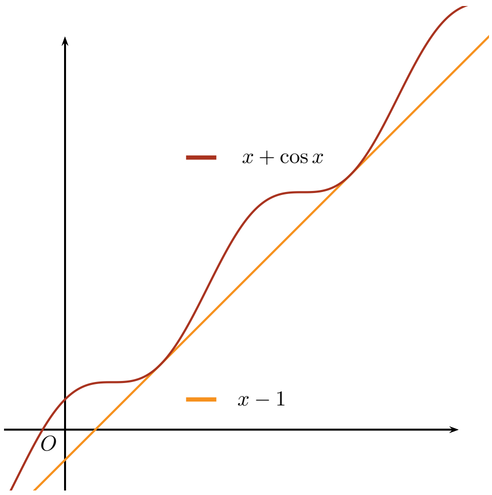

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, d'après le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

**2/** De la même manière, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x + \cos x \leqslant x + 1$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} x + \cos x = +\infty.$$




[ Exercices 72 à 79 page 93 , **Maths Repère**, *Hachette*]

[ Exercices 127 et 128 page 101 , **Maths Repère**, *Hachette*]

# Limite, Courbe et Asymptote

**1** **Exercice (Reconnaître une forme indéterminée)** Pour chacune des limites suivantes, dire s'il s'agit ou non d'une forme indéterminée et en cas de réponse négative, calculer la limite en utilisant la propriété correspondante :

**1/** $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - x$.

**2/** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - x$.

**3/** $\lim\limits_{x\to -\infty} x + \sqrt{x^2+1}$.

**4/** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2+1}{x}$.

**5/** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-x^2}{x+3}$.

**6/** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2+9}$.

**7/** $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} \dfrac{-x^2+x+2}{x+3}$.

**8/** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x + 1}$.

**9/** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

**10/** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin x}$.

**11/** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x+2}$.

**12/** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$.

**2** **Exercice (Encore des indéterminations)** Pour chacune des limites suivantes, lever l'indétermination en utilisant la méthode indiquée :

**1/** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ (factoriser le numérateur par $x-1$).

**2/** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ (factoriser le numérateur et le dénominateur par $x-1$).

**3/** $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}$ $\left(\text{utiliser la formule } \sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\ a \text{ et } b \text{ positifs}\right)$.

**3** **Exercice (Limites remarquables)** Le but de l'exercice est d'établir deux limites remarquables :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

**1/** Le but de cette question est de prouver que : $\forall\, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[ \cup \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$.

(a) Étudier les variations de la fonction $\phi(x) = \sin x - x$, pour $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(b) Étudier les variations de la fonction $\varphi(x) = \sin x - x\cos x$, pour $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(c) Conclure.

**2/** En utilisant le théorème d'encadrement, déduire de la question précédente que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

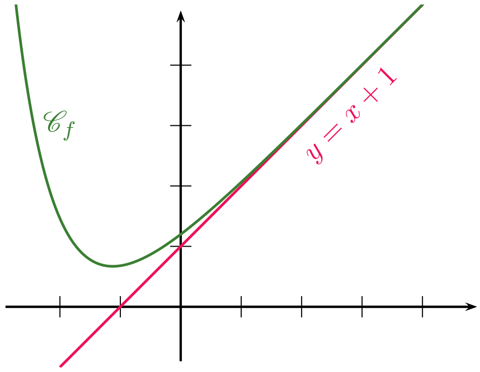
**3/** En utilisant la formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ prouver que $\dfrac{\cos x - 1}{x} = -\dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$.

**4/** En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

**Définition 6**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$. On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de $f$ en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx+p)] = 0.$$




4 **Exercice (Asymptote oblique)** On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2}.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

**1/** (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
(b) Étudier ses limites aux bornes de cet ensemble.

**2/** (a) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction $f$ est dérivable puis calculer sa dérivée.
(b) En déduire les variations de la fonction $f$.

**3/** (a) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$.
(b) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

**4/** Construire $\mathscr{C}_f$ en faisant apparaître ses asymptotes ainsi que ses tangentes horizontales.

5 **Exercice (Etude de fonction. . . )** Effectuer l'étude complète de la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 8}{x - 2},$$

c'est-à-dire :

**1/** (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
(b) Étudier ses limites aux bornes de cet ensemble.
(c) En déduire l'asymptote verticale à la courbe représentative et donner son équation.

**2/** (a) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction $f$ est dérivable puis calculer sa dérivée.
(b) En déduire les variations de la fonction $f$.

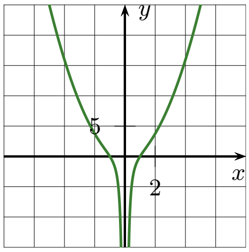
**3/** (a) Montrer que $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x-2}$.
(b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $(\mathscr{D})$ dont on donnera l'équation.
(c) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

**4/** Construire la courbe représentative de $f$ en faisant apparaître ses asymptotes ainsi que ses tangentes horizontales.

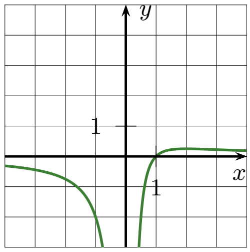
6

**Exercice (Courbes et fonctions)** Associer à chacune des fonctions suivantes sa représentation graphique choisie parmi les courbes ci-après.

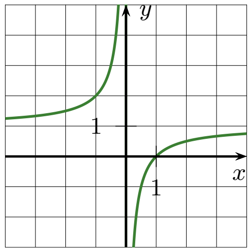
- $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.
- $h(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$.
- $m(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$.
- $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.
- $k(x) = \dfrac{x - 1}{x}$.
- $n(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$.



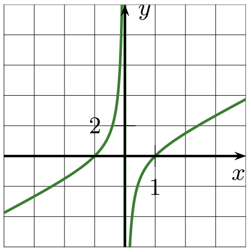

**1/**



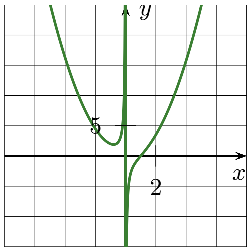

**3/**



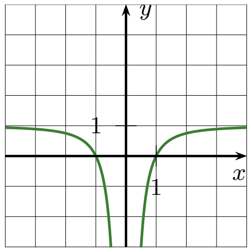

**5/**



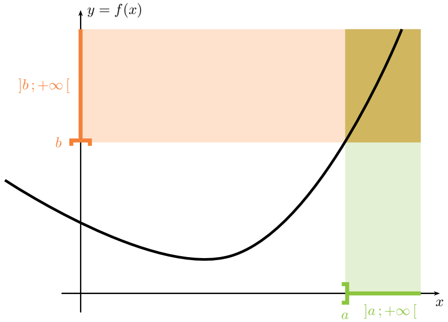
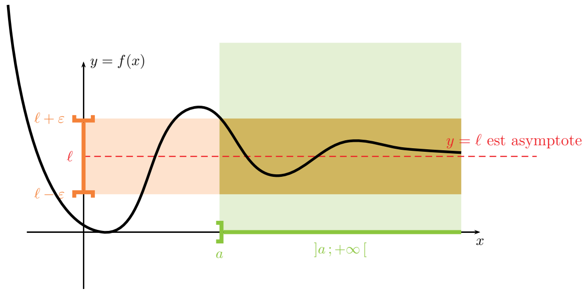
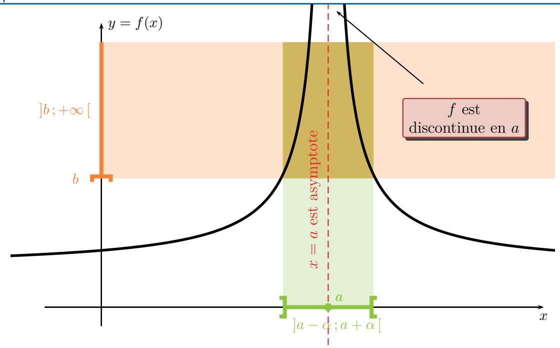
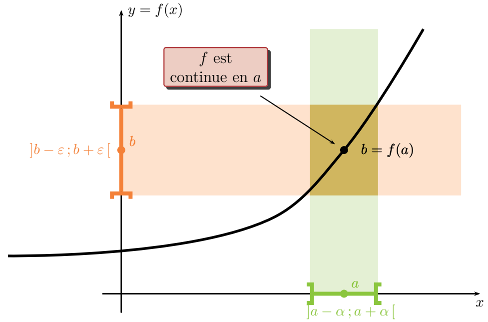

**2/**




**4/**




**6/**

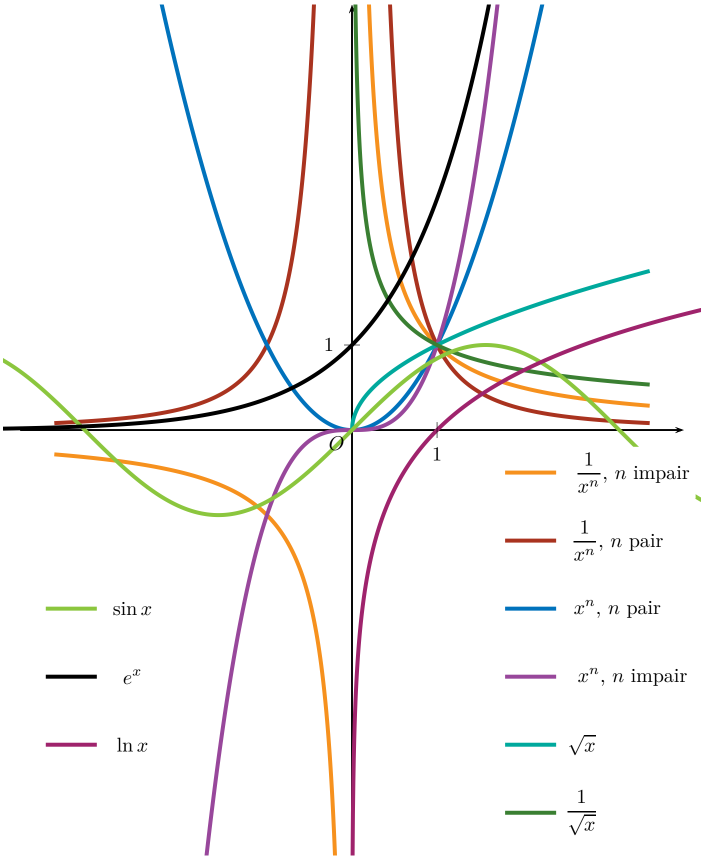
| | $f(x) \longrightarrow \infty$ | $f(x) \longrightarrow \ell$ |
|---|---|---|
| $x \longrightarrow \infty$ |  |  |
| | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff$ tout intervalle ouvert de la forme $]b\,;+\infty\,[$, $\beta \in \mathbb{R}$ , contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez « grand ».<br>$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}\,/\,\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > \alpha \implies f(x) \in ]\beta\,;+\infty\,[$. | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff$ tout intervalle ouvert contenant $\ell$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez « grand ».<br>$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}\,/\,\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > \alpha \implies f(x) \in ]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon\,[$. |
| $x \longrightarrow a$ |  |  |
| | $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff$ tout intervalle de la forme $]\beta\,;+\infty\,[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $a$ (*ie*) pour les $x$ d'un intervalle ouvert contenant $a$.<br>$\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*\,/\,\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \in ]a-\alpha\,;a+\alpha\,[ \implies f(x) \in ]\beta\,;+\infty\,[$. | $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff$ tout intervalle ouvert contenant $b$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $a$ (*ie*) pour les $x$ d'un intervalle ouvert contenant $a$.<br>$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*\,/\,\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \in ]a-\alpha\,;a+\alpha\,[ \implies f(x) \in ]b-\varepsilon\,;b+\varepsilon\,[$. |

$\lim\limits_{x \to \bigcirc} f(x) = \square \iff$ tout intervalle ouvert contenant $\square$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $\bigcirc$ (*ie*) pour les $x$ d'un intervalle ouvert contenant $\bigcirc$.

| $f(x)$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ |
|---|---|---|
| $x^n$ | $+\infty$ si $n$ pair<br>$-\infty$ si $n$ impair | $+\infty$ |
| $\dfrac{1}{x^n}$ | 0 | |
| $\sqrt{x}$ | non défini | $+\infty$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | non défini | 0 |
| $\sin x$ | pas de limite | |
| $\ln x$ | non défini | $+\infty$ |
| $e^x$ | 0 | $+\infty$ |
| $\dfrac{e^x}{x}$ | 0 | $+\infty$ |
| $xe^x$ | 0 | $+\infty$ |
| $\dfrac{\ln x}{x}$ | non défini | 0 |

| $f(x)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{x^n}$ | $+\infty$ si $n$ pair<br>$-\infty$ si $n$ impair | $+\infty$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | non défini | $+\infty$ |
| $\ln x$ | non défini | $-\infty$ |
| $x\ln x$ | 0 | |
| $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ | 1 | |
| $\dfrac{e^x-1}{x}$ | 1 | |

Limites démontrées en cours. À SAVOIR.




$$1 \prec \ln x \prec \sqrt{x} \prec x \prec x^m \prec x^n \prec e^x.$$

En $\infty$ seulement ! $(m<n)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & b \arrow[r, "g"] & c \end{tikzcd}$$

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big).$$

**Gendarmes**

$$\left.\begin{array}{r} g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

**Comparaison**

$$\left.\begin{array}{r} g(x)\leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

**Position relative d'une courbe et de son asymptote :**

On factorise et on étudie le signe de $f(x)-\ell$ ou $f(x)-(ax+b)$.

| $x$ | $A$ | $\delta$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)-\ell$ | $+$ | 0 | $-$ |
| Position de $\mathscr{C}_f$ et $(\mathscr{D})$ | $\mathscr{C}_f$ au dessus de $(\mathscr{D})$ | | $\mathscr{C}_f$ au dessous de $(\mathscr{D})$ |

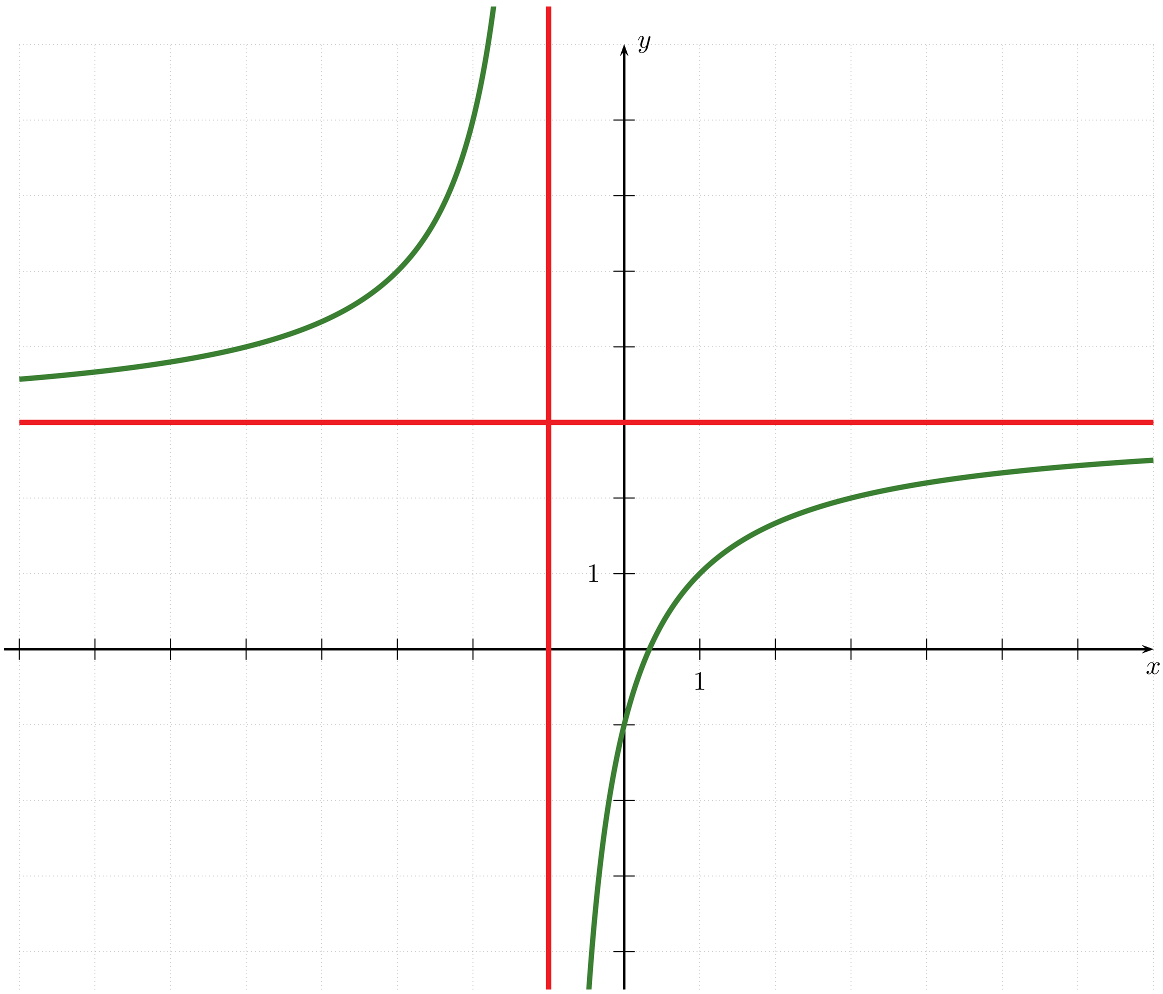
# Fonctions - Suites

1

**Exercice (Retrouver l'équation d'une courbe)** Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe représentative d'une fonction homographique $f$ est de ses deux asymptotes. On a donc

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ sont des nombres réels tels que } c \neq 0 \text{ et } ad - bc \neq 0.$$

On admettra par la suite que l'on peut supposer $c = 1$.




**1/** Donner le domaine de définition de $f$.

**2/** (a) Donner l'équation de l'asymptote verticale à la courbe.

(b) En déduire la valeur de $d$.

**3/** (a) Donner la limite de $f$ en $\pm\infty$.

(b) En déduire et justifier la valeur de $a$.

**4/** A l'aide d'un point de la courbe, déterminer la valeur de $b$.

**5/** (a) Dresser le tableau de variations **complet** de $f$.

(b) Quel est le signe de la dérivée de $f$ ?

**2**

**Exercice (Suite homographique)** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel $n$, par :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$$

**1/** On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

(a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) Exprimer le terme général $v_n$ en fonction de $n$.

(c) En déduire le terme général $u_n$ en fonction de $n$.

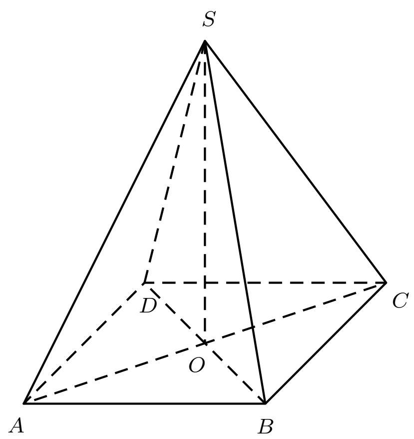
**2/** En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**3/** Après quelques justifications, représenter sur la courbe précédente les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Pensez à tracer la droite d'équation $y = x$ !)

**3**

**Exercice**

$SABCD$ est une pyramide à base carrée régulière, c'est-à-dire dont la hauteur est perpendiculaire à la base en son centre $O$.




**1/** (a) Montrer que $(BD)$ est perpendiculaire au plan $(SAC)$.

(b) En déduire que $(BD)$ et $(SA)$ sont orthogonales ?

**2/** On pose $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[SB]$ et $[AD]$.

(a) Justifier que $(IJ)$ et $(SA)$ sont parallèles.

(b) A l'aide de la question (1b), montrer que les droites $(IK)$ et $(SA)$ sont orthogonales.

(c) Que dire de la nature du triangle $IJK$ ? Justifier.

*Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière.*

**D. Hilbert**

Chapitre

4

# Probabilités Conditionnelles - Lois discrètes

Prélude au prochain chapitre sur les lois continues qui aboutira à la loi normale, ce présent chapitre revient rapidement sur les connaissances de première quant à la loi binomiale et au calcul des probabilités avant de définir les probabilités conditionnelles ainsi que l'indépendance de deux événements.

**Sommaire**

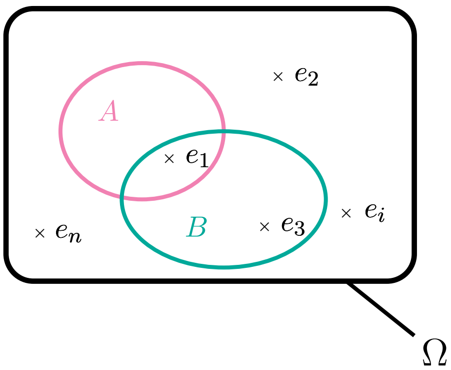


## I Probabilité (Rappels)

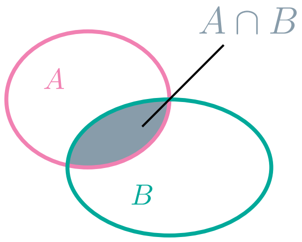
### I.1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers $\Omega$ est l'ensemble des issues possibles.
- Un événement $A$ est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire $e_i$ est un événement ne comportant qu'un seul élément.

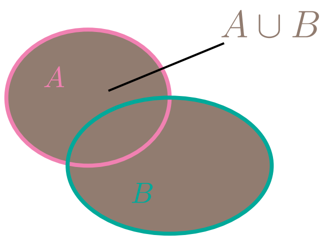


- L'événement $A \cap B$ (noté aussi « $A$ et $B$ ») est l'événement formé des éléments de $\Omega$ appartenant à $A$ et à $B$.



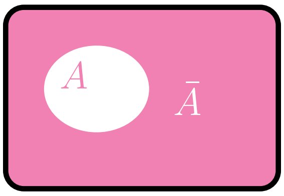

$$A \cap B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

- L'événement $A \cup B$ (noté aussi « $A$ ou $B$ ») est l'événement formé des éléments de $\Omega$ appartenant au moins à l'un des événements $A$ ou $B$.




$$A \cup B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- L'événement contraire de l'événement $A$ est l'événement noté $\bar{A}$ formé de tous les éléments de $\Omega$ n'appartenant pas à $A$.




$$\bar{A} = \{x \in \Omega \,/\, x \notin A\} = \Omega \setminus A.$$

- Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et si à chaque issue $e_i$ on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1$ et $P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur $\Omega$.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

**Proposition 1**

Pour tous événements A et B :

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
  (si $A$ et $B$ sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ )
- Pour une loi équirépartie :

$$P(A) = \frac{\text{Nbre d'éléments de } A}{\text{Nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}}.$$

[ Exercices 105 et 106 page 364
Exercice 113 page 365 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## I.2 Variable aléatoire

**Définition 1**

Une variable aléatoire $\mathbb{X}$ définie sur un univers $\Omega$ est une fonction qui à chaque issue $\omega_i$ associe un réel $x_i$. La probabilité que $\mathbb{X}$ prenne la valeur $x_i$ est alors notée $P(\mathbb{X}=x_i)$ ou $p_i$.

$$\mathbb{X}: \begin{array}{ccc} \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega_i & & x_i \end{array}.$$

**Proposition 2**

- Définir la loi de probabilité de $\mathbb{X}$, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $\mathbb{X}=x_i$.
- Espérance mathématique de $\mathbb{X}$ : $E(\mathbb{X})=\sum p_i x_i=\sum_{i=1}^{n} p_1\times x_1+\ldots+p_n\times x_n$.

  L'espérance représente la valeur moyenne que prend $\mathbb{X}$ si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.
- Variance de $\mathbb{X}$ : $V(\mathbb{X})=\sum p_i x_i^2-E^2(\mathbb{X})=p_1\times x_1^2+\ldots+p_n\times x_n^2-E^2(\mathbb{X})$.
- Écart-type de $\mathbb{X}$ : $\sigma(\mathbb{X})=\sqrt{V(\mathbb{X})}$.

**Exemple 1:** On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 euros dans le cas contraire. $\mathbb{X}$, la variable aléatoire égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.

On a $P(\mathbb{X}=6)=\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{8}{27}$ et $P(\mathbb{X}=-3)=1-P(\mathbb{X}=6)=\dfrac{19}{27}$.

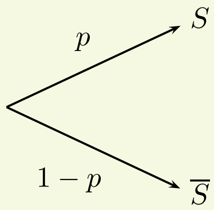
$E(\mathbb{X})=-3\times\dfrac{19}{27}+6\times\dfrac{8}{27}=-\dfrac{1}{3}$.

$V(\mathbb{X})=(-3)^2\times\dfrac{19}{27}+6^2\times\dfrac{8}{27}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{152}{9}$ et $\sigma(\mathbb{X})=\sqrt{\dfrac{152}{9}}=\dfrac{2\sqrt{38}}{3}$.

## I.3 Loi binomiale

**Définition 2**

- On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre).

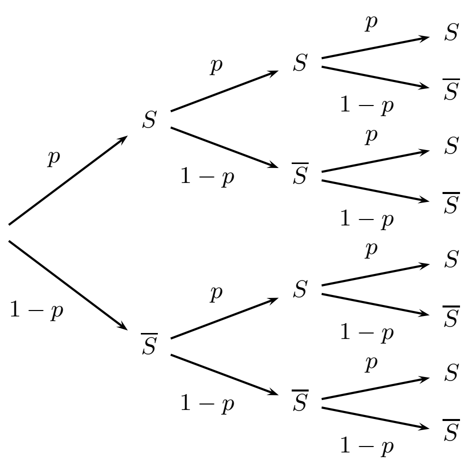



| $\mathbb{X}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(\mathbb{X}=k)$ | $1-p$ | $p$ |

- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

**Définition 3** (Loi binomiale)

Étant donnés une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès est $p$ et un schéma de Bernoulli consistant à répéter $n$ fois de manière indépendante cette épreuve. Si on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès, la loi de probabilité de $\mathbb{X}$ est appelée loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ et est notée $\mathscr{B}(n,p)$.




| $\mathbb{X}$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(\mathbb{X}=k)$ | $(1-p)^3$ | $3p(1-p)^2$ | $3p^2(1-p)$ | $p^3$ |

**Proposition 3**

Soit $\mathbb{X}$ une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

- Probabilité d'obtenir $k$ succès : $P(\mathbb{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
- Espérance de $\mathbb{X}$ : $E(\mathbb{X})=np$.
- Variance et écart-type de $\mathbb{X}$ : $V(\mathbb{X})=np(1-p)$ et $\sigma(\mathbb{X})=\sqrt{np(1-p)}$.

[ Exercices 109 et 110 page 364
Exercice 114 page 365 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

1

**Exercice (Représentation symétrique)** On lance 8 fois une pièce de monnaie.

Déterminer et représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathbb{X}$ qui représente le nombre de « piles » obtenus.

**Correction:** Les 8 lancés sont à priori indépendants car la pièce est lancée toujours de la même façon.

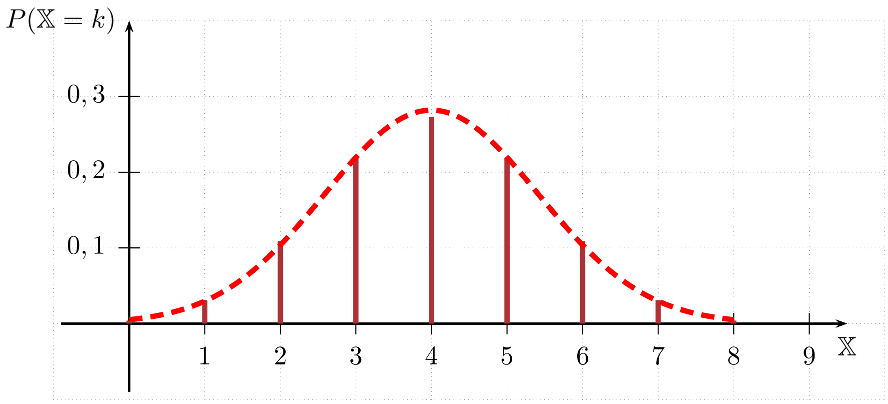
La probabilité sur un lancé d'obtenir « pile » est de 0,5 (on suppose que la pièce est équilibrée). On obtient alors :

$$P(\mathbb{X}=k)=\binom{8}{k}0,5^k 0,5^{8-k}=\binom{8}{k}0,5^8.$$

On obtient alors le tableau de la loi de probabilité (à $10^{-3}$) suivant :

| $\mathbb{X}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\mathbb{X}=k)$ | 0,004 | 0,031 | 0,109 | 0,219 | 0,273 | 0,219 | 0,109 | 0,031 | 0,004 |

On obtient la représentation de la loi binomiale $\mathscr{B}(8;\,0,5)$ suivante :




**Remarque:** Cette distribution est symétrique car la probabilité de succès est égale à la probabilité d'échec. On constate que la loi binomiale converge vers la loi normale (courbe en cloche) comme on le verra au chapitre suivant.

2

**Exercice (Représentation asymétrique)** Une urne contient 10 boules (indiscernables au toucher) : 4 boules sont rouges et les autres sont noires.

On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant la boule à chaque tirage.

Déterminer et représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathbb{X}$ qui représente le nombre de boules rouges obtenues.

**Correction:** Les 6 lancés sont indépendants car la boule est remise dans l'urne à chaque fois.

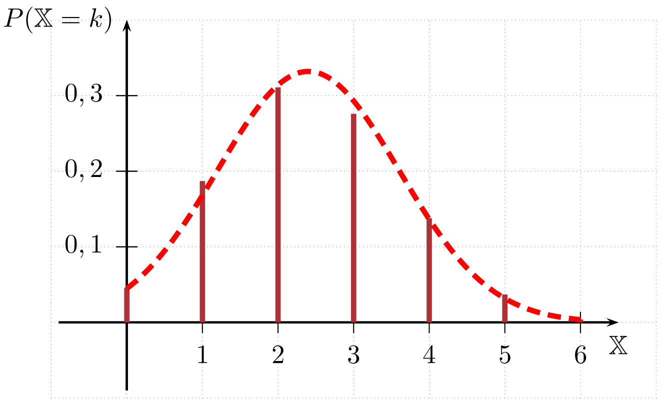
La probabilité sur un tirage d'obtenir une boule rouge est de 0,4 (les boules sont indiscernables au toucher). On obtient alors :

$$P(\mathbb{X}=k)=\binom{6}{k}0,4^k 0,6^{6-k},$$

et le tableau de la loi de probabilité (à $10^{-3}$) devient :

| $\mathbb{X}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\mathbb{X}=k)$ | 0,046 | 0,187 | 0,311 | 0,276 | 0,138 | 0,037 | 0,004 |

On obtient enfin la représentation de la loi binomiale $\mathscr{B}(6;\,0,4)$ :




## II Probabilités conditionnelles

**Définition 4**

Étant donnés deux événements $A$ et $B$ ($B \neq \emptyset$) d'un univers $\Omega$. On appelle probabilité de $B$ sachant $A$, le réel noté $P_A(B)$ tel que :

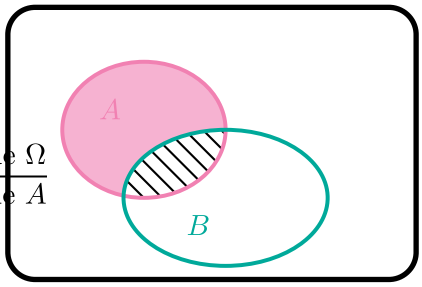
$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

On a alors : $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = P(B)\times P_B(A)$.

La probabilité de $B$ sachant $A$ correspond à la part de $B$ dans $A$, c'est à dire la part hachurée, $A\cap B$, dans l'ensemble $A$ qui devient pour un temps le nouvel univers des probabilités.

On a alors :

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{\text{Nombre d'éléments de } A\cap B}{\text{Nombre d'éléments de } A} \\ &= \frac{\text{Nombre d'éléments de } A\cap B}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega} \times \frac{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}{\text{Nombre d'éléments de } A} \\ &= P(A\cap B)\times\frac{1}{P(A)}. \end{aligned}$$



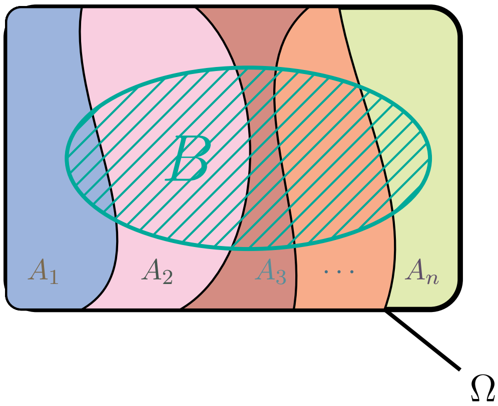

[ Applications page 331
Exercices 26 à 36 page 352 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

### II.1 Formule des probabilités totales

**Proposition 4**

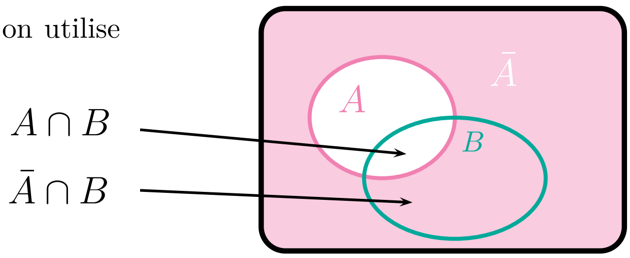
Si $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ forment une partitions de $\Omega$ (2 à 2 incompatibles et leur union forme $\Omega$), alors pour tout événement $B$, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B).$$




[ Exercice 41 page 353 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** Dans la plupart des cas, on utilise la partition $A$ et $\bar{A}$.




$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B).$$

Dans un arbre pondéré, par exemple, le nombre $n$ d'ensembles formant une partition donne le nombre de branches issues d'un nœud [1].

### II.2 Représentation par un arbre pondéré

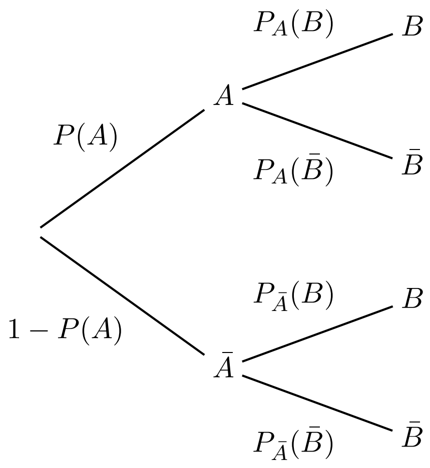
Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple $A$ et $\bar{A}$. Si on connaît les probabilité de $B$ et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de $A$ et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :

- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
$$P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B).$$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
$$P_A(B) + P_{\bar{A}}(B) = 1.$$

1. Voir juste après.

- La probabilité d'un événement $E$ est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à $E$.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B).$$




[ Applications page 333
Exercice résolu 3 page 346 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Méthode 1**

Pour calculer des probabilités conditionnelles, on peut :

- Utiliser un arbre pondéré.
- Utiliser une partition de l'univers et, en particulier : $\Omega = A \cup \bar{A}$

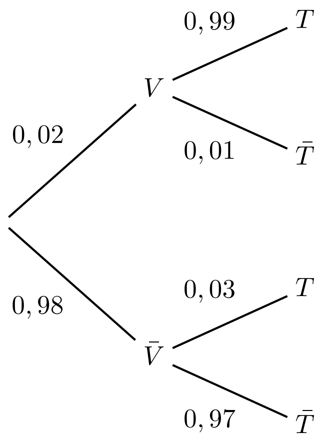
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \\ &= P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}). \end{aligned}$$

[ Exercice 119 page 366 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Exemple 2:** Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note $V$ l'événement « la personne est contaminée par le virus » et $T$ l'événement « le test est positif ».




**1/** Quelle est la probabilité que le test soit positif ?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap V) + P(T \cap \bar{V}) \\ &= 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,03 \\ &= 0,0492. \end{aligned}$$

**2/** Quelle est la probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif ?

$$P_T(V) = \frac{P(T \cap V)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,99}{0,0492} = 0,4024.$$

[ Exercice résolu 1 page 343
Exercices 43 à 48 page 354 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercices 92 et 93 pages 358 et 359
Exercices 100 à 103 pages 362 et 363 , **Maths Repère**, *Hachette*
Exercice I. page 369 ]

# III Indépendance

## III.1 Indépendance de deux événements

**Définition 5**

Deux événements $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si :

$$P_A(B) = P(B) \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ et } P(A) \neq 0.$$

On dit que les événements sont indépendants car qu'importe que l'événement $A$ soit réalisé ou non, la probabilité de $B$ ne dépend pas de $A$.

[ Vrai ou faux 17 et 18 page 351
Exercices 53 à 58 page 355 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Proposition 5**

Si les événements $A$ et $B$ sont indépendants, alors il en est de même pour :

**1/** $\bar{A}$ et $B$. **2/** $A$ et $\bar{B}$. **3/** $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

**ROC**

**1/** Comme $A$ et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers $\Omega$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.
Or, $A$ et $B$ sont indépendants (ie) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
D'où $P(B) = P(A)P(B) + P(\bar{A} \cap B)$ (ie)
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A}).$$
$\bar{A}$ et $B$ sont donc indépendants.

**2/** La démonstration est analogue en échangeant les rôles de $A$ et $B$.

**3/** D'après (1) $\bar{A}$ et $B$ sont indépendants. Puis, d'après (2), $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

[ Applications page 335
QCM 111 page 364
Vrai ou faux 113 page 365 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Méthode 2** (Montrer que deux événements sont indépendants ou pas ...)

- On calcule séparément $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$.
- Suivant l'égalité ou non, on conclue à l'indépendance ou non.

[ Exercice 119 page 366 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

### III.2 Indépendance deux variables aléatoires discrètes

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers $\Omega$ et telles que, pour chacune d'elles :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \,/\, i \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y}(\Omega) = \{y_j \,/\, j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$$

**Corollaire 1**

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes si, et seulement si

$$P\big((\mathbb{X} = x_i) \cap (\mathbb{Y} = y_j)\big) = P(\mathbb{X} = x_i) \times P(\mathbb{Y} = y_j),\ \forall \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p \end{array}.$$

**3** **Exercice** On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

On appelle $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la carte tirée est rouge et 0 sinon et on appelle $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la carte tirée est une figure et 0 sinon.

Démontrer que les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

**Correction:** Les lois de probabilité des variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont :

| $\mathbb{X}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(\mathbb{X}=x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $\mathbb{Y}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(\mathbb{Y}=y_i)$ | $\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$ | $\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$ |

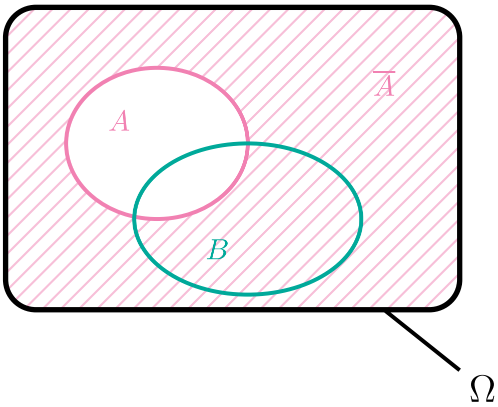
- $P(\mathbb{X}=0)\times P(\mathbb{Y}=0)=\dfrac{5}{16}$ et $P(\{\mathbb{X}=0\}\cap\{\mathbb{Y}=0\})=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{16}$.
- $P(\mathbb{X}=0)\times P(\mathbb{Y}=1)=\dfrac{3}{16}$ et $P(\{\mathbb{X}=0\}\cap\{\mathbb{Y}=1\})=\dfrac{6}{32}=\dfrac{3}{16}$.
- $P(\mathbb{X}=1)\times P(\mathbb{Y}=0)=\dfrac{5}{16}$ et $P(\{\mathbb{X}=1\}\cap\{\mathbb{Y}=0\})=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{16}$.
- $P(\mathbb{X}=1)\times P(\mathbb{Y}=1)=\dfrac{3}{16}$ et $P(\{\mathbb{X}=1\}\cap\{\mathbb{Y}=1\})=\dfrac{6}{32}=\dfrac{3}{16}$.

On en conclut que les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes.

[ Exercices 59 et 60 page 355 , **Maths Repère**, *Hachette*]

Pour une loi équirépartie :

$$P(A) = \frac{\text{Nbre d'éléments de } A}{\text{Nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}}.$$




$A \cap \overline{A} = \emptyset \implies A$ et $\overline{A}$ sont incompatibles.

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
  (si $A$ et $B$ sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.)

$A$ et $\overline{A}$ forment une partition de $A \implies$ $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

$$P(B) = P\big(A \cap B\big) + P\big(\overline{A} \cap B\big).$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \implies P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

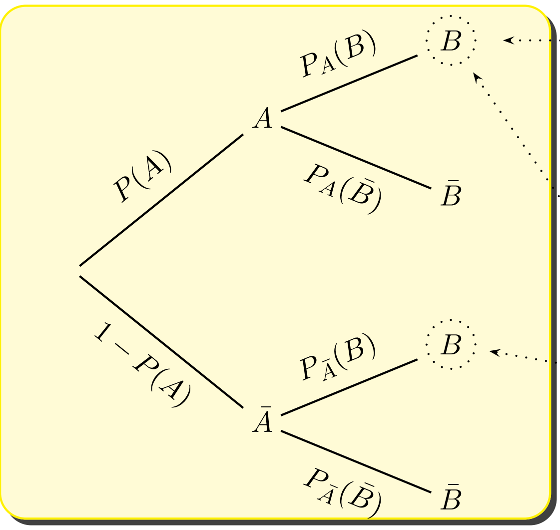
$A$ et $B$ indépendants $\iff \bar{A}$ et $B$ indépendants $\iff A$ et $\bar{B}$ indépendants

$\iff \bar{A}$ et $\bar{B}$ indépendants

$\iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A)$

$\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et $P(A) \neq 0$.

À calculer séparément !




$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

$P_A(B) + P_{\bar{A}}(B) = 1$.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B).$$

Variable aléatoire sur $\Omega$ : $\mathbb{X}$ : $\begin{array}{ccc} \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega_i & & x_i \end{array}$

Loi de probabilité de $\mathbb{X}$

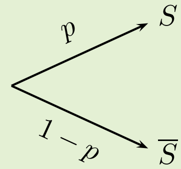
| $\mathbb{X}$ | $x_i$ | $\dots$ |
|---|---|---|
| $P(\mathbb{X} = x_i)$ | $p_i$ | $\dots$ |

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$V(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \Big( x_i - E(\mathbb{X}) \Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E^2(\mathbb{X})$$

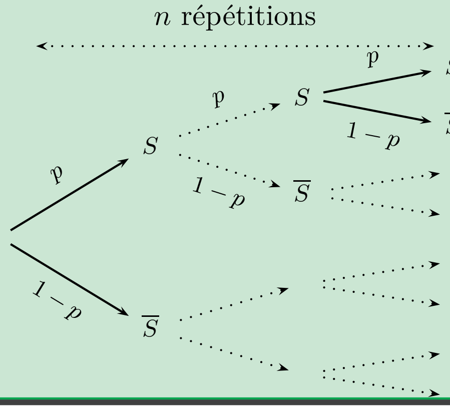
$$\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{V(\mathbb{X})}$$

- **Épreuve de Bernoulli :** expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles dont l'une, $S$, appelée succès, est de probabilité $p$.
- **Schéma de Bernoulli de paramètre $n$ et $p$ :** répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p$.




| $\mathbb{X}$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(\mathbb{X} = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

La loi de probabilité de $\mathbb{X}$ associant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli à $n$ répétitions suit la loi binomiale de paramètre $n$ et $p$ : $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathscr{B}(n\ ;\ p)$.




**Probabilité d'obtenir $k$ succès :**

$$P(\mathbb{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$E(\mathbb{X}) = np$$

$$V(\mathbb{X}) = np(1-p)$$

$$\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{np(1-p)}$$

Deux variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes $\iff$ $P\big((\mathbb{X} = x_i) \cap (\mathbb{Y} = y_j)\big) = P(\mathbb{X} = x_i) \times P(\mathbb{Y} = y_j)$, $\forall \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p. \end{array}$

Chapitre

# 5 Continuité

Avec ce chapitre, l'analyse réelle finit de s'étoffer en terminale S. Prennent ici tout leur sens, le lien entre les suites et les fonctions ainsi que le rôle d'une nouvelle notion, souvent cachée ou passée sous silence jusqu'ici : la continuité.

Un théorème doit attirer tout particulièrement votre attention, celui des valeurs intermédiaires et ses premières conséquences fondamentales. Commençons !

## Sommaire

# I Continuité

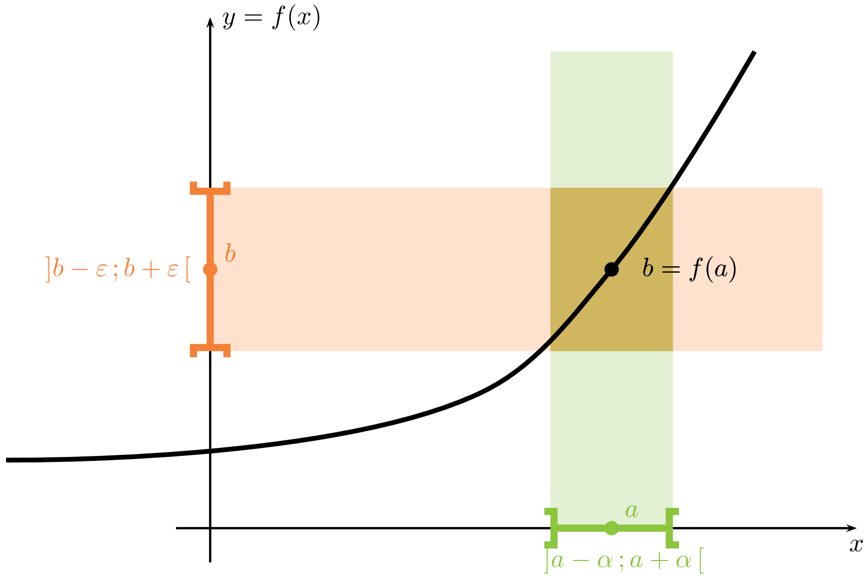
## I.1 Limite finie en un point

**Définition 1**

Dire qu'une fonction $f$ a pour limite $b$ en $a$, signifie que tout intervalle ouvert contenant $b$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez proche de $a$, c'est à dire pour les $x$ d'un intervalle ouvert contenant $a$. On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \;/\; \forall\, x \in \mathbb{R},\; x \in ]a-\alpha\,;a+\alpha\,[ \implies f(x) \in ]b-\varepsilon\,;b+\varepsilon\,[.$$



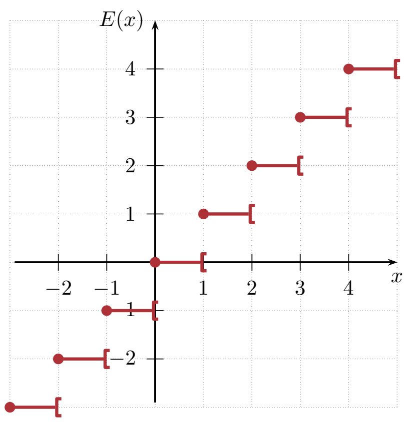

[ Applications page 67
Exercice 80 page 93 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** Parfois la fonction $f$ n'admet pas une limite en $a$, mais admet une limite à droite et une limite à gauche. C'est le cas de la fonction partie entière $E$.

**Exemple 1 (La fonction partie entière):**

Une propriété de $\mathbb{R}$ est que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.

La fonction partie entière $E : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{Z}$ est alors définie par $E(x) = n$.

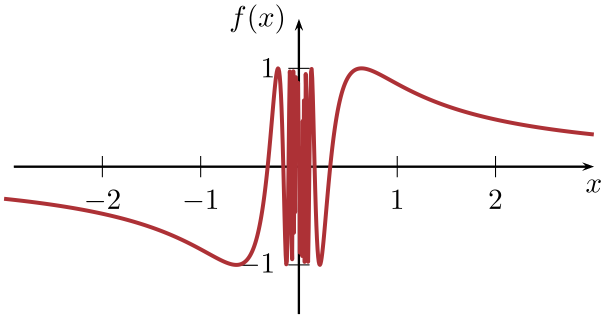



- $\lim\limits_{x\to 2^-} = 1$,
- mais $\lim\limits_{x\to 2^+} = 2$.

**ATTENTION** Certaines fonctions n'ont même pas de limites en un point.

Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$




En 0, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$. Comme la limite de $\sin(x)$ en l'infini n'existe pas, celle de $f(x)$ en 0 n'existe pas non plus.

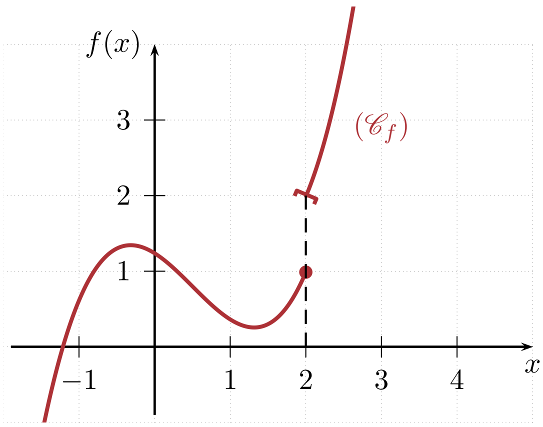
Passons à ce qui nous intéresse dans ce chapitre : le cas où la limite existe et correspond à nos attentes.

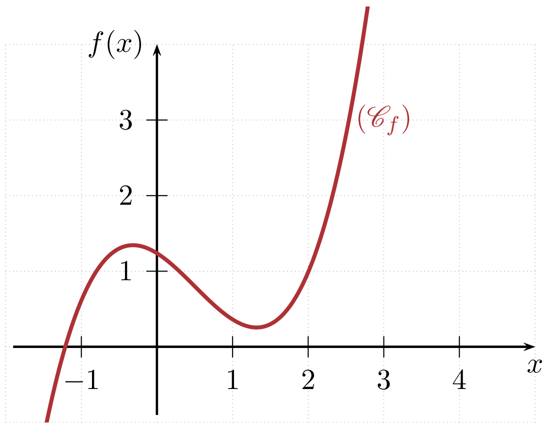
## I.2 Fonction continue en un point

**Définition 2**

Soient une fonction $f$ définie sur un intervalle ouvert $I$ et $a$ un élément de $I$.
On dit que la fonction $f$ est continue en $a$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
La fonction $f$ est continue sur un intervalle $I$ si, et seulement si, $f$ est continue en tout point de $I$.

Graphiquement, cela signifie que l'on ne « lève pas le crayon » autour de $f(a)$. La courbe n'a pas de discontinuité. Autrement dit, la courbe ne possède qu'un seul graphe et par extension, les fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et « partie entière » ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$.




La fonction de gauche présente « un saut » en $x = 2$ avec $f(2) = 1$. On a $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2 \neq f(2)$ : la fonction $f$ n'est pas continue en 2.

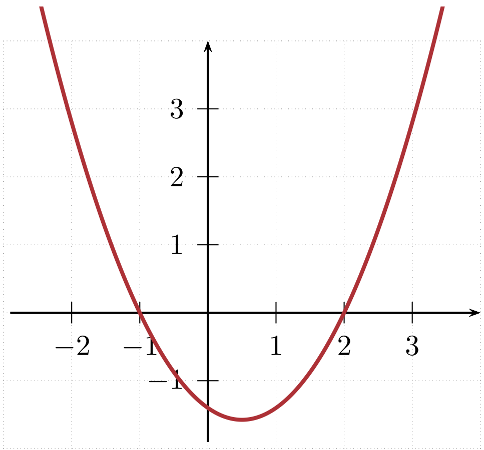
D'un autre point de vue, pour être continue en $a$, la limite en ce point doit nécessairement exister ce qui retire de la liste des fonction continues, la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ précédente.

**ATTENTION** Le domaine de définition ne donne qu'une information pour la continuité : si la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est effectivement discontinue en sa valeur interdite, la fonction $x \longmapsto E(x)$ est discontinue en tout point de $\mathbb{N}$ tout en étant définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

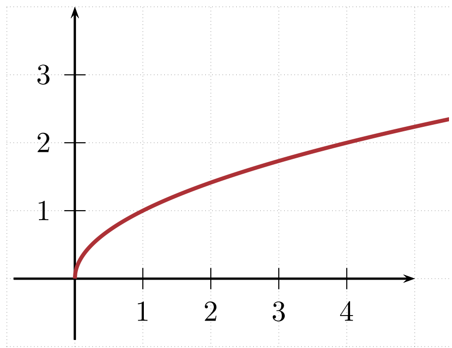
## I.3 Continuité des fonctions usuelles

**Proposition 1**

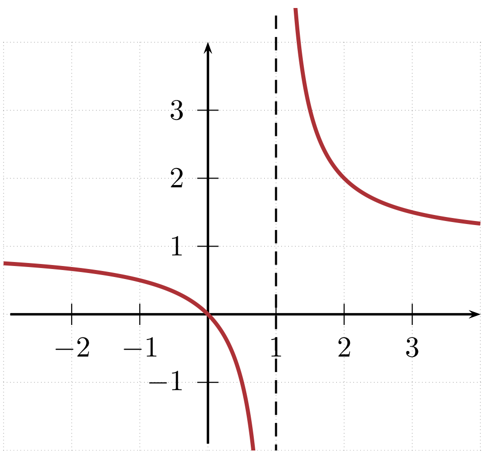
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0\,[$ et sur $]0\,;+\infty\,[$.
- La fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty\,[$.
- Les fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- D'une façon générale, toutes fonctions construites par opération ou par composition à partir des fonctions ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition. En particulier les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.



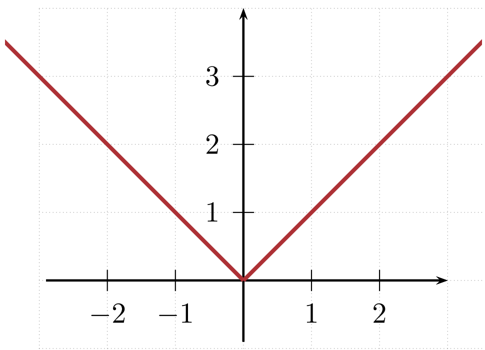

$x \longmapsto \dfrac{7}{10}(x+1)(x-2)$.



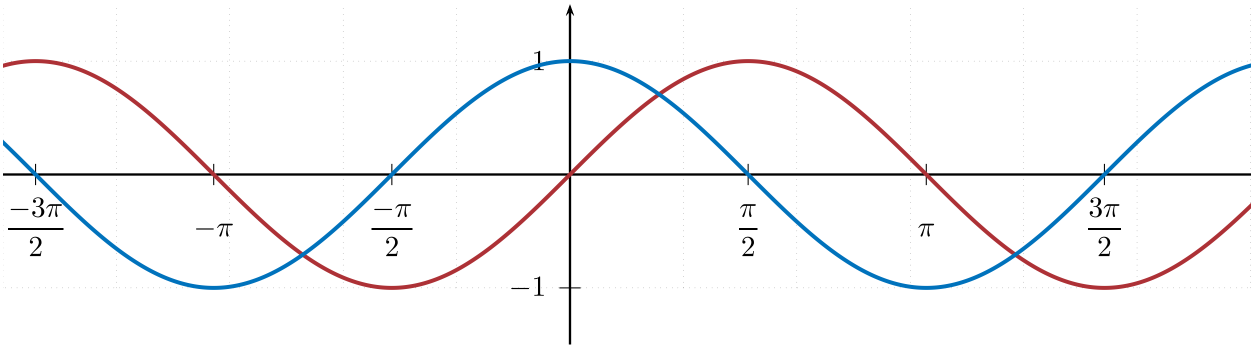

$x \longmapsto \sqrt{x}$.




$x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$.




$x \longmapsto |x|$.




$x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$.

[ Exercices 81 à 83 page 94 , **Maths Repère**, *Hachette*]

# II Les grands théorèmes

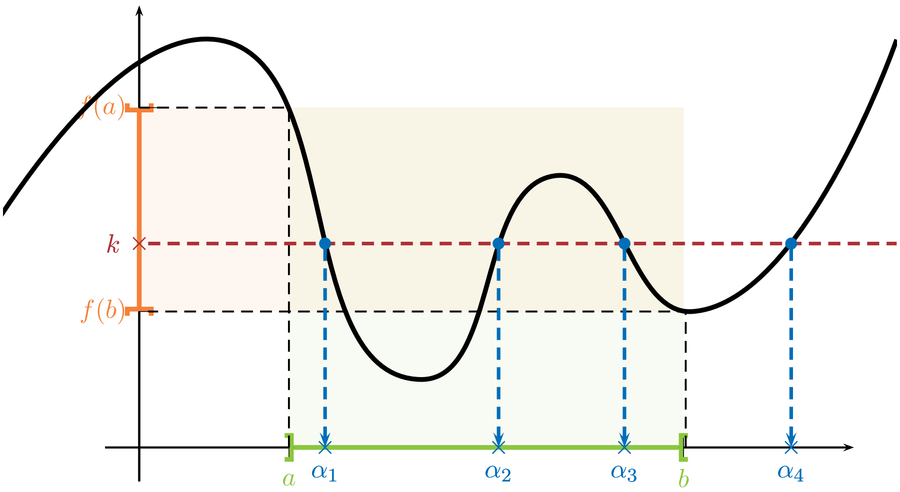
## II.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1** (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;b\,]$.
Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = k$.

**Preuve:** Malheureusement admis en terminale mais il est vrai que pour une fois, la démonstration mérite un peu plus de maturité mathématique. Tant pis !

Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$ [1].




1. Même si ce résultat semble évident et logique, il réclame cependant une connaissance fine de la topologie de $\mathbb{R}$ encore inaccessible en terminale S. Patience petits scarabées !

Graphiquement, si $f$ est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ alors la droite d'équation $y = k$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ seront nécessairement sécantes.

Tout élément $k$ de l'intervalle image $f([a\,;b])$ possède alors au moins un antécédent de l'intervalle $[a\,;b]$. Sur la figure ci-dessus, les trois valeurs $c_1$, $c_2$ et $c_3$ conviennent. La valeur $c_4$, hors de $[a\,;b]$, doit être écartée.

D'un point de vue équation, si $k \in f([a\,;b])$, $f(x) = k$ possède au moins une solution.

[ Exercices 84 à 86 page 94
QCM 8 page 86
Vrai ou faux page 87 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Il est cependant rare que l'on se contente de l'existence seule des solutions d'une équation. La simple continuité ne suffit pas à imposer l'unicité. On rajoute donc une propriété supplémentaire : la stricte monotonie.

**Théorème 11** (Théorème de la bijection)

Soit une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a\,;b]$.
Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = k$.

[ Applications page 69
Exercices 87 à 90 pages 94 et 95 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarques:**

- L'équation $f(x) = k$ possède donc une unique solution dans l'intervalle $I$. Ce théorème est à la base de procéder extrêmement puissant pour résoudre nombre d'équations dont on ne connaît pas les valeurs exactes des solutions. Pour vous, cela signifie beaucoup d'exercices différents et de jolis sujets de bac en perspective.

- Comme $f$ est continue tout élément de $I$ possède une image dans $f(I)$ mais la stricte monotonie implique dans l'autre sens que tout élément de $f(I)$ possède aussi un unique antécédent dans $I$. On pourrait alors très bien définir une fonction $y \longmapsto g(y)$ où $g(y)$ serait l'unique antécédent de $y$. Cette fonction s'appelle alors la fonction réciproque de $f$. Nous y reviendrons très vite !

- Ce théorème se généralise à l'intervalle ouvert $I = ]a\,;b[$ en exigeant que $k$ se trouve entre $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

- Un tableau de variations pourra être suffisant pour montrer la continuité et la monotonie de la fonction sur un certain intervalle.

**Exemple 2:**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $5$ |

- La fonction $f$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[2\,;+\infty\,[$. Pour tout élément $k$ de $[-1\,;5\,[$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution $\alpha$ appartenant à l'intervalle $[2\,;+\infty\,[$.
- Le même raisonnement s'applique sur les intervalles $]-\infty\,;1\,[$ ou $]1\,;2\,]$ avec $k$ élément respectivement de $\mathbb{R}$ ou $[-1\,;+\infty\,[$.
- Mais **ATTENTION** , on ne pourra ni appliquer ce théorème sur l'intervalle $\mathbb{R}$ tout entier où la fonction n'est pas continue en tout point, ni l'appliquer à l'intervalle $]1\,;+\infty\,[$ où la fonction n'est pas strictement monotone.

[ Exercice résolu 7 page 80
Vrai ou faux 28 page 87 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**1** **Exercice** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + x - 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0\,;1\,]$ et proposer un algorithme permettant de donner un encadrement de celle-ci à $10^{-6}$ près.

Voici un exercice standard de bac qu'il faut bien comprendre. On va le faire doucement.

**Correction:** L'énoncé propose deux questions : tout d'abord montrer que l'équation possède effectivement une solution ensuite la trouver.

- Tout d'abord la continuité pour l'existence de la solution : $f$ est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0\,;1\,]$.
- Ensuite la stricte monotonie pour l'unicité. Deux méthodes pour cela : la première, prouver que la dérivée est de signe strictement constant sur $\mathbb{R}$ [2]. La deuxième, plus fine, $f$ est la somme de deux fonctions strictement monotones $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto x+1$ donc est strictement monotone.

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

- On conclue en appliquant le théorème de la bijection : $f$ est continue et strictement monotone de $[0\,;1\,]$ dans $[-1\,;1\,]$. Comme $0 \in [-1\,;1\,]$, il existe une unique valeur $\alpha$ de $[0\,;1\,]$ telle que $f(\alpha) = 0$.
- Maintenant que l'on sait que cette valeur existe [3], on peut mettre en place des procédés pour la trouver au mieux. Un de ces procédé s'appelle **la méthode par dichotomie** [4] : on divise à chaque étape l'intervalle en deux et on réitère l'opération tout en s'assurant que $\alpha$ se trouve toujours dans l'intervalle choisi.
  - Á la première étape, on prend $[A\,;B\,] = [0\,;1\,]$. Comme $f(0) \times f(1) < 0$, on est assuré que $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires, c'est-à-dire que $0 < \alpha < 1$.

- On divise l'intervalle en deux et on considère $\dfrac{A+B}{2}$. Si $f(0) \times f\left(\dfrac{A+B}{2}\right) < 0$ alors $0 < \alpha < \dfrac{A+B}{2}$ et on prend alors $\left[0\,;\dfrac{A+B}{2}\right]$ comme nouvel intervalle $[A\,;B]$ sinon on prend $\left[\dfrac{A+B}{2}\,;1\right]$
- Ensuite, on recommence avec le nouvel intervalle $[A\,;B]$. De proche en proche, on obtient une valeur approchée de $\alpha$ à la précision que l'on veut.

```
VARIABLES
A, B, C SONT_DU_TYPE NOMBRE
P, N SONT_DU_TYPE NOMBRE
f EST_DU_TYPE FONCTION
DEBUT_ALGORITHME
  Lire A, B, P
  N PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE B − A > 10^(−P) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    C PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
    SI f(A) × f(C) > 0 ALORS
    A PREND_LA_VALEUR C
    SINONB PREND_LA_VALEUR C
    FIN_TANT_QUE
  N PREND_LA_VALEUR N+1
  Afficher A, B, N
FIN_ALGORITHME
```

On rentre $A = 0$, $B = 1$, $P = 6$ et $f(x) = x^3 + x - 1$.

On obtient alors : $A = 0,682327$, $B = 0,682328$ et $N = 20$et il faut donc 20 itérations pour obtenir la précision demandée.

[ Exercice 154 page 106
Exercices 91 à 95 page 95 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercices 123 et 124 page 99 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## II.2 Théorème du point fixe

On va enfin pouvoir démontrer le théorème annoncé dans le chapitre sur les suites.

**Théorème III**

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers un réel $\ell$.
Si la fonction associée $f$ est continue en $\ell$, alors la limite de la suite $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$.

**Preuve:** Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$.

Or, la fonction $f$ est continue en $\ell$ (*ie*) $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$.

Par composition, on en déduit que $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Donc $f(\ell) = \ell$ (*ie*) $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$.

[ Exercice 130 page 102 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

4. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ !
4. et seulement maintenant !
4. « couper en deux » en grec

**ATTENTION** Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Comme exemple, revenons sur un exercice standard et déjà traité.

2

**Exercice** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \sqrt{2u_n+3} \end{cases}$.

On considère la fonction définie pour $x \in [0\,;3]$ par : $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

**1/** Calculer la dérivée de la fonction $f$. En déduire que la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;3]$ et dresser son tableau de variations. Préciser les valeurs de de la fonction aux bornes de cet intervalle.

**2/** Démontrer que : si $x \in [0\,;3]$ alors $f(x) \in [0\,;3]$.

**3/** Démontrer par récurrence, que pour tout entier $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

**4/** Démontrer par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

**5/** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**6/** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Correction:** Les premières questions ne concernent pas ce chapitre. Intéressons-nous seulement à la dernière question.

D'après la question (5), la suite est convergente vers une limite $\ell$, solution, d'après le théorème précédent, de l'équation $f(x) = x$.

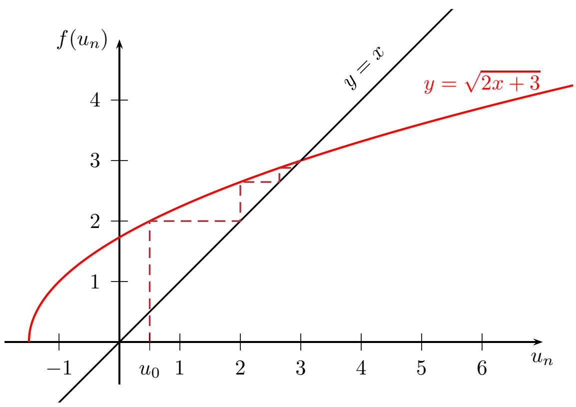
On résout donc cette équation :

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \iff x = \sqrt{2x+3}$$
$$x^2 = 2x+3 \iff x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$

Les deux seules valeurs possibles pour $\ell$ sont donc $\ell = -1$ ou $\ell = 3$.

D'après la question (3), pour tout entier $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. On peut donc écarter la valeur $-1$ et conclure.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 3$.




[ Exercice 134 page 103 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice 135 page 103
Exercice 145 page 105 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Chapitre

# 6 Dérivation

Après quelques rappels de première, on étudiera de manière plus qualitative la notion de dérivabilité d'une fonction ainsi que les conséquences graphiques notamment.

En terme de savoir-faire, tout repose sur la formule de dérivation d'une fonction composée, prélude nécessaire à toute étude de fonction.

## Sommaire



*Les mathématiques sont un jeu qu'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles et des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière.*

**David. Hilbert (1862-1943)**

1. Leonhard Euler (1707-1783) : mathématicien suisse. Un des mathématiciens les plus productifs de tous les temps. Il a travaillé dans beaucoup de domaines (notre trigonométrie moderne provient essentiellement de son *Introductio* de 1748). Il est aussi l'inventeur de beaucoup de notations que nous utilisons encore aujourd'hui ($\pi$, $\Sigma$ pour les sommes, $r$ pour les rayons, $A$, $B$, ...pour les sommets d'un polygone, cos et sin, ...)

# I Rappels

## I.1 Nombre dérivé

**Définition 1**

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ contenant le nombre $a$. Si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers une valeur finie lorsque $h$ tend vers 0 alors on dit que $f$ est **dérivable** en $a$ et on note :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.} \tag{6.1}$$

Dans ce cas, le nombre $f'(a)$ est appelé le **nombre dérivé** de $f$ en $a$.

Par définition, le nombre dérivé en $a$, s'il existe, est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe en au point d'abscisse $a$.

**Proposition 1** (Équation de la tangente)

Soient $f$ une fonction définie sur $I$, $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère et $a \in I$.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ est

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a).}$$

**Preuve:**

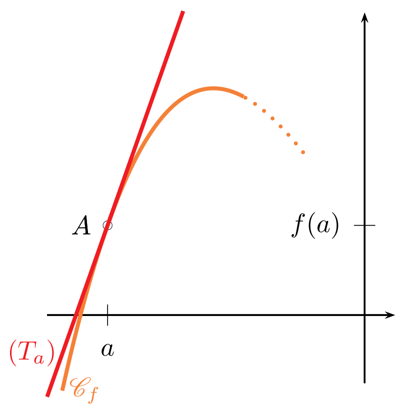
Soit $(T_a)$ la tangente à la courbe au point $A\,(a\ ;\ f(a))$. Son coefficient directeur est, par définition, $f'(a)$ donc l'équation réduite de $(T_a)$ est de la forme :

$$y = f'(a)x + b.$$

$A \in (T_a)$ donc $f(a) = f'(a)a + b$ et $b = f(a) - af'(a)$.

L'équation de $(T_a)$ est donc $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$ soit, en arrangeant un peu :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a).}$$

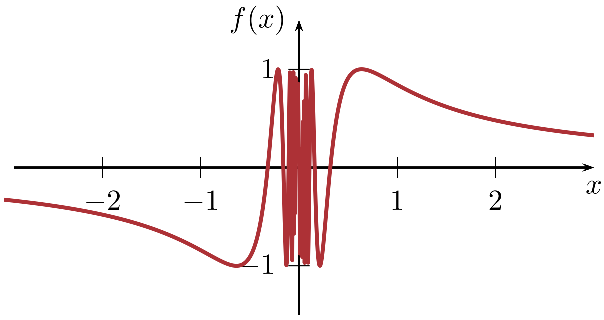



[ Exercice 160 page 107
TP Info page 108 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## I.2 Cas de non-dérivabilité

Il suffit d'observer la définition même et de comprendre l'apport de chaque notion :

- Dans l'expression du nombre dérivée, il est nécessaire que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ (*ie*) la fonction $f$ doit nécessairement être continue. Une fonction du style de $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ne saurait donc être dérivable en 0.



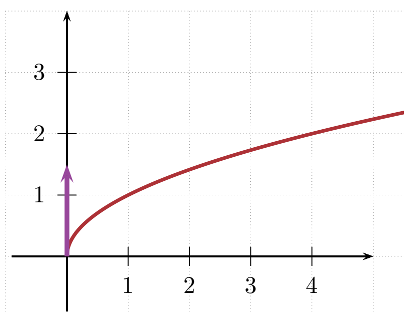

- De la même manière, si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ n'existe pas, la fonction ne peut être dérivable. Deux cas principaux se présenteront à nous :

  - La limite est infinie :

**Exemple 1:** La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais, en 0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

La tangente ou plutôt la demi-tangente est parallèle à l'axe des ordonnées. On parle de demi-tangente « verticale ».

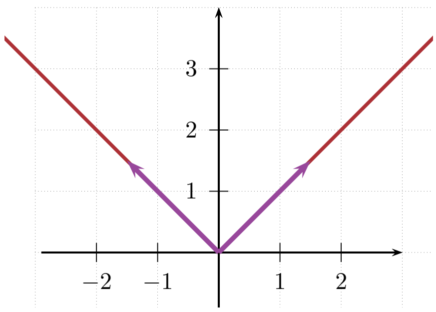



  - La limite à gauche et à droite du taux d'accroissement existent mais sont différentes :

**Exemple 2:** L'exemple le plus simple est celui de la valeur absolue $x \longmapsto |x|$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{-h}{h} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{h}{h} = 1.$$

1. Impossible ici de calculer le taux de variation $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ et encore moins sa limite.




La courbe représentative n'admet pas de tangentes en 0 mais seulement deux demies-tangentes.

**Corollaire 1**

Une fonction $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si sa courbe représentative admet une tangente au point d'abscisse $a$.

# II Fonction dérivée

Généralisons et formalisons les résultats de la partie précédente :

**Définition 2**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.

- Si, pour tout $x$ de $I$, $f$ est dérivable en $x$, on dit que $f$ est dérivable sur $I$.
- La fonction définie sur $I$ par $x \longmapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de $f$. Cette fonction est notée $f'$.

## II.1 Continuité et Dérivabilité

**Théorème 1** (Dérivabilité entraîne continuité)

- Si $f$ est dérivable en $a$ alors la fonction $f$ est continue en $a$.
- Si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ alors la fonction $f$ est continue sur $I$.

**Preuve:** La démonstration de ce théorème est hors-programme.[2]

Globalement, il suffit de linéariser. $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si il existe une quantité $f'(a)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \quad \text{où} \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

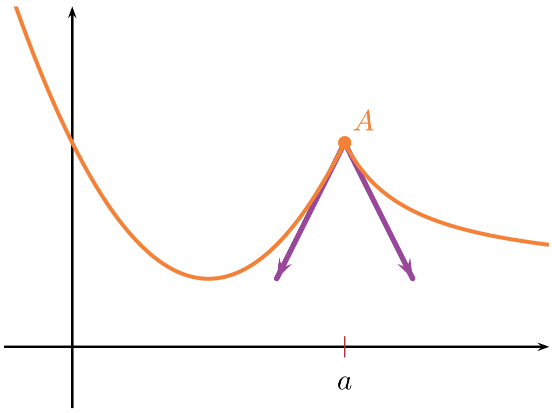
Il est alors clair que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. La fonction $f$ est donc continue en $a$.

Ce théorème explique simplement que la notion de dérivabilité est plus forte que celle de continuité comme l'était déjà la notion de continuité par rapport à celle de définition. On pourra donc trouver des fonctions continues sans qu'elles soient dérivable mais pas l'inverse.

**ATTENTION** La réciproque de ce théorème est fausse. Pour s'en rendre compte, on peut s'appuyer sur les représentations graphiques de la partie précédente :

- Si une fonction est continue sur un intervalle, sa représentation graphique est en un seul morceau.
- Si la fonction est dérivable sur un intervalle, sa représentation graphique admet, d'après le **corollaire** (1), une tangente en chacun de ses points.

Comme explicité précédemment, les premiers exemples à avoir en tête sont la fonction valeur absolue et la racine carrée et globalement, l'image à avoir en tête est celle de la fonction ci-dessous :




La fonction est bien continue en $a$, car la courbe est en un seul morceau.

Par contre, la fonction n'est pas dérivable en $a$, car la représentation admet au point $A$ deux demi-tangentes.

On dit que la courbe admet **un point anguleux** en $a$.

1

**Exercice** Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Montrer que $f$ est continue mais n'est pas dérivable en 1. Donner une interprétation géométrique.

2

**Exercice** Soit $f$ la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + |x|}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

**1/** La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

**2/** La fonction $f$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ ?

## II.2 Un peu de cinématique

On considère un objet en mouvement sur un axe. On note $t$ la durée en secondes de son parcours, et $x(t)$ la distance en mètres, parcourue après $t$ secondes.

2. Argh !

On note $t_0$ et $t_1 = t_0 + h$ deux instants : le quotient $\dfrac{x(t_1) - x(t_0)}{h}$ est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t_0$ et $t_1 = t_0 + h$.

**Définition 3**

Dans les conditions précédentes, la limite quand $h$ se rapproche de 0 de la vitesse moyenne [3] est appelée *vitesse instantanée* de l'objet à l'instant $t_0$.

$$V(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \tag{6.2}$$

Deux manières de voir ce résultat :

- La vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne lorsque l'écart entre les deux points de mesure tend vers 0.
- La vitesse instantanée est la dérivée première de la position. [4]

**Exemple 3:** On lâche un objet en chute libre. On note $x(t)$ la distance parcourue (en m) après $t$ secondes. On admet que la distance parcourue s'exprime en fonction du temps de parcours par

$$x(t) = 4,9t^2.$$

Calculer la vitesse instantanée de l'objet après une chute de $t$ secondes.

**Première méthode :** On exprime la vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t$ et $t + h$ :

$$v = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{4,9(t+h)^2 - 4,9t^2}{h}$$

En développant, réduisant et simplifiant, on obtient :

$$v = \frac{4,9(t^2 + 2th + h^2) - 4,9t^2}{h} = \frac{9,8th + 4,9h^2}{h} = 9,8t + 4,9h$$

Lorsque $h$ tend vers 0, ce quotient se rapproche de $9,8t$ : $\lim\limits_{h \to 0}(9,8t + 4,9t) = 9,8t$.

Donc la vitesse instantanée de l'objet en chute libre est donnée par l'expression

$$v(t) = x'(t) = 9,8t.$$

**Deuxième méthode :** On calcule la dérivée de la position :

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 4,9 \times 2t = 9,8t.$$

Après 5 secondes de chute libre, la vitesse est de $9,8 \times 5 = 49$ m/s. (soit 179,4 km/h).

**Remarque:** Les physiciens expriment volontiers une variation à l'aide du symbole $\Delta$. Ils notent ainsi $\Delta t = t_1 - t_0$ et $\Delta x = x_1 - x_0$.

Pour une variation très petite, reprenant une notation introduite par Isaac Newton, on note alors $dt$ et $dx$. On obtient ainsi la notation différentielle de la dérivée :

3. c'est à dire le nombre dérivé de $x$ en $t_0$
4. C'est quoi la dérivée seconde ?

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

L'avantage de cette notation est de rendre bien visible la variable par rapport à laquelle on dérive. Ici, la position $x(t)$ est dérivée par rapport au temps.

En mathématiques, et temps que l'on ne considérera que des fonctions d'une seule variable, on note plus simplement $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$.

[ Exercice 158 page 107 , **Maths Repère**, *Hachette*]

# III Calculs de dérivées

## III.1 Fonctions de référence

| Fonction $f$ | Fonction $f'$ | Ensemble de définition de $f$ | Ensemble de définition de $f'$ |
|---|---|---|---|
| $x \longmapsto a$ | $x \longmapsto 0$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x \longmapsto ax+b$ | $x \longmapsto a$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ | $x \longmapsto nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ | $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ | |
| $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$ | $x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ | |
| $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $[0;+\infty[$ | $]0;+\infty[$ |
| $x \longmapsto \sin(x)$ | $x \longmapsto \cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | |
| $x \longmapsto \cos(x)$ | $x \longmapsto -\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ | |

### III.2 Dérivation et opérations algébriques

En abrégé, on note $u'$ et $v'$ respectivement à la place de $u'(x)$ et $v'(x)$ et on suppose toutes les fonctions définies et dérivables pour simplifier les notations :

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ |
|---|---|
| $\lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ | $ku'$ |
| $u + v$ | $u' + v'$ |
| $u \times v$ | $u'v + uv'$ |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ |

**Corollaire 1**

- Les fonctions polynômes sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- Les fonctions rationnelles (quotients de deux polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

### III.3 Dérivée d'une composée

**Théorème 11**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $J$ et $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ telle que, pour tout $x$ de $I$, $u(x) \in J$.
La fonction $f \circ u$ est dérivable et, pour tout réel $x$ de $I$ :

$$f\left(u(x)\right)' = u'(x) \times f'\left(u(x)\right)$$

L'utilisation de l'expression $a + h$ dans la **définition** (6.1) n'est là que pour donner un rôle particulier au point $a$ dont on veut calculer la dérivée en ce point mais l'on peut tout aussi bien, à la manière des physiciens dans (6.2), prendre deux point $X$ et $Y$ que l'on fera tendre l'un vers l'autre en annulant leur différence et écrire :

$$\boxed{f'(X) = \lim_{Y \to X} \frac{f(Y) - f(X)}{Y - X}.}$$

C'est exactement la même formule que dans la **définition** (6.1) en posant $X = a$, $Y = a + h$. Mettons en pratique cette remarque :

**Preuve:** La dérivabilité étant une notion locale, montrons que $f \circ u$ est dérivable en $a \in I$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$, on forme donc le quotient :

$$\frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{h} = \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{u(a+h) - u(a)} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

- Par définition de la dérivabilité de $u$ en $a$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a).$$

- Comme $u$ est dérivable en $a$, d'après le **théorème** (I), elle est aussi continue en $a$ et on a :

$$\lim_{h \to 0} u(a+h) = u(a).$$

D'où $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{u(a+h) - u(a)} = f'\big(u(a)\big)$.

Conclusion, $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{h} = u'(a) \times f'\big(u(a)\big)$ et $f \circ u$ est dérivable en $a$.

[ Exercice 9 page 86
Vrai ou faux 18 à 20 et 23 à 26 page 87 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Ce théorème nous permet de compléter le tableau précédent :

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ |
|---|---|
| $u^n, \quad n \in \mathbb{N}$ | $nu' \times u^{n-1}$ |
| $\dfrac{1}{u}$ | $-\dfrac{u'}{u^2}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\sin u$ | $u' \cos u$ |
| $\cos u$ | $-u' \sin u$ |

Pour plus tard ...

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ |
|---|---|
| $e^u$ | $u'e^u$ |
| $\ln u$ | $\dfrac{u'}{u}$ |

**Preuve:** On applique respectivement et successivement le théorème avec :

- $f : x \longmapsto x^n$ de dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
- $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ de dérivée $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
- $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $f : x \longmapsto \sin x$ de dérivée $f'(x) = \cos x$.
- $f : x \longmapsto \cos$ de dérivée $f'(x) = -\sin x$.

Et plus tard, ce sera la même chose :

- $f : x \longmapsto e^x$ de dérivée $f'(x) = e^x$.
- $f : x \longmapsto \ln x$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

[ Applications page 71 , **Maths Repère**, *Hachette*]

En particulier et parce que ces fonctions reviennent souvent dans les exercices de terminale :

**Corollaire 1**

Si $a$ et $b$ sont deux réels quelconques et $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Big(f(ax+b)\Big)' = af'(ax+b)$$

On pourra alors appliquer cette formule à toute expression de la forme $(ax+b)^n$, $\cos(ax+b)$, $\dfrac{1}{ax+b}$, $\sqrt{ax+b}$, ...

[ Exercices résolu 4, 6, 8 et 9 pages 77, 80, 82 et 85 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**3** **Exercice** Calculer la dérivée des fonctions et préciser leur domaine de dérivabilité avec :

$f_1(x) = (x-4)^2$

$f_2(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$f_3(x) = \sqrt{4x-5}$.

$f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

$f_5(x) = (x^2+2x-9)^3$.

$f_6(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$.

$f_7(x) = \sqrt{x^2+1}$.

$f_8(x) = \sqrt{\cos x}$.

$f_9(x) = \cos((x^2-3)^3)$.

$f_{10}(x) = \cos\left(\sqrt{2+\sin x}\right)$.

**4** **Exercice** Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en $a$.

**1/** $f : x \mapsto \sqrt{x^3-1}$ avec $a = 1$.

**2/** $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ avec $a = 0$

**5** **Exercice** Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**1/** Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

**2/** $f$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ ?

**3/** $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

[ Exercice 155 page 106 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# IV Dérivée et variations (Rappels)

## IV.1 Sens de variation d'une fonction

**Théorème III**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ ouvert.

- $f$ est strictement croissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x$ de $I$, $f'(x) > 0$ (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule).
- $f$ est constante sur $I$ si et seulement si pour tout $x$ de $I$, $f'(x) = 0$.
- $f$ est strictement décroissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x$ de $I$, $f'(x) < 0$ (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule).

Ce théorème ramène donc l'étude des variations d'une fonction à celle du signe de sa dérivée.

[ Exercices 101 à 105 page 96 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice 112 page 96
Exercice 114 page 97 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## IV.2 Extremum local

**Proposition 2** (Condition nécessaire d'extremum)

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ ouvert et $x_0 \in I$.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de $f$ alors $f'(x_0) = 0$.

On ne cherchera donc les extrema de la fonction $f$ à l'intérieur de I qu'en les points qui annulent la dérivée.

**ATTENTION** La réciproque de cette propriété est fausse.

**Exemple 4:**

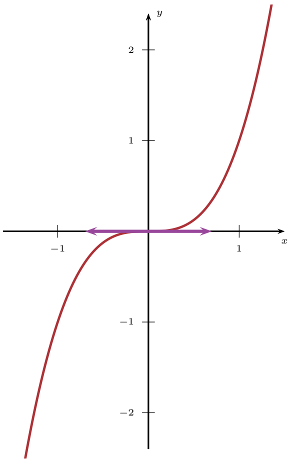
Considérons, par exemple, la cubique définie par

$$f : x \longmapsto x^3$$

dont la dérivée est donnée par

$$f'(x) = 3x^2.$$

Comme $f'(0) = 0$, la courbe représentative de $f$ admet une tangente horizontale en 0 sans que ce ne soit un extremum local à partir du moment où la dérivée ne change pas de signe au voisinage de 0.




**Théorème IV** (CNS d'extremum)

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ ouvert et $x_0 \in I$.
$f(x_0)$ est un extremum local de $f$ si et seulement si $f'$ s'annule en changeant de signe en $x_0$.

### IV.3 Un exemple d'étude

[ Exercice 123 page 99
Exercices 140 à 144 page 105 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Étudions la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$.

**Domaine de définition :** $f$ n'est définie que si $x(4-x)$ est positif ou nul.

Donc $\mathcal{D}_f = [0\,;4\,]$.

**Continuité :** $f$ est la composée des fonctions $x \longmapsto x(4-x)$ et de $x \longmapsto \sqrt{x}$. Elle est donc continue sur $[0\,;4\,]$.

**Dérivabilité :** Pour les mêmes raisons $f$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0\,;4\,[$. Sa dérivée est de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{2\sqrt{x(4-x)}}.$$

Lorsque $x \to 0$ ou $x \to 4$, $-2x+4 \to -4$ et $\sqrt{x(4-x)} \to 0^+$.

$$\text{Donc,} \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 4} f'(x) = +\infty.$$

La fonction $f$ n'est donc pas dérivable en 0 et en 4 : sa courbe représentative admet deux demi-tangentes parallèles à l'axe des ordonnées en ces points.

**Variations :** Comme $\sqrt{x(4-x)} \geqslant 0$, $f'(x)$ est du signe de $-2x+4$ sur $]0\,;4\,[$. On en déduit le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\parallel$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\parallel$ |
| Variations de $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ |

**Extremum :** D'après l'étude précédente, $f'(x)$ s'annule et change de signe en 2 donc $\mathscr{C}_f$ admet un maximum global au point d'abscisse 2.

Il ne reste plus qu'à tracer la courbe représentative de $f$ :

**Méthode 1** (Pour tracer une courbe représentative)

L'important est simplement de reporter toutes les informations de l'étude préalablement faite et de vouloir une jolie courbe.

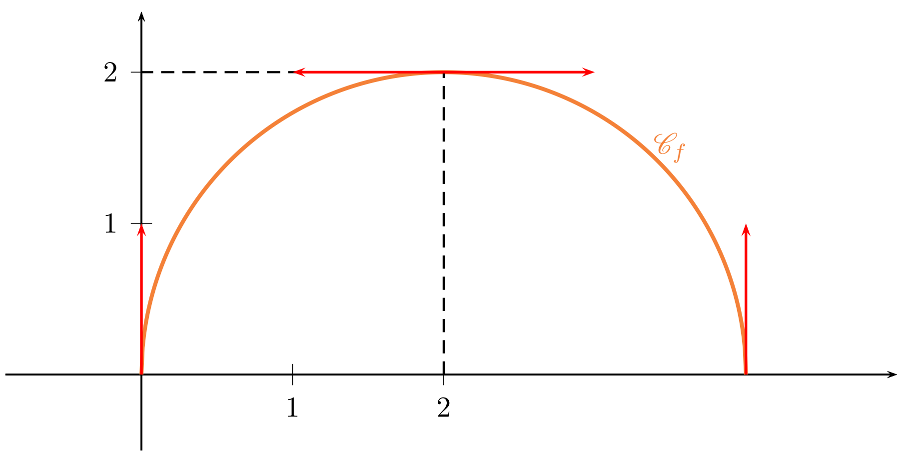
**1/** On trace les asymptotes à la courbe.

**2/** On place les extrema locaux avec leur tangente « horizontale ».

**3/** On trace les demies-tangentes « verticales ».

**4/** On place quelques points essentiels : ni trop, ni trop peu et suffisamment pour donner une idée de la courbe.

**5/** Le coude dans la concavité, on trace une jolie courbe, sans lever le crayon si la courbe est continue ni repasser et en s'appliquant bien à rendre **la courbe tangente aux extrema locaux**.



**Complément :** Il semblerait que la courbe soit un demi-cercle de centre $I\,(0\ ;\ 2)$ et de rayon 2. Prouvons-le !

Il suffit de montrer que, pour tout point $M\,(x\ ;\ f(x))$ de $\mathscr{C}_f$, $IM = 2 \iff IM^2 = 4$.

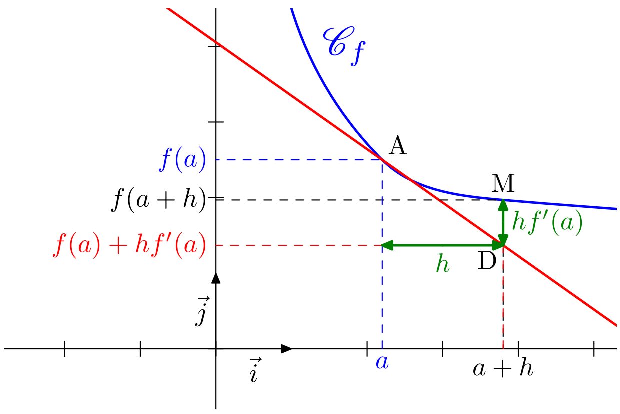
$$\begin{aligned}\text{Or, } IM^2 &= (x-2)^2 + \left(f(x)-0\right)^2 = (x-2)^2 + x(4-x)\\ &= \cancel{x^2} - \cancel{4x} + 4 + \cancel{4x} - \cancel{x^2} = 4.\end{aligned}$$

[ Exercices 118 à 121 page 98
Exercice 158 page 107 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# V Compléments

## V.1 Approximation affine

On a vu que si $f$ est une fonction dérivable en $a$ alors au point $A(a\,;f(a))$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente $(T_a)$.[5]




La tangente $(T_a)$ est la droite d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Elle est aussi la représentation graphique d'une fonction affine

$$x \longmapsto f'(a)(x-a) + f(a).$$

Cette fonction est appelée *meilleure approximation affine de $f$ au voisinage de $a$.*

Si on note $h = x - a$ alors la fonction

$$h \longmapsto f'(a) \times h + f(a)$$

est la meilleure approximation affine de la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0. Ceci s'écrit :

$$f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a) \text{ lorsque } h \approx 0.$$

Quelle est l'erreur[6] commise ? Cherchons-en un ordre de grandeur.

Dans le cas qui nous intéresse, l'erreur commise en remplaçant $f(a+h)$ par $f'(a) \times h + f(a)$ est :

$$\begin{aligned}DM &= \left|f(a+h) - \left(f'(a) \times h + f(a)\right)\right| = \left|f(a+h) - f(a) - f'(a) \times h\right|\\ &= \left|h \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \times h\right| = \left|h \times \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right)\right|\\ &= |h \times \varepsilon(h)|\end{aligned}$$

5. On pourrait montrer que la tangente est la droite passant par $A$ qui s'approche le plus de $\mathscr{C}_f$ « au voisinage » du point $A$. (Hors-programme mais gardez l'idée en tête).

6. Erreur qu'on commet volontairement, pour se simplifier les calculs, car on n'a pas toutes les informations nécessaires pour effectuer un calcul exact, . . .

où $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim\limits_{h\to 0} \left( \underbrace{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\to f'(a)} - f'(a) \right) = 0.$

L'erreur commise tend donc vers 0 lorsque l'on se rapproche de $A$ mais, mieux encore, l'ordre de grandeur de celle-ci en $|h| \times |\varepsilon(h)|$ est inférieur à celui de $|h|$.[7]

**Théorème V** (Approximation affine)

Lorsqu'une fonction $f$ est dérivable en $a$, une bonne approximation affine, lorsque $a+h$ est voisin de $a$ est :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

**Exemple 5:** Comment obtenir rapidement une valeur approchée de $\sqrt{4,03}$ ? Utiliser une approximation affine, bien sûr !

On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $h = 0,03$. On calcule alors la dérivée en 4.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad f'(4) = \frac{1}{4},$$

$$\text{et donc } f(4,03) \approx f(4) + 0,03 \times \frac{1}{4} \approx 2,0075.$$

On obtient donc : $\sqrt{4,03} \approx 2,0075$ à comparer à la valeur donnée par la calculatrice 2,007 486. La précision est donc de $10^{-4}$.

6 **Exercice** Donner une valeur approchée de $(1,07)^5$.

## V.2 Méthode d'Euler[8]

L'idée précédente est à la base d'un procédé puissant visant à trouver les valeurs d'une fonction numérique $f$ dont on ne connaît que la dérivée $f'$ et un point de la courbe représentative.[9]

Pour tracer une courbe approchée de $\mathscr{C}_f$, nous allons effectuer plusieurs approximations affines successives.

- Soit $A(a; f(a))$ le point connu de $\mathscr{C}_f$.
- La meilleure approximation affine de $f$ au voisinage de $a$ est $f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a)$ lorsque $h \approx 0$.

7. C'est mieux !

8. Leonhard EULER (1707-1783) : mathématicien suisse. Un des mathématiciens les plus productifs de tous les temps. Il a travaillé dans beaucoup de domaines (notre trigonométrie moderne provient essentiellement de son *Introductio* de 1748). Il est aussi l'inventeur de beaucoup de notations que nous utilisons encore aujourd'hui ($\pi$, $\Sigma$ pour les sommes, $r$ pour les rayons, $A$, $B$, ...pour les sommets d'un polygone, cos et sin, ...)

9. Imaginez que vous regardiez passer un mobile. À l'instant $t_0$ où vous regardez, vous pouvez mesurer sa vitesse $f'(t_0)$ qui ne devrait pas trop varier et sa position $f(t_0)$. Peut-on avoir une idée de la position du mobile à $t_0 + h$ ?

On se fixe une valeur de $h$ « proche » de 0 et on prend $y_1 = f'(a) \times h + f(a)$ comme meilleure approximation de $f(a+h)$.

Le point $M_1(a+h; y_1)$ est alors proche du point $A_1$ de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+h$.

- On réitère à partir de $y_1$ considéré comme une bonne valeur approchée de $f(a+h)$
- On cherche alors la meilleure approximation affine de $f(a+h+h')$ au voisinage de 0 :

$$f(a+h+h') \approx f'(a+h) \times h' + y_1 \text{ lorsque } h' \approx 0.$$

Pour simplifier, on prend souvent un pas constant (*ie*) $h' = h$.

- On obtient alors $y_2 = f'(a+h) \times h + y_1$.
- Le point $M_2(a+2h; y_2)$ est proche du point $A_2$ de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+2h$.
- On recommence en posant $y_3 = f'(a+2h) \times h + y_2$ qui est proche de $f(a+3h)$ donc $M_3(a+3h; y_3)$ est proche de $A_3 \in \mathscr{C}_f$ d'abscisse $a+3h$...

On construit ainsi de proche en proche une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\begin{cases} y_0 &= f(a) \\ y_{n+1} &= f'(a+(n-1)h) \times h + y_n. \end{cases}$$

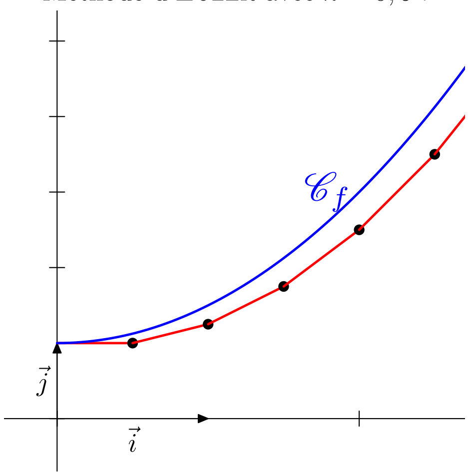
La courbe passant par les points $A_n\,(a+nh\ ;\ y_n)$ est alors une approximation de la courbe représentative de $f$.

**Exemple 6:** Soit $f$ la fonction telle que $f'(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et dont la courbe passe par $A(0;1)$.

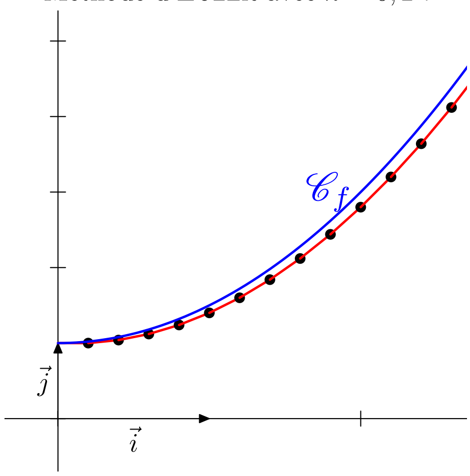
On pose $h = 0,2$ et on applique la méthode d'EULER :

- $y_1 = f'(0) \times h + f(0) = 0 \times h + 1 = 1$. On place $M_1(0,2;1)$.
- $y_2 = f'(h) \times h + y_1 = h^2 + 1 = 1,04$. On place $M_2(0,4;1,04)$.
- $y_3 = f'(2h) \times h + y_2 = 2h^2 + 1,04 = 1,12$. On place $M_3(0,6;1,12)$.

Méthode d'EULER avec $h = 0,5$ :




Méthode d'EULER avec $h = 0,2$ :




**Remarque:** Dans l'expression $f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)$, le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur et $f(a)$ l'ordonnée à l'origine de la droite d'approximation. Encore une fois, une fonction dérivable est, localement, très similaire à une portion de droite.

**Définition 4**

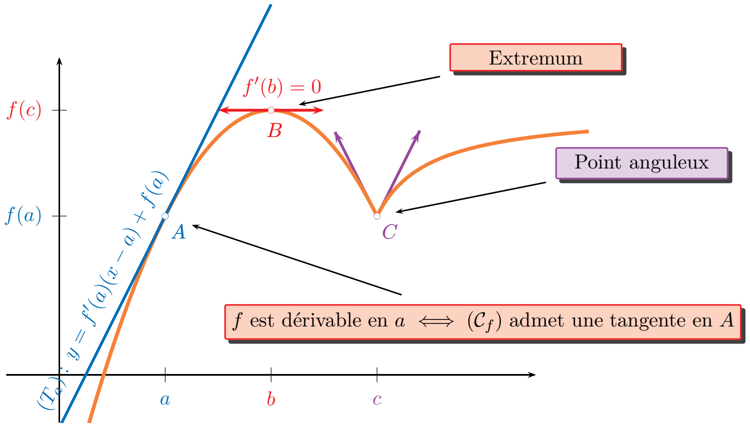
Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ contenant le nombre $a$.

Si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers une valeur finie lorsque $h$ tend vers 0 alors on dit que $f$ est **dérivable** en $a$ et on note :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.} \tag{6.3}$$

$f'(a)$ est appelé le **nombre dérivé** de $f$ en $a$. C'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en au point d'abscisse $a$.

$f$ est dérivable en $a \implies f$ est continue en $a$.




| $x$ | | $b$ | | $c$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ |
| Variation de $f$ | ↗ | $f(b)$ | ↘ | $f(c)$ | ↗ |

$f$ est strictement croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) > 0$.
(sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule).

$f(x_0)$ est un extremum local de $f \iff f'$ s'annule **ET** change de signe en $x_0$.

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ |
| $uv$ | $u'v+uv'$ |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| $u^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$ | $nu'u^{n-1}$ |
| $\dfrac{1}{u}$ | $-\dfrac{u'}{u^2}$ |
| $\dfrac{1}{u^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$ | $-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$ |

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $\sqrt{u}$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\sin(u)$ | $u'\cos(u)$ |
| $\cos(u)$ | $-u'\sin(u)$ |
| $e^u$ | $u'e^u$ |
| $\ln u$ | $\dfrac{u'}{u}$ |
| $\big(f(u(x))\big)'$ | $u'f'\big(u(x)\big)$ |
| $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ | $f(x)$ |

- Les sommes, produits et composés de fonctions dérivables sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- Les quotients de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Lorsqu'une fonction $f$ est dérivable en $a$, une bonne approximation affine, lorsque $a+h$ est voisin de $a$ est :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Chapitre

# 7 L'exponentielle

À la toute fin du XIX$^{e}$siècle, Marie et Pierre Curie mettent en évidence des éléments radioactifs autres que l'uranium, le polonium et le radium.

Des atomes de ces éléments radioactifs se désintègrent en permanence. Partant d'une quantité initiale $N_0$, si on désigne par $N(t)$ la quantité d'atomes de radium à l'instant $t$ et $N'(t)$ la variation de celle-ci alors on peut montrer que cette variation à un instant donné est proportionnelle à la quantité d'atomes encore présents :

$$\begin{cases} N(0) & = & N_0 \\ N'(t) & = & -kN(t). \end{cases}$$

[ Exercice 195 page 163 , **Maths Repère**, *Hachette*]

En résolvant cette équation, on peut donc connaître à chaque instant $t$ le nombre d'atome $N(t)$. Ceci est, par exemple, appliqué pour la datation au carbone 14 de matière organique. Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone : connaissant le nombre d'atomes de carbone 14 présents et qui se sont désintégrés, on détermine la durée qu'à pris cette désintégration, c'est-à-dire l'âge de la matière organique.

La quantité $N(t)$ est donc solution de l'équation différentielle [1] $\boxed{f' = -kf}$.

La fonction que nous cherchons est la solution principale de cette équation...

## Sommaire



1. Une équation liant une fonction à sa dérivée.

# I La fonction exponentielle

## I.1 Définition et premiers théorèmes

**Lemme I:** Si $f$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

**Preuve:** Posons $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$. Montrons que $\varphi$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Comme produit de fonctions dérivables, $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x).$$

Or, $f' = f$.

D'où $\varphi'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$. La fonction $\varphi$ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1$ (*ie*) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$. La fonction $f$ ne peut s'annuler et on a la propriété supplémentaire :

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}. \tag{7.1}$$

**Théorème II**

Il existe une unique fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

On nomme cette fonction *exponentielle* et on la note : exp.

**Preuve:** L'existence de cette fonction est admise. [2]

Démontrons l'unicité :

On suppose donc que deux fonctions $f$ et $g$ vérifient les conditions du théorème (*ie*) $f = f'$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$.

Comme $g$ ne s'annule pas d'après le lemme (I), on peut définir la fonction $h$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Notre objectif va encore être de montrer que $h$ est constante à 1 cette fois.

Quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, sous les hypothèses $f' = f$ et $g' = g$, on a :

$$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{h} = 0.$$

La fonction $h$ est donc constante à $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$ (*ie*) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

L'unicité est ainsi prouvée. Nous pourrons ainsi noter par la suite cette fonction exp.

En particulier, on a :

$$\boxed{\Big(\exp(x)\Big)' = \exp(x).}$$

Vrai ou faux 2 et 3 page 138
QCM 23 page 139 , **Maths Repère**, *Hachette*

## I.2 Approche graphique de la fonction exponentielle

Il est nul besoin d'en savoir plus pour avoir une allure de l'exponentielle.

A la manière des physiciens, la méthode d'Euler, utilisée en son temps dans le même but, donne une très bonne approximation de la courbe.

Rappelons-nous le chapitre précédent : une bonne approximation affine de la courbe d'une fonction dérivable $f$ est donnée par

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a), \quad \text{lorsque } h \text{ est assez voisin de } 0.$$

Comme $f'(a) = f(a)$, cette expression se simplifie et on a :

$$f(a+h) \approx (1+h)f(a). \tag{7.2}$$

Découverte page 112
Démonstration page 122 , **Maths Repère**, *Hachette*

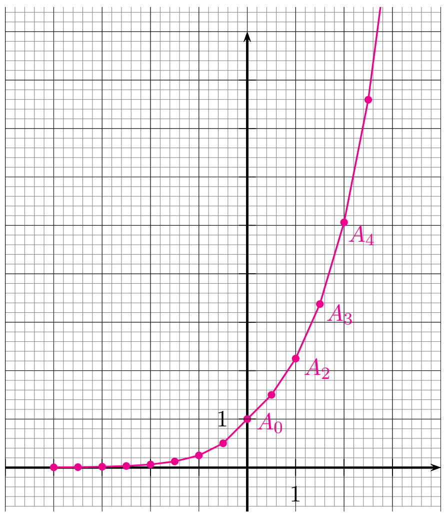
### Méthode d'Euler

Partant de $y_0 = f(0) = 1$, la méthode d'Euler conduit à considérer la suite

$$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ y_{n+1} &= (1+h)y_n, \end{cases}$$

où le réel $h$ représente le pas et a été fixé à l'avance.

On trace alors les points $A_n\,(nh\ ;\ y_n)$.




Méthode d'Euler avec un pas $h = 0,25$.

2. Vous montrerez plus tard que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ répond à la question.

## Algorithme

Pour cela on choisit un pas $h$ et un nombre $N$ de points à tracer.

Pour initialiser la boucle, on partira du point $A_0$ de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ car $f(0) = 1$.

On fera alors deux boucles pour déterminer les points situé à droite de $A_0$ (on incrémente les abscisses de $h$ à chaque étape) et les points situés à gauche de $A_0$ (on incrémente les abscisses de $-h$).

On obtient la courbe ci-dessus pour $h = 0,25$ et $N = 6$.

```
VARIABLES
N, α, I, r SONT_DU_TYPE ENTIER NATUREL
X, Y, h SONT_DU_TYPE REEL
DEBUT_ALGORITHME
    Lire N, h
    X PREND_LA_VALEUR 0
    Y PREND_LA_VALEUR 1
    Tracer le point (X ; Y)
    POUR I ALLANT_DE 1 A N
        DEBUT_POUR
        X PREND_LA_VALEUR X + h
        Y PREND_LA_VALEUR (1 + h) Y
        Tracer le point (X ; Y)
        FIN_POUR
    X PREND_LA_VALEUR 0
    Y PREND_LA_VALEUR 1
    POUR I ALLANT_DE 1 A N
        DEBUT_POUR
        X PREND_LA_VALEUR X − h
        Y PREND_LA_VALEUR (1 − h) Y
        Tracer le point (X ; Y)
        FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

## Approximation de exp(1)

Considérons l'intervalle $[0\,;1\,]$ que l'on partage en $n$ intervalles de même amplitude $h = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après (7.2), on a alors :

$$\forall x_0 \in [0\,;1\,],\ \exp(x_0 + h) \approx (1 + h)\exp(x_0).$$

En prenant $x_0 = 0$, on obtient alors :

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)\exp(0) = \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par le même procédé, on a aussi :

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{2}{n}\right) &\approx \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\\ &\approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on montre alors facilement que l'on a la relation :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \exp\left(\frac{k}{n}\right) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k.$$

Enfin, pour $k = n$ et $\dfrac{n}{n} = 1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exp(1) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Suite convergente vers exp(1) qui permit de trouver les premières approximation de exp(1). A la calculatrice, on trouve :

$$\exp(1) \simeq 2,71828182845904523.$$

## I.3 Propriétés algébriques

**Théorème III** (Relation fonctionnelle)

Soient $a$ et $b$ deux réels, on a alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b). \tag{7.3}$$

[ Démonstration pages 126 , **Maths Repère**, *Hachette*]

Cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété et retrouver que l'exponentielle est égale à sa dérivée.

[ Exercice 193 page 163 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Remarque:** A l'aide de cette relation, on peut montrer, par exemple, de manière très élégante le lemme (I) :

$$1 = \exp 0 = \exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x) \implies \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0.$$

**Preuve:** Posons $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$. Montrer le théorème revient alors à montrer que $h = \exp$ (*ie*) $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $h' = h$ et $h(0) = 1$.

Que $h$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$ est clair et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x).$$

Enfin, $h(0) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$.

Conclusion, $h = \exp$. Puis, avec $\exp(a) \neq 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \times \exp(a) = \exp(x+a).$$

[ Démonstration page 124 , **Maths Repère**, *Hachette*]

On dit que la fonction exponentielle est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ : elle transforme les sommes en produits.

**Proposition 1**

Soient $a$ et $b$ deux réels et $n$ un entier naturel.

- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$

**Preuve:**

- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$ est une conséquence du lemme (I).
- Un mélange de (7.3) et (7.1) donne :

$$\exp(a-b) = \exp\big(a+(-b)\big) = \exp(a)\times\exp(-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

- Par récurrence sur $n$ avec :
  - $\exp(0\times a) = \exp(0) = 1 = \big(\exp(a)\big)^0$ pour l'initialisation,
  - et $\exp\big((n+1)a\big) = \exp(na)\times\exp(a) = \big(\exp(a)\big)^n \times \exp(a) = \big(\exp(a)\big)^{n+1}$ pour l'hérédité.

Il est bon de remarquer à ce stade que la fonction exponentielle se comporte comme les fonctions puissance. On retrouve ainsi les propriétés chères aux cinquièmes :

**Rappels 1**

Soient $a$ et $b$ deux **entiers relatifs**.

- $x^{a+b} = x^a \times x^b$
- $x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$
- $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$
- $x^{ab} = \left(x^a\right)^b$

On dit, en ce sens, que la fonction exp généralise les fonctions puissances. Nous approfondirons dans un prochain chapitre cette idée.

### I.4 Notations

Du fait des propriétés similaires entre la fonction exponentielle et la fonction puissance, on pose :

**Définition 1**

- $$e = \exp(1) \simeq 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995\ 95749669676277240766303535475945713821785251664274\ldots$$ [3]
- $e^x = \exp(x)$.

On a ainsi les propriétés :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

[Applications page 115
Exercice résolu 1 page 130
vrai ou faux 7 et 8 page 138
Exercices 36 à 38et 40 à 48 page 140 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## II Étude de la fonction exponentielle

### II.1 Signe

**Théorème IV**

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

**Preuve:** On sait déjà que $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel.

De plus la fonction exponentielle est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$. S'il existait un réel $a$ tel que $\exp(a) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existerait un réel $\alpha$ tel que $\exp(\alpha) = 0$ ce qui est impossible.

La fonction exponentielle est donc strictement positive.

[Démonstration page 123 , **Maths Repère**, *Hachette*]

3. A apprendre par cœur. ;-)

## II.2 Variation et Limites

**Théorème V**

**1/** La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

**2/** La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**3/** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. **4/** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

**Preuve:**

**1/** Par définition, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc également continue.

**2/** Immédiat aussi avec $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.

**3/** On va utiliser les théorème de comparaison, en étudiant la fonction $f$ définie par $f(x) = e^x - x$.
$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = e^x - 1$.
La fonction exp est strictement croissante et on a $e^0 = 1$ d'où le signe de la dérivée et le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

Du tableau de variation, on en déduit que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \iff e^x > x$.
D'après le théorème de comparaison, on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$.

[ Démonstrations pages 123 et 125
Exercice résolu 2 pages 130-131 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## II.3 Courbe représentative

D'après la partie précédente, on a le tableau de variation suivant :

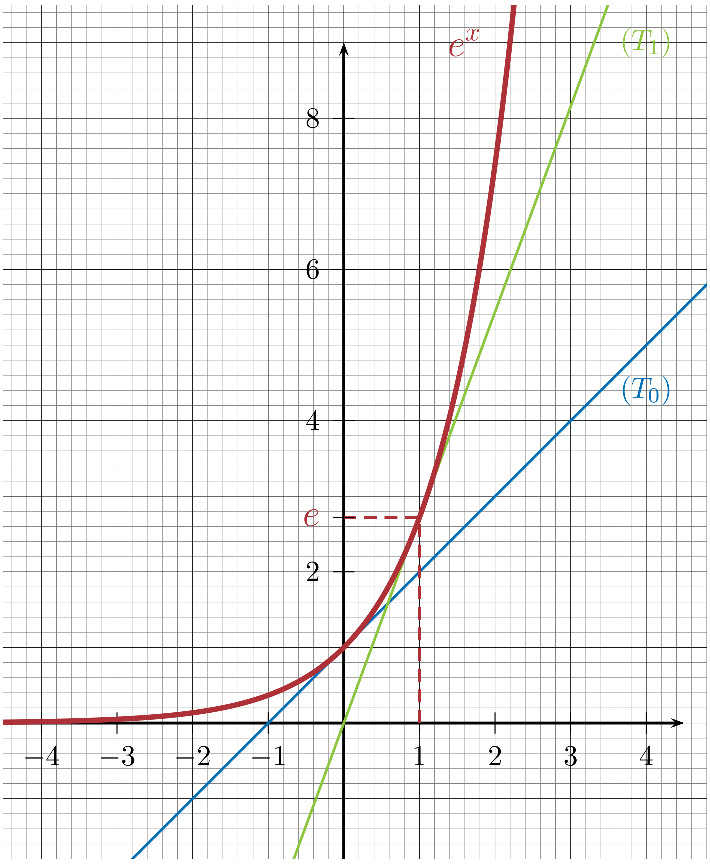
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\exp'(x)$ | | | | $+$ | | | |
| exp | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $e$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Enfin et afin de mieux tracer la courbe représentative, on cherche les équations des tangentes aux points d'abscisse 0 et 1 :

$$(T_a) : \ y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

$$(T_0) : \ y = (\exp)'(0)x + \exp 0 \quad \text{et} \quad (T_1) : \ y = (\exp)'(1)(x - \cancel{1})x + \cancel{\exp 1}$$
$$y = x + 1 \qquad\qquad y = ex.$$

[ QCM 30 page 139 , **Maths Repère**, *Hachette*]




**Corollaire 1**

Soient $a$ et $b$ deux réels. On a les équivalences suivantes :

- $e^a = 1 \iff a = 0$.
- $e^a > 1 \iff a > 0$.
- $e^a = e^b \iff a = b$.
- $e^a < e^b \iff a < b$.

**Preuve:** Simple conséquences de la stricte croissance de la fonction exp.

[ Applications page 117
Exercices 55 à 64 page 141 , **Maths Repère**, *Hachette*]

1 **Exercice**

**1/** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{2x^2+3} = e^{7x}$.

**2/** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{3x} = e^{x+6}$.

[Exercice résolu 4 page 133
Exercice résolu 5 page 134
QCM 33 page 139
Exercices 181 à 182 page 162 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## II.4 Limites de référence

**Théorème VI** (Croissance comparée)

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0.$

Le terme de croissance comparée provient du fait que la première limite signifie que, au voisinage de 0, la fonction $e^x - 1$ se comporte comme la fonction $x$ tandis que les deux dernières montrent la prépondérance en l'infini de la fonction exp sur cette même fonction.

[Démonstrations page 125 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Preuve:**

- La démonstration découle de la définition de la dérivée de exp en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \big(\exp\big)'(0) = e^0 = 1.$$

- L'idée est la même que pour la démonstration du **théorème** (V). On compare cette fois $\exp x$ à $\dfrac{x^2}{2}$ [4] en posant $f$ la fonction définie par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ clairement dérivable sur $\mathbb{R}$.
  On a $f'(x) = e^x - x > 0$ d'après la démonstration du **théorème** (V) donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et minorée par $f(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
  On en déduit que, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x > \dfrac{x^2}{2} \iff \dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.
  Comme $\lim x \to +\infty \dfrac{x}{2} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
- Enfin, pour la deuxième limite, on se ramène à la précédente par un changement de variable judicieux :

$$\lim_{x\to -\infty} xe^x = \lim_{X\to +\infty} -Xe^{-X} = \lim_{X\to +\infty} -\frac{X}{e^X} = -\frac{1}{\lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{e^X}{X}} = 0.$$

[5]

5. A cause du quotient par $x$, comparer $e^x$ à $x$ n'est plus suffisant. Le « $\dfrac{1}{2}$ » n'est là que pour simplifier les calculs.

[ Vrai ou faux 9 et 22 page 138
Exercices 87, 88, 90, 91, 93 et 94 page 143
Exercices 183 à 195 page 162 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercices 131 et 132 pages 147-148
Exercice 138 page 149 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercices 175 et 176 pages 160-161 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# III Compléments

## III.1 Dérivée d'une composée

**Théorème VII**

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$. Alors :

$$\left(e^u\right)' = u' \times e^u.$$

**Preuve:** Simple application de la formule de la dérivée d'une fonction composée.

[ Démonstration page 126
Vrai ou faux 20 et 21 page 138
QCM 26 page 139
Exercices 104, 106 à 108 et 112 page 144 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice 124 page 145 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## III.2 Fonction gaussiennes

**Définition 2**

Soit un réel strictement positif, on définit les fonctions $g_k$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = e^{-kx^2}.$$

[ Applications page 117 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercices 137 et 139 pages 149-150 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** La fonction $x \longmapsto g_1(x) = e^{-x^2}$ est communément appelée « fonction de Gauss ».

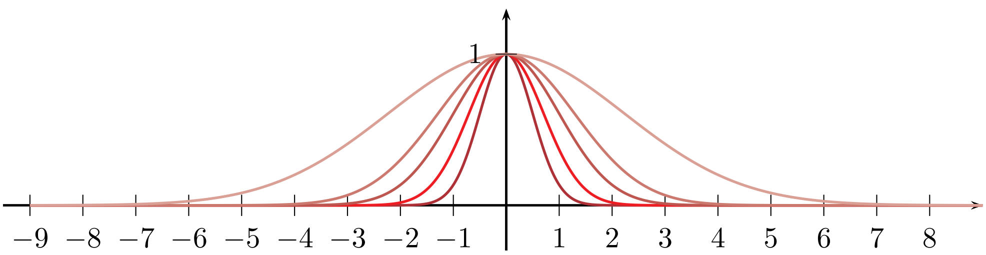
Par composition, on a les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) = 0$.

Les fonctions $g_k$ sont clairement dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}.$$

La dérivée $g_k'$ est donc du signe de $-x$. Ce qui donne le tableau de variation et leur courbes représentatives :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_k'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g_k$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |




**Remarques:** Ces fonctions interviennent en probabilité avec la loi normale. Nous y reviendrons. Leur représentation s'appelle des « courbes en cloches ».

### III.3 Fonctions d'atténuation

**Définition 3**

Soit un réel $k$ strictement positif, on définit les fonctions $f$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}.$$

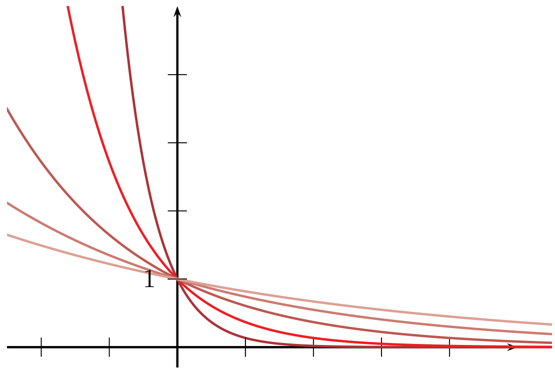
Par composition, on a les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = 0$.

Les fonctions $f_\lambda$ sont clairement dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'_\lambda(x) = -\lambda e^{-\lambda x}.$$

La dérivée est donc strictement négative sur $\mathbb{R}$. Ce qui donne le tableau de variation et leurs courbe représentatives :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'_\lambda(x)$ | | $-$ | |
| $f_\lambda$ | $+\infty$ | $\searrow$ $1$ $\searrow$ | $0$ |




**Remarque:** Plus le coefficient $\lambda$ est important plus l'atténuation est grande.

On retrouve très souvent ces fonctions en physique, par exemple :

- La loi de désintégration radioactive où le nombre de noyaux en fonction du temps obéit à la loi :
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$
- La décharge d'un condensateur dans un circuit RC où le courant obéit à la loi :
$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\dfrac{t}{RC}}.$$
- Dans l'expression de la vitesse de la chute d'un corps dans un fluide où la vitesse instantanée obéit à la loi :
$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\dfrac{k}{m}t}\right).$$

**Remarque:** Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \dfrac{mg}{k}$, On constate alors que la vitesse d'un corps en chute libre dans l'air tend vers une vitesse limite : $v_{lim} = \dfrac{mg}{k}$.

[ Exercice 149 page 154 , **Maths Repère**, *Hachette*]

Plus mathématiquement, les fonctions $f_\lambda$ dont la dérivée est donnée, pour tout $x$ réel par $f'_\lambda(x) = -\lambda e^{-\lambda x} = -\lambda f_\lambda(x)$ sont solutions de l'équation différentielle du premier ordre :

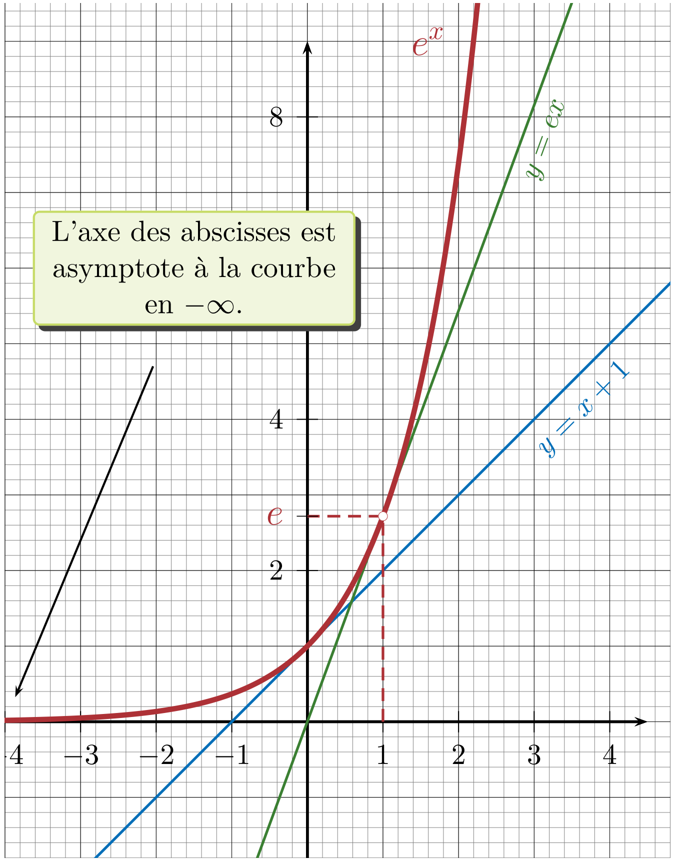
$$\boxed{f' = -\lambda f.}$$

[ Exercice 163 page 156 , **Maths Repère**, *Hachette*]

But originel de la fonction exponentielle qui ont fait les beaux jours de quelques exercices de terminale C il y a fort fort longtemps. Ce n'est plus au programme. Dommage !

[ Exercice 143 page 151
Exercices 145 et 146 page 152 , **Maths Repère**, *Hachette* ]
Exercices 150 et 151 page 154

[ Exercices 156 et 157 page 156 , **Maths Repère**, *Hachette* ]




**Théorème VIII**

$x \longmapsto e^x$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$(e^x)' = e^x \qquad \text{et} \qquad e^0 = 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\left(\exp(x)\right)' = \exp(x)} \text{ et } \boxed{\exp x > 0.}$$

- $e^a = 1 \iff a = 0.$
- $e^a > 1 \iff a > 0.$
- $e^a = e^b \iff a = b.$
- $e^a < e^b \iff a < b.$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(e^x)'$ | | + | | |
| exp | $0$ ↗ | $1$ ↗ | $e$ ↗ | $+\infty$ |

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^a)^n = e^{na} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

La fonction exponentielle est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ : elle « transforme » les sommes en produits.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \qquad \left(e^u\right)' = u' e^u$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exp(x) \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

$e \simeq 2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525166427 4\ldots$

# Exponentielle - Probabilités Conditionnelles

1

**Exercice (D'après Bac)** Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation

$$e^x = \frac{1}{x} \qquad \textbf{(E)}$$

admet une unique solution et de construire une suite qui converge vers celle-ci.

**1/ Existence et unicité de la solution :**
On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.
Démontrer que $x$ est solution de (**E**) si, et seulement si $f(x) = 0$.

**2/ Étude du signe de la fonction $f$ :**

(a) Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduite que l'équation (**E**) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée $\alpha$.

(c) Démontrer que $\alpha$ appartient à $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

**3/ Deuxième approche :**
On note $g$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

(a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

(b) En déduire que $\alpha$ est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

(c) Montrer que la fonction $g$ est croissante sur $[0\,;\alpha]$.

**4/ Construction d'une suite ayant pour limite $\alpha$ :**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= g(u_n). \end{cases}$$

(a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

(b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.

(c) Justifier que $g(\ell) = \ell$. En déduire, la valeur de $\ell$.

(d) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $u_4$ arrondie à la sixième décimale. Qu'en penser ?

**2**

**Exercice** On dispose d'un dé cubique parfait $A$ qui possède une face verte, 2 noires et trois rouges.

**A.** Une première expérience consiste à lancer deux fois de suite ce dé :

**1/** (a) On désigne par $C$ l'événement « Au terme des deux lancers, les deux faces ont la même couleur. »
Calculer $P(C)$.

(b) Calculer la probabilité que les deux faces aient des couleurs différentes.

**2/** A l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur.
Quelle est la probabilité que les deux faces soient vertes ?

**B.** On dispose d'un second dé cubique parfait $B$ présentant quatre faces vertes et deux faces noires.
Voici une nouvelle expérience. On lance le dé $B$ :

- si la face est verte, on relance $B$ et on note la couleur obtenue ;
- sinon, on lance le dé $A$ et on note la couleur obtenue.

**1/** Représenter la situation par un arbre pondéré.

**2/** Calculer la probabilité d'obtenir deux faces vertes.

**3/** Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

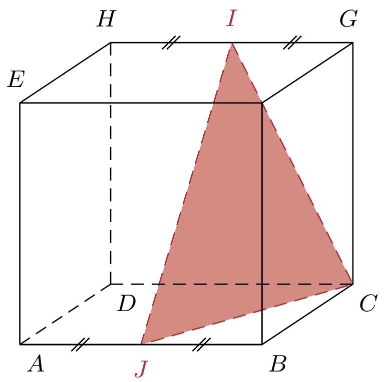
**3**

**Exercice**

$ABCDEFGH$ est un cube.

$I$ et $J$ sont les milieux respectifs des arêtes $[HG]$ et $[AB]$.

Le point $E$ est-il un point de du plan $(ICJ)$ ?




*Il vaut mieux viser la perfection et la manquer que viser l'imperfection et l'atteindre.*

**Bertrand Russell**

# Continuité - Probabilités Conditionnelles

**1**

**Exercice**

**1/** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

(a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

(c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**2/** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}.$$

(a) Étudier les limites de $f$ aux bornes de l'intervalle.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$, $f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

(c) Dresser le tableau de variation de $f$.

(d) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de $f$.

**3/** Montrer que le point $A$ de la courbe représentative de $f$ d'abscisse $\alpha$ a pour ordonnée

$$f(\alpha) = \frac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}.$$

**2**

**Exercice** Soit $a$ un réel tel que $-1 < a < 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n. \end{cases}$

**1/** Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2/** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

(a) Démontrer que, si $x \in ]-1\,;0[$ alors il en est de même pour $f(x)$.

(b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$-1 < u_n < 0.$$

**3/** Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite si elle existe.

3

**Exercice** En France, les statistiques font apparaître que parmi les adultes, environ 4% des hommes et 5% des femmes sont asthmatiques.

Dans la population, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à $10^{-3}$ près.

**1/ Étude de l'état d'asthme du couple**

On choisit un couple au hasard. On note H l'événement « L'homme est asthmatique » et F « La femme est asthmatique ». On admet que les événements F et H sont indépendants.

(a) Recopier puis compléter le tableau de probabilités ci-dessous.

| | $F$ | $\overline{F}$ | |
|---|---|---|---|
| $H$ | | | |
| $\overline{H}$ | | | |
| | | | |

(b) En déduire la probabilité de chacun des événements suivants concernant les deux adultes du couple

- A : « Aucun n'est asthmatique ».
- B : « Un seul est asthmatique ».
- C : « Les deux sont asthmatiques ».

**2/ Transmission de l'asthme au premier enfant**

Les études actuelles montrent que :

- si aucun des deux parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est $0,1$,
- si un seul des deux parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est $0,3$,
- si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est $0,5$.

On note $E$ l'événement « le premier enfant du couple est asthmatique ».

(a) Construire un arbre illustrant cette situation.

(b) Calculer $P(E)$.

(c) Calculer les probabilités conditionnelles $P_E(A)$ et $P_E(\bar{A})$. Interpréter ces deux résultats.

(d) Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins l'un de ses parents asthmatiques.

Chapitre

8

# Géométrie vectorielle

Comme en seconde, l'apport de la géométrie vectorielle va considérablement simplifier les problèmes de géométrie.

On commencera tout d'abord par prolonger les notions du plan, à l'espace puis nous caractériserons les éléments fondamentaux de ce dernier, à savoir droites et plans, par leur représentation paramétrique.

## Sommaire

# I Rappels et prolongements

La notion de vecteurs étudiée dans le plan en 1re S peut naturellement être étendue à l'espace. Un vecteur est défini par la donnée d'une *direction*, un *sens* et une *longueur* (qu'on appelle la *norme* du vecteur).

**Rappels 1** (Définition)

Un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est donc défini par :

- une direction : celle de la droite $(AB)$,
- un sens : celui de $A$ vers $B$,
- une norme ou distance notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

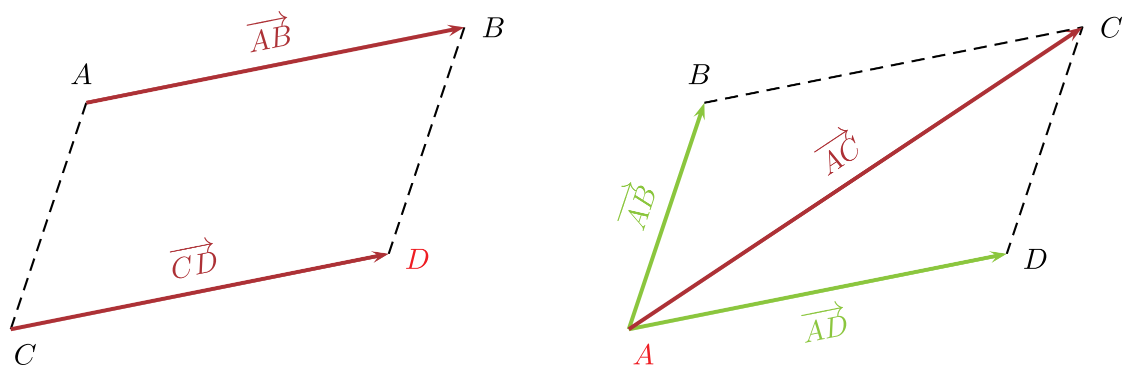
L'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel sont définies comme dans le plan et ont les mêmes propriétés. De même pour l'égalité entre vecteurs :

**Rappels 2** (Vecteurs égaux)

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. *(Relation de Chasles)*
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

- $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.




**Rappels 3** (Vecteurs colinéaires et alignement)

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel $k$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ [1] ou si l'un d'eux est nul.
- Trois points A, B et C sont alignés $\iff \exists k \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

**Remarque:** Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

[ Exercices 29 et 30 page 308 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

On obtient alors immédiatement une caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace :

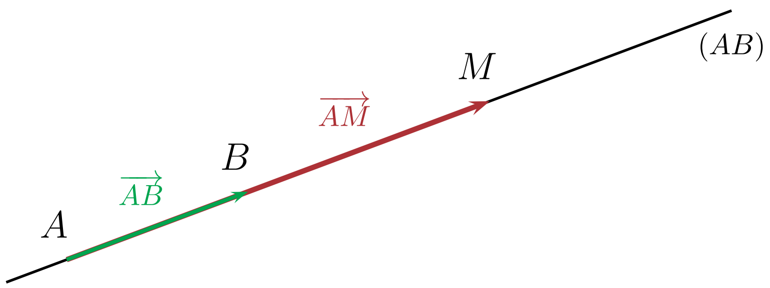
**Rappels 4** (Droites et vecteurs directeurs)

- La droite passant par un point $A$ et de vecteur directeur un vecteur $\vec{u}$ non nul est l'ensemble des points $M$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u},\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

- En particulier, la droite $(AB)$ est l'ensemble des points $M$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB},\ \forall k \in \mathbb{R}.$$




**Corollaire 1** (Parallélisme I)

- Deux droites sont parallèles si, et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- En particulier, deux droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si, et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}.$$

1 **Exercice** Soient $ABCDIJKL$ un parallélépipède rectangle et $G$, le centre de gravité du triangle BIK.

Montrer que les points $J$, $D$ et $G$ sont alignés.

1. ou, ce qui revient au même, s'il existe un réel $k'$ tel que $\vec{u} = k'\vec{v}$.

# II Repérage dans l'espace

## II.1 Vecteurs coplanaires

**Théorème 1** (Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace)

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés de l'espace.
Le plan $(ABC)$ est l'ensemble des points $M$ tels que :

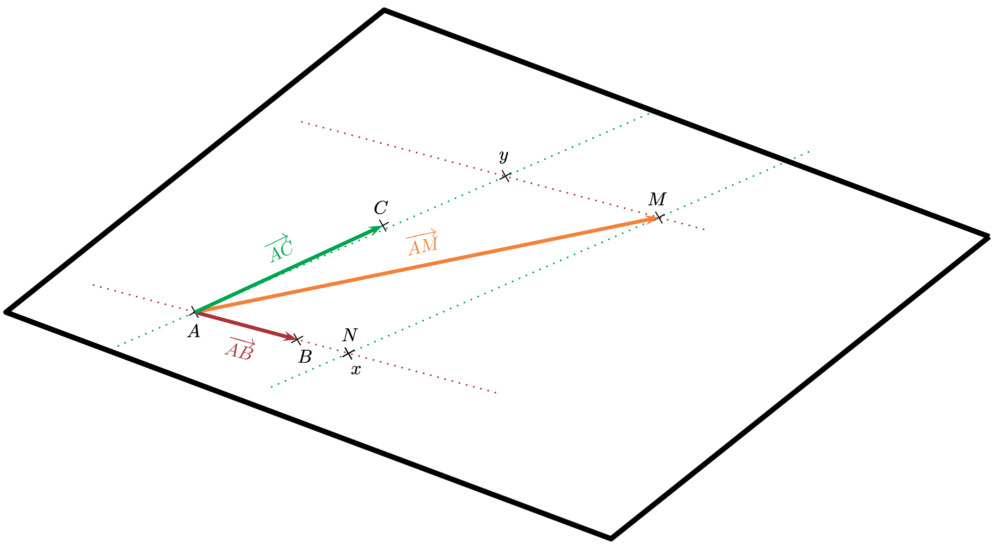
$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},\ \forall (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2.$$

$(x\ ;\ y)$ sont alors les (uniques) coordonnées du point $M$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan $(ABC)$.

**Remarque:** On dit aussi que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ s'exprime comme une *combinaison linéaire* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

**Preuve:** Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, le triplet $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ forme un repère du plan $(ABC)$.

D'après un théorème de première, pour tout point $M$ du plan $(ABC)$, il existe donc un unique couple de réels $(x\ ;\ y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.




Réciproquement, soit $x$ et $y$ deux réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Le point $N$ défini par $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB}$ appartient à la droite $(AB)$, donc au plan $(ABC)$.

On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NM}$ d'où $\overrightarrow{NM} = y\overrightarrow{AC}$ par unicité de la décomposition. $M$ appartient donc à la parallèle à $(AC)$ passant par $N$ qui est incluse dans le plan $(ABC)$, donc $M$ appartient au plan $(ABC)$.

**Définition 1**

Un plan $(\mathscr{P})$ est défini par la la donnée d'un point $A$ et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Tout point $M$ de $(\mathscr{P})$ est alors caractérisé par la donnée d'un couple unique de réels $(x\ ;\ y)$ tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

On dit alors que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les *vecteurs directeurs* du plan ou encore une *base* de ce plan.

**Corollaire 1** (Parallélisme II)

- Deux plans sont parallèles si, et seulement si ils sont dirigés par le même couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ non colinéaires.
- Une droite $(\mathscr{D})$ est parallèle à un plan $(\mathscr{P})$ si, et seulement si un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ est un vecteur du plan $(\mathscr{P})$.

**Définition 2** (Coplanarité)

- On dira que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* si, et seulement si on peut exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires} \iff \exists\,(t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \vec{w} = t\vec{u} + s\vec{v}. \tag{8.1}$$

- On dira que quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires si, et seulement si $\exists\,(t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$.

[ Applications page 289
Exercices 41 et 42 page 310 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

La relation (8.1) est équivalente à l'existence de trois réels $(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$ non tous nuls tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

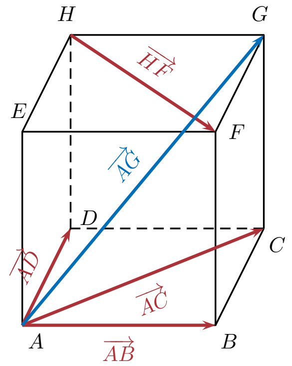
On dit alors que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *liés* (par une relation de dépendance). Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont *libres*.

**Remarque:** Le vecteur $\vec{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Même chose pour $\overrightarrow{AD}$ avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

**Exemple 1:**

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont coplanaires.




**ATTENTION** Si des points sont dans un même plan, 3 vecteurs obtenus à partir de ces points sont nécessairement coplanaires mais des vecteurs peuvent être coplanaires sans que des points formant leurs extrémités soient dans un même plan.

2 **Exercice** On considère un cube $ABCDEFGH$. On note $I$, le milieu de $[BE]$ et $J$, celui de $[FG]$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires.

## II.2 Repères de l'espace

Ici encore, on prolonge les résultats du plan sans difficultés :

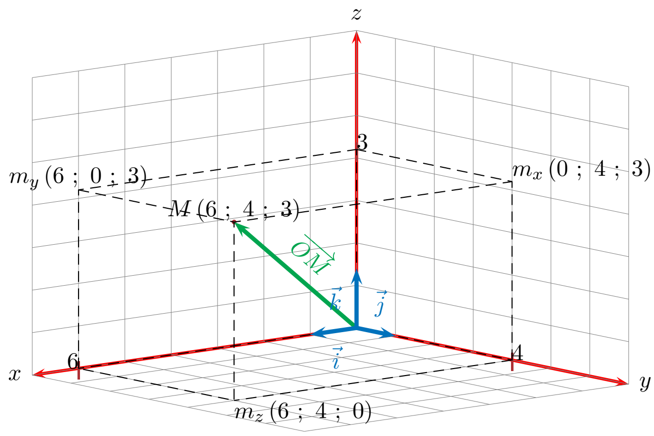
**Définition 3**

Un *repère* $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de l'espace est constitué d'un point origine $O$ et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

- Tout point $M$ de l'espace est alors défini de manière unique par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

- Les trois réels $x$, $y$ et $z$, dans cet ordre sont appelés les *coordonnées* du point M dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ : $x$ correspond à l'abscisse, $y$ à l'ordonnée et $z$ à la côte.
- Le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est dit orthonormal si, et seulement si
  - $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1.$
  - $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.




On a alors les relations :

**Rappels 5**

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k\vec{u} = \begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$.
- Si I est le milieu de [AB] :

$$I\left(\frac{x_B+x_A}{2}\ ;\ \frac{y_B+y_A}{2}\ ;\ \frac{z_B+z_A}{2}\right).$$

- $\vec{u} = (a\ ;\ b\ ;\ c)$ dans un repère orthonormal :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

En particulier, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

[ Applications page 291
Exercices 31 à 38 page 309 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**ATTENTION** Il n'existe pas, dans l'espace[2], de critère de colinéarité pour deux vecteurs comme dans le plan.

**Méthode 1** (Vecteurs colinéaires)

Pour montrer que deux vecteurs sont colinéaires, il faut et il suffit de montrer que leurs coordonnées sont proportionnelles

2. Bien sûr que si !... mais pas en terminale S.

**Exemple 2:** Soient quatre points $A\,(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B\,(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$, $C\,(5\ ;\ 5\ ;\ 0)$.

**1/** Montrons que A, B et C ne sont pas alignés.
Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, par exemple, ne peuvent être liés par une relation de colinéarité. Or, $\overrightarrow{AB}\,(-1\ ;\ -2\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{AC}\,(3\ ;\ 5\ ;\ -1)$ (*ie*) la dernière coordonnée de $\overrightarrow{AC}$ ne peut être multiple de celle de $\overrightarrow{AB}$ qui est 0 donc les points A, B et C ne peuvent être alignés.

**2/** Posons $D\,(-3\ ;\ -5\ ;\ 6)$ et montrons que les points A, B, C et D sont coplanaires.
D'après la **définition** (2), les point A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si on peut exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$[3].
Cherchons donc s'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ de réels tel que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ (*ie*) si le système

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix} \text{ possède une solution}^{4}.$$

En identifiant, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-a+3b & = & -5\\ -2a+5b & = & -5\\ -b & = & 5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}-a-15 & = & -5\\ -2a-25 & = & -5\\ b & = & -5\end{array}\right. .$$

D'où $a = -10$ et $b = -5$. Les points A, B, C et D sont coplanaires.

**Remarque:** Pour déterminer $a$ et $b$, il faut résoudre un système à trois équations à deux inconnues. Une équation, si elle n'est pas une combinaison linéaire des deux autres, peut alors être incompatible avec les deux autres. Dans ce cas les coefficients $a$ et $b$ n'existent pas et les points sont alors non coplanaires.

**Exemple 3:** Soient les points $A\,(6\ ;\ 8\ ;\ 2)$, $B\,(4\ ;\ 9\ ;\ 1)$ et $C\,(5\ ;\ 7\ ;\ 3)$ dans un repère orthonormal.

Montrons que le triangle ABC est rectangle.

Afin d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, on calcule les longueurs suivantes :

$$\begin{array}{lcr}\overrightarrow{AB} = (-2\ ;\ 1\ ;\ -1) & \text{d'où} & AB^2 = 4+1+1 = 6\\ \overrightarrow{AC} = (-1\ ;\ -1\ ;\ 1) & \text{d'où} & AC^2 = 1+1+1 = 3\\ \overrightarrow{BC} = (-1\ ;\ -2\ ;\ 2) & \text{d'où} & BC^2 = 1+4+4 = 9.\end{array}$$

On a donc $AB^2 + AC^2 = 6+3 = 9 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est donc rectangle en A.

3

**Exercice** On reprend l'**exemple** (1) et on considère le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AI}\right)$.

**1/** Dans le repère choisi, déterminer les coordonnées des points $J$, $G$ et $D$.

**2/** En déduire que les points $J$, $G$ et $D$ sont alignés.

[ Exercices 44 à 47 pages 310-311 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

4. Par exemple !
4. Forcément unique d'après le **théorème** (I).

# III Droites et Plans

## III.1 Représentation paramétrique d'une droite

**Théorème 11**

Soit la droite $(\Delta)$ passant par le point $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$.
La droite $(\Delta)$ admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

[ Applications page 293
QCM 1, 2 et 10 page 306
Vrai ou faux 21 et 22 page 307 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Preuve:** Il suffit simplement de traduire le fait que $M\,(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\Delta) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires (*ie*)

$$\begin{aligned} \exists t \in \mathbb{R} \ /\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} &\iff \exists t \in \mathbb{R} \ /\ \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} \ /\ \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} \ /\ \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque:** Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par $t \in [\alpha\,;+\infty\,[$ ou $t \in ]-\infty\,;\alpha\,[$, par exemple, pour des demies-droites fermée et ouverte respectivement.

Pour un segment il suffira de remplacer par $t \in [\alpha\,;\beta\,]$.

[ Exercices 85 à 88 page 315 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Exemples 4:**

**1/** La représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D}')$ passant par $A\,(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ a pour représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

**2/** Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace ayant pour coordonnées respectives :

$$A\,(-2\ ;\ 1\ ;\ 0)\quad \text{et}\quad B\,(2\ ;\ 3\ ;\ 1)\,.$$

(a) La droite $(AB)$ passe par $A$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}\,(4\ ;\ 2\ ;\ 1)$ donc a pour représentation paramétrique :

$$(AB) : \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}. \tag{8.2}$$

Les points $A$ et $B$ sont respectivement obtenus pour $t=0$ et $t=1$.
C'est aussi la droite passant par $B$ et de même vecteur directeur donc elle a aussi pour représentation paramétrique :

$$(AB) : \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 3+2t \\ z = 1+t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

Les points $A$ et $B$ sont respectivement obtenus pour $t=-1$ et $t=0$.
On dit que ces deux représentations paramétriques sont associées à une même droite ou sont équivalentes.

(b) Pour déterminer la représentation du segment $[AB]$ il faut d'abord trouver pour quels valeurs du paramètres dans la première représentation (8.2) de $(AB)$ on obtient les points $A$ et $B$.
Pour $t=0$, on obtient le point $A$ clairement. Quant au point $B$, la résolution de trois petites équations donnent $t=1$.

$$\text{D'où}\quad [AB] : \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases},\ t \in [\,0\,;1\,].$$

(c) Pour la demie-droite $[AB)$, le paramètre $t$ doit être positif pour avoir le point $B$, on a donc

$$[AB) : \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

(d) Enfin, pour la demie-droite $[BA)$, deux méthodes : Soit on part toujours de la représentation précédente (8.2) et le paramètre $t$ doit alors être inférieur à 1 :

$$[BA) : \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases},\ t \in ]-\infty\,;1\,].$$

Soit, on part de la deuxième représentation (8.3) de la droite $(AB)$ et dans ce cas, le paramètre $t$ doit être négatif pour que la point $A$ appartienne à la demie-droite :

$$[BA) : \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 3+2t \\ z = 1+t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}_-.$$

4

**Exercice** Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2, \ s \in \mathbb{R} \\ z = 9s - 5 \end{cases}$$

**Correction:** Plusieurs méthodes pour ce type d'exercices :

**1/** On montre que les droites passent par deux mêmes points distincts. Par exemple, pour $t = 0$ et $s = \dfrac{2}{3}$, les deux droites passent par $A\,(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et pour $t = 8$ et $s = -2$, les deux droites passent par $B\,(15\ ;\ 8\ ;\ -23)$.

**2/** On montre que les deux droites passent par un même point et ont des vecteurs directeurs colinéaires. Par exemple, le point $A$ appartient qux deux droites et les vecteurs $\overrightarrow{u_1}\,(2\ ;\ 1\ ;\ -3)$ et $\overrightarrow{u_2}\,(-6\ ;\ -3\ ;\ 9) = -2\overrightarrow{u_1}$ sont respectivement deux vecteurs directeurs des droites précédentes et colinéaires.

Ces deux représentations paramétriques sont celles d'une même droite.

5

**Exercice (Positions relatives de droites)** Dans un repère de l'espace, on considère les droites $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$ représentées par :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 5 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = 8 - 6t \\ y = 1 - 12t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 9t - 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_3) : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 + 3t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

**1/** Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont strictement parallèles.

**2/** Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_3)$ sont sécantes en un point $M$ dont on donnera les coordonnées.

[ Exercices 91 et 92 page 316 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

6

**Exercice (Intersection d'une droite et d'une sphère)** Soit $A\,(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ un point donné et $\vec{u}\,(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$. un vecteur de l'espace.

**1/** Rappeler l'équation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.

**2/** Déterminer l'équation réduite de la sphère $(\mathcal{S})$ de centre $\Omega\,(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

**3/** Déterminer les coordonnées des points d'intersection, s'il en existe, de la droite $(\mathscr{D})$ avec la sphère $(\mathcal{S})$.

**Correction:** **1/** D'après le cours, on a immédiatement :

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \ , \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$$

**2/** Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point quelconque de l'espace.

$$\begin{aligned}
M \in (\mathcal{S}) &\iff \Omega M = \sqrt{10} \\
&\iff \Omega M^2 = 10 && \text{(On élève au carré)} \\
&\iff (x_\Omega - x)^2 + (y_\Omega - y)^2 + (z_\Omega - z)^2 = 10 \\
&\iff (1-x)^2 + (-1-y)^2 + (2-z)^2 = 10 && \text{(Équation réduite de } (\mathcal{S})\text{)} \\
&\iff x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 4 = 0. && \text{(Équation développée de } (\mathcal{S})\text{)}
\end{aligned}$$

**3/** Le point $M$ appartient à $(\mathscr{D}) \cap (\mathcal{S})$ si, et seulement si ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 4 = 0. \end{cases}$$

($ie$) si et seulement s'il existe un réel $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 3 - t \\ (1+3t)^2 + (-2+2t)^2 + (3-t)^2 - 2(1+3t) + 2(-2+2t) - 4(3-t) - 4 = 0. \end{cases}$$

On développe et simplifie la dernière équation :

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 3t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 3 - t \\ 7t^2 - 3t - 4 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation admet deux solutions réelles qui sont 1 puis $-\dfrac{4}{7}$. On trouve alors :

- Pour $t = 1$, $M_1\,(4\ ;\ 0\ ;\ 2)$.
- Pour $t = -\dfrac{4}{7}$, $M_2\left(-\dfrac{5}{7}\ ;\ -\dfrac{22}{7}\ ;\ \dfrac{25}{7}\right)$.

La droite $(\mathscr{D})$ coupe donc la sphère $(\mathcal{S})$ en les deux points $M_1$ et $M_2$ trouvés ci-dessus.

## III.2 Représentation paramétrique d'un plan

**Théorème III**

Soit un plan $(\mathscr{P})$ défini par un point $A\,(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $\vec{v}\,(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$.
Le plan $(\mathscr{P})$ admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = x_A + ta + s\alpha \\ y = y_A + tb + s\beta \ , \ (t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2. \\ z = z_A + tc + s\gamma \end{cases}$$

**Preuve:** Il suffit de traduire la **définition** (2) :

$$\begin{aligned}
M(x\ ;\ y\ ;\ x) \in (\mathscr{P}) &\iff \exists\,(t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}\\
&\iff \exists\,(t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\\
&\iff \exists\,(t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{cases} x - x_A = ta + s\alpha \\ y - y_A = tb + s\beta \\ z - z_A = tc + s\gamma \end{cases}\\
&\iff \exists\,(t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{cases} x = x_A + ta + s\alpha \\ y = y_A + tb + s\beta \\ z = z_A + tc + s\gamma \end{cases}
\end{aligned}$$

[ Exercice 84 page 315 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemple 5:** Considérons le plan $(\mathscr{P})$ défini par :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + s \\ z = 4 + t - s \end{cases} ,\ (t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2.$$

- Le point $A(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$ appartient à $(\mathscr{P})$.
- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de $(\mathscr{P})$.
- Le point $B(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$ appartient-il à $(\mathscr{P})$ ?

  Si c'était le cas alors le système $\begin{cases} 2 + 3t = 3 \\ -1 + s = 2 \\ 4 + t - s = 1 \end{cases}$ aurait un couple solution. Voyons cela !

  En résolvant, on obtient :

$$\begin{cases} 2 + 3t = 3 \\ -1 + s = 2 \\ 4 + t - s = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ s = 3 \\ 4 + t - s = 1 \end{cases}$$

  Comme $4 + \dfrac{1}{3} - 3 \neq 6$, la dernière équation est incompatible avec les deux premières donc ce système n'admet pas de solution : $B \notin (\mathscr{P})$.
- Et qu'en est-il de $C(5\ ;\ -2\ ;\ 6)$ ?

  On résout, de même, le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 2 + 3t = 5 \\ -1 + s = -2 \\ 4 + t - s = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ s = -1 \\ 4 + t - s = 6 \end{cases}$$

  La dernière égalité est, cette fois, vérifiée : le point $C$ appartient donc à $(\mathscr{P})$.

[ Exercices 95 et 96 page 316 , **Maths Repère**, *Hachette*]

7

**Exercice** Dans un repère, on considère $A\,(-1\;;\;1\;;\;2)$, $\vec{u}\,(1\;;\;0\;;\;1)$ et $\vec{v}\left(\dfrac{1}{2}\;;\;-1\;;\;1\right)$.

**1/** Donner une représentation paramétrique du plan $(A\;;\;\vec{u}\;;\;\vec{v})$.

**2/** Déterminer l'intersection $(\mathscr{D})$ de ce plan et du plan $(O\;;\;\vec{\imath}\;;\;\vec{\jmath})$. On précisera un point et un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.

# Extraits de bac

1

**Exercice (Centres étrangers 2015)** Soit $a$ un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

**1/** Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

(a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel $x$ : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$.

(b) Déterminer les variations de la fonction $g$ et donner la valeur de son minimum.

(c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**2/** Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant 0$.

(b) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ est convergente.

(c) Dans le cas où $a$ vaut 0, donner la limite de la suite $(u_n)$.

**3/** Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite $(u_n)$ étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant a$.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**4/** Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier $n$ tel que $u_n > M$, où $M$ désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

| | |
|---|---|
| **Variables** | $n$ est un entier, $u$ et $M$ sont deux réels |
| **Initialisation** | $u$ prend la valeur $0,02$<br>$n$ prend la valeur 0<br>Saisir la valeur de $M$ |
| **Traitement** | Tant que ...<br>...<br>...<br>Fin tant que |
| **Sortie** | Afficher $n$ |

(a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

2

**Exercice (Asie 2014)** Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction $g$ définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)$$

où $a$ est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction $g$.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel $a$ soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction $f$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

**1/** Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f$.
Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

**2/** On note $f''$ la fonction dérivée de $f'$.
Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.

**3/** Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction $f'$ s'annule pour une unique valeur, notée $x_0$.

**4/** (a) Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ x_0]$.

(b) Calculer $f(2)$.
En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction $f$ s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note $a$ cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de $a$ arrondie au centième.

**5/** **(Pas encore)** On admet sans démonstration que la longueur $L$ de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)\,\mathrm{d}x.$$

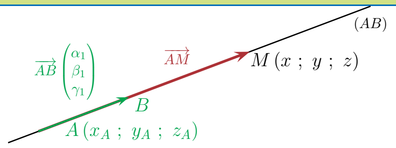
Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant $1,2$ comme valeur approchée du nombre $a$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{si\cancel{n}\,x}{\cancel{n}} = 6\,!!!$$

**Un élève**

## Droite et Plan

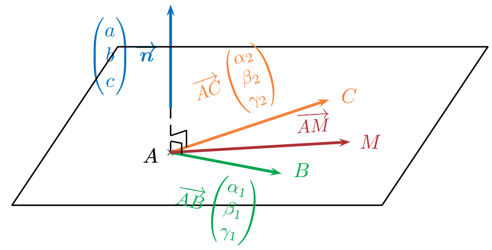
### Droite $(AB)$ ($A$ et $B$ distincts)




$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha_1 \\ y = y_A + t\beta_1 \\ z = z_A + t\gamma_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R}, \text{tel que } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\ &\iff \text{Leurs coordonnées sont proportionnelles.} \end{aligned}$$

### Plan $(ABC)$ ($A$, $B$ et $C$ non alignés ou $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires)




$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha_1 + s\alpha_2 \\ y = y_A + t\beta_1 + s\beta_2 \\ z = z_A + t\gamma_1 + s\gamma_2 \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ non colinéaires $\Longrightarrow$ vecteurs directeurs de $(ABC)$.

$\overrightarrow{n}$ normal à $(ABC)$ $\iff$ $\overrightarrow{n}$ normal à 2 vecteurs non colinéaires de $(ABC)$
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{aligned} M \in (ABC) &\iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires.} \\ &\iff \exists!\,(x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2, \text{tel que } \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\ &\iff M\,(x\ ;\ y) \text{ dans le repère } (A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) \text{ du plan } (ABC) \\ &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \end{aligned}$$

---

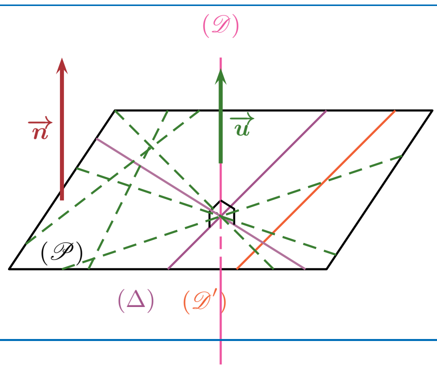
**Définition 4**

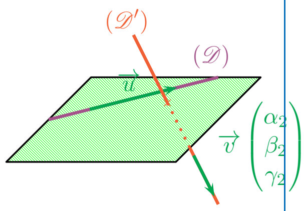
On dit que deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont :

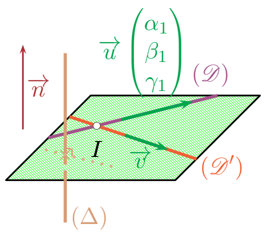
- **Perpendiculaires** si, et seulement si, $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ se coupent perpendiculairement.
- **Orthogonales** si, et seulement si, il existe une droite $(\Delta)$ parallèle à $(\mathscr{D}')$ qui est perpendiculaire à $(\mathscr{D})$.

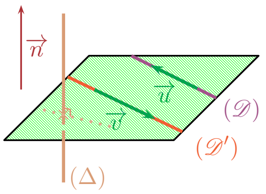
$(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ si, et seulement si ...

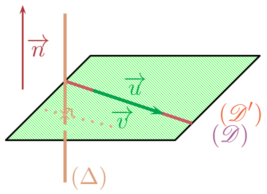
- ... un des vecteurs directeurs de $(\mathscr{D})$ est normal au plan $(\mathscr{P})$.
- ... Il existe deux droites sécantes de $(\mathscr{P})$ perpendiculaires à $(\mathscr{D})$.
- ... $(\mathscr{D})$ est orthogonale à toutes les droites de $(\mathscr{P})$.

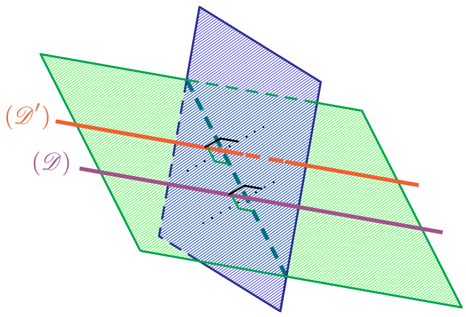
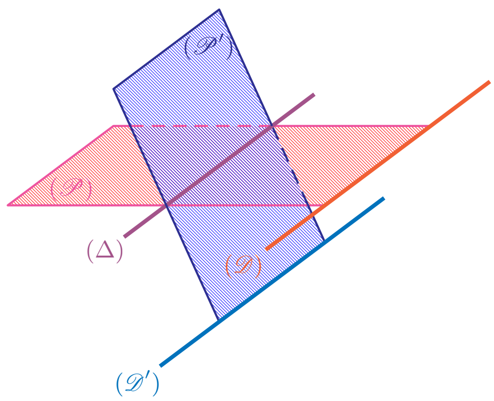


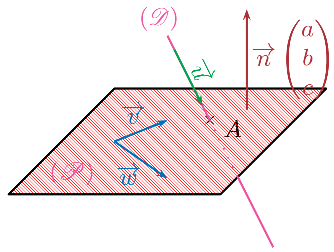
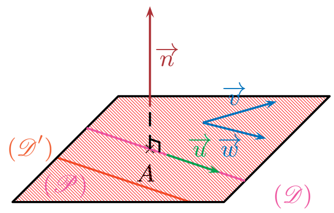
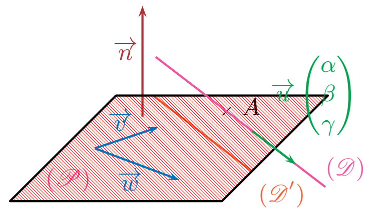
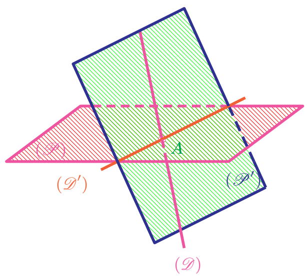
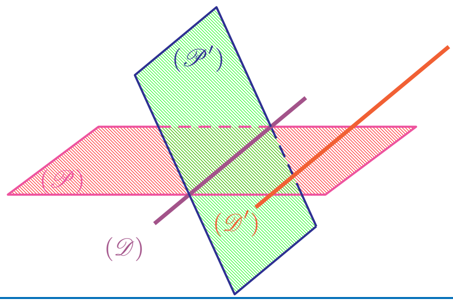
<table>
<tr><td colspan="4">Positions relatives de deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ coplanaires</td><td>$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ non coplanaires</td></tr>
<tr><td>Sécantes</td><td>Strictement parallèles</td><td>Confondues</td><td rowspan="5">

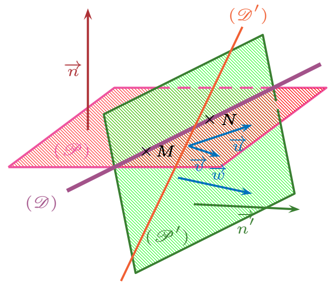
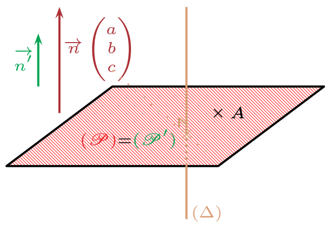
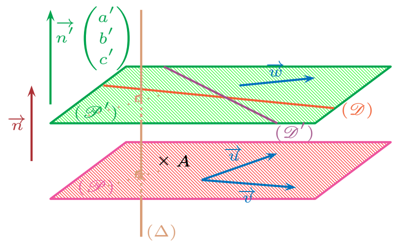
Il n'existe aucun plan contenant $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

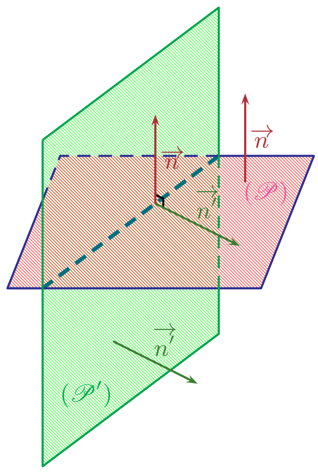
Un unique point d'intersection</td><td>

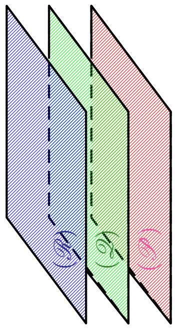
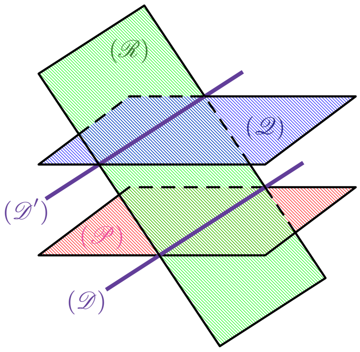
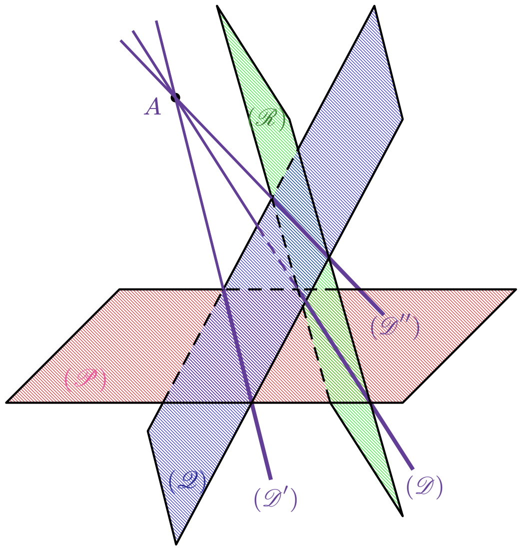
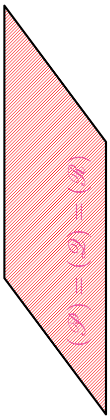
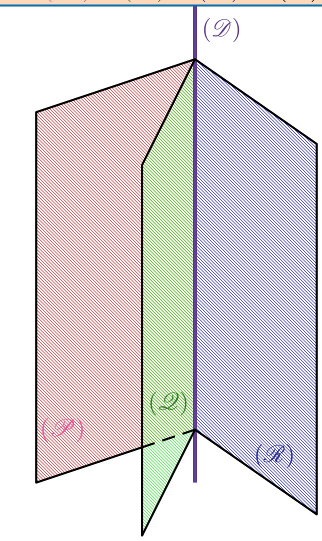
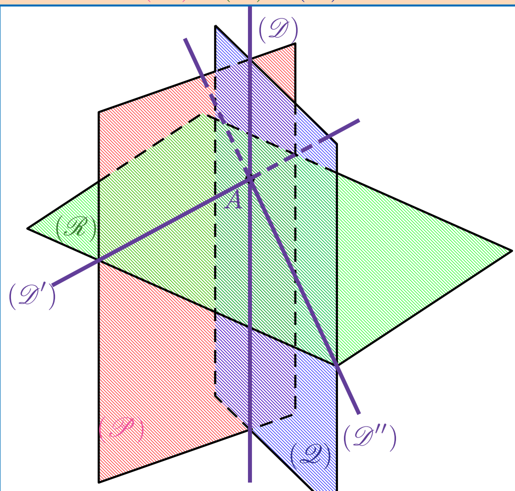
Aucun point d'intersection</td><td>

Au moins 2 points d'intersection</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont perpendiculaires à un même plan.<br>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Toute perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ est orthogonale à $(\mathscr{D}')$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les vecteurs directeurs de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonaux à un même vecteur $\vec{n}$ (un vecteur normal du plan) : $\vec{u}.\vec{n} = \vec{v}.\vec{n} = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_A + t\alpha_1 = x_B + t'\alpha_2 \\ y_A + t\beta_1 = y_B + t'\beta_2 \\ z_A + t\gamma_1 = z_B + t'\gamma_2 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>$(\mathcal{S})$ a un unique couple solution $(t_0\ ;\ t'_0)$.</td><td colspan="2">$\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}$ sont colinéaires</td><td>Les équations de $(\mathcal{S})$ sont incompatibles.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Théorème IV (Théorème du toit)<br>Soient $\begin{cases} (\mathscr{D}) \subset (\mathscr{P}) \\ (\mathscr{D}') \subset (\mathscr{P}') \end{cases}$ et $(\mathscr{D}) \,/\!/\, (\mathscr{D}')$.<br>Si $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants en une droite $(\Delta)$ alors $\begin{cases} (\mathscr{D}) \,/\!/\, (\Delta) \\ (\mathscr{D}') \,/\!/\, (\Delta). \end{cases}$</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Positions relatives d'une droite $(\mathscr{D})$ et d'un plan $(\mathscr{P})$</th></tr>
<tr><th>$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sécants</th><th>$(\mathscr{D})$ contenue dans $(\mathscr{P})$</th><th>$(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ disjoints (ou strictement parallèles)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Il existe une droite $(\mathscr{D}')$ de $(\mathscr{P})$ parallèle à $(\mathscr{D})$.</td></tr>
<tr><td>Aucun vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ n'est coplanaire avec $(\mathscr{P})$.</td><td colspan="2">Tout vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ est coplanaire avec $(\mathscr{P})$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\vec{u}.\vec{n} \neq 0$</td><td colspan="2">$\vec{u}.\vec{n} = 0$</td></tr>
<tr><td>$\forall A \in (\mathscr{D}),\ A \in (\mathscr{P})$.</td><td>$\forall A \in (\mathscr{D}),\ A \notin (\mathscr{P})$.</td></tr>
<tr><td>$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}') = A$</td><td>$(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{P}) = (\mathscr{D})$</td><td>$(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{P}) = \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pour trouver $(\mathscr{D}) \cap (\mathscr{P})$, on cherche s'il existe des points appartenant à $(\mathscr{D})$ et à $(\mathscr{P})$.</td></tr>
<tr><td>Pour déterminer l'intersection $(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{D})$ :<br>
</td><td colspan="2">Si une droite $(\mathscr{D}')$ est parallèle à deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sécants en une droite $(\mathscr{D})$ alors $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles.<br>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">1/ On trouve un plan $(\mathscr{P}')$ qui contient $(\mathscr{D})$ et sécant à $(\mathscr{P})$.<br>2/ On détermine la droite $(\mathscr{D}') = (\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$.<br>3/ $A = (\mathscr{D}) \cap (\mathscr{D}') = (\mathscr{D}) \cap (\mathscr{P})$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>$(\mathcal{S})$ possède une unique solution.<br>(On trouve $t$ puis $x$, $y$, $z$)</td><td>$(\mathcal{S})$ possède une infinité de solutions.<br>(La première équation est une combinaison des 3 dernières)</td><td>$(\mathcal{S})$ ne possède pas de solutions.<br>(Les équations sont incompatibles)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Positions relatives de deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$</th></tr>
<tr><th>$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sécants</th><th>$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ confondus</th><th>$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ disjoints (ou strictement parallèles)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tout couple $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ de vecteurs directeurs de $(\mathscr{P})$ dirige $(\mathscr{P}')$.</td></tr>
<tr><td>Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires de $(\mathscr{P})$, on peut trouver un vecteur $\overrightarrow{w}$ de $(\mathscr{P}')$ non coplanaire avec eux.</td><td colspan="2">Tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de $(\mathscr{P}')$ est coplanaire avec deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires de $(\mathscr{P})$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Il existe une droite $(\mathscr{D}')$ de $(\mathscr{P}')$ non parallèle à $(\mathscr{P})$</td><td colspan="2">Il existe 2 droites de $(\mathscr{P}')$ sécantes et parallèles à $(\mathscr{P})$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaire à une même droite $(\Delta)$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires</td><td colspan="2">$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires</td></tr>
<tr><td>$\exists A \in (\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$.</td><td>$\exists A \in (\mathscr{P})$ et $A \notin (\mathscr{P}')$.</td></tr>
<tr><td>$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}') = (\mathscr{D})$</td><td>$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}') = (\mathscr{P})$</td><td>$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}') = \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pour trouver $(\mathscr{D})$ ou pas, on cherche s'il existe deux points distincts $M$ et $N$ appartenant à $(\mathscr{P})$ et à $(\mathscr{P}')$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} ax &+& by &+& cz &+& d &=& 0 \\ a'x &+& b'y &+& c'z &+& d' &=& 0 \end{array} \right.$</td></tr>
<tr><td>$x$ et $y$ s'expriment en fonction de $z$</td><td>Les deux équations sont proportionnelles</td><td>$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ mais $d \neq kd'$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
</td><td>$(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}') \iff \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0.$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Intersection de trois plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(\mathcal{S}):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & (L_1)\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & (L_2)\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 & (L_3)\end{cases}$ $\quad(\mathcal{S}_0):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 & (L'_1)\\ a_2x+b_2y+c_2z=0 & (L'_2)\\ a_3x+b_3y+c_3z=0 & (L'_3)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(\mathscr{P})\cap(\mathscr{Q})\cap(\mathscr{R})=\emptyset$.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Les vecteurs normaux de $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ sont colinéaires.</td><td>Si $(\mathscr{P})\mathbin{/\!/}(\mathscr{Q})$ alors $(\mathscr{D})\mathbin{/\!/}(\mathscr{D}')$.</td><td>$(\mathscr{D})$, $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ concourantes ou parallèles.</td></tr>
<tr><td>$(L'_1)$, $(L'_2)$ et $(L'_3)$ sont proportionnelles.</td><td>$(L'_1)$ et $(L'_2)$ sont proportionnelles.</td><td>Cas général trop compliqué en TS.</td></tr>
<tr><td>$(\mathscr{P})\cap(\mathscr{Q})\cap(\mathscr{R})=(\mathscr{P})$</td><td>$(\mathscr{P})\cap(\mathscr{Q})\cap(\mathscr{R})=(\mathscr{D})$</td><td>$(\mathscr{P})\cap(\mathscr{Q})\cap(\mathscr{R})=A$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$(L_1)$, $(L_2)$ et $(L_3)$ sont proportionnelles.</td><td>$(L_3)$ est une combinaison linéaire de $(L_1)$ et $(L_2)$.</td><td>$A\,(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ est l'unique solution.</td></tr>
</table>

# Extraits de bac

1

**Exercice (Polynésie 2014)** Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthogonal.

**1/** Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente $\Delta$ dont on déterminera une équation.

**2/** Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite $\Delta$
Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

(a) Déterminer la limite de la fonction $h$ en $-\infty$.

(b) Justifier que, pour tout réel $x, h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.
En déduire la limite de la fonction $h$ en $+\infty$.

(c) On note $h'$ la fonction dérivée de la fonction $h$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x$, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de $x$.

(d) Dresser le tableau de variations de la fonction $h$ sur $\mathbb{R}$.

(e) En déduire que, pour tout réel $x$, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

(f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite $\Delta$ ?

**3/** Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

(a) Pour tout réel $x$, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

(b) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2

**Exercice (Amérique du Nord 2014)** On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction $f$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

**Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$**

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

**1/** Justifier que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.

**2/** La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

**Partie B : Étude de la fonction $g$**

On note $M$ le point d'abscisse $x$ de la courbe $\mathcal{C}_f$, $N$ le point d'abscisse $x$ de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance $MN$.

**1/** Justifier que, pour tout $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la distance $MN$ est égale à $g(x)$.

**2/** On note $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Pour tout $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $g'(x)$.

**3/** Montrer que la fonction $g$ possède un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ que l'on déterminera.
En donner une interprétation graphique.

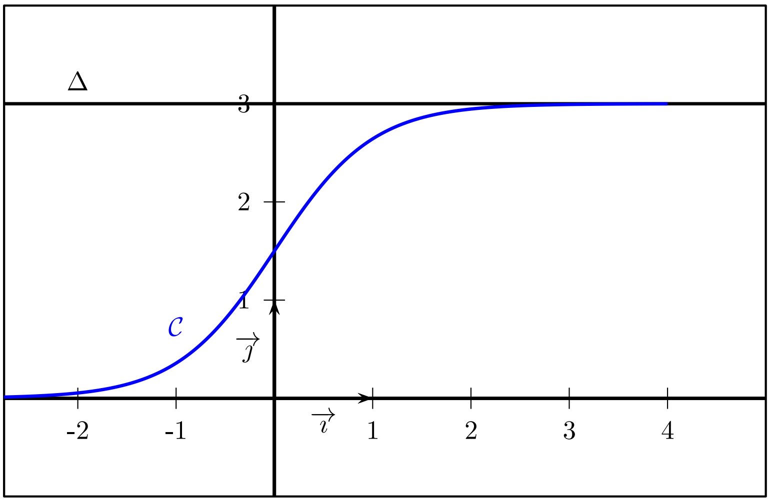
3

Exercice **Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = 3$.




**1/** Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**2/** Justifier que la droite $\Delta$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

**3/** Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

4

**Exercice (Pondichery 2015)** **Partie A**

Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0$ et, pour tout entier naturel $n$, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel $n$, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

**1/** Démontrer que, la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $a$.

**2/** En déduire que si $a$ appartient à l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, alors la suite $(u_n)$ a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

**Partie B**

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

**1/** Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

**2/** Pour tout entier naturel $n$, on note $h_n$ la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.

(a) Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

(b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite $(h_n)$.
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

(c) La suite $(h_n)$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5

**Exercice** *Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.*

**Affirmation 1 :** Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

**Affirmation 2 :** *On considère les points* E $(2 ; 1 ; -3)$, F $(1 ; -1 ; 2)$ *et* G $(-1 ; 3 ; 1)$ *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*

Une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2t \\ y & = & -3+4t \\ z & = & 7-10t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

**Affirmation 3 :** La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH.

Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.

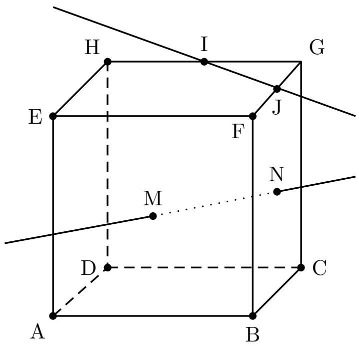
Les droites (IJ) et (MN) sont :

**1/** perpendiculaires

**2/** sécantes, non perpendiculaires

**3/** orthogonales

**4/** parallèles



6

**Exercice** **Partie A**

$f$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'$ est la fonction dérivée de la fonction $f$.

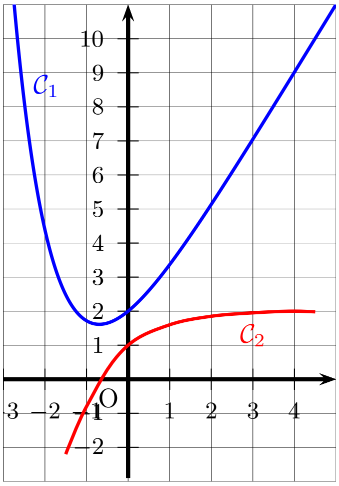
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction $f'$.

Le point A de coordonnées $(0\,;\,2)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$.

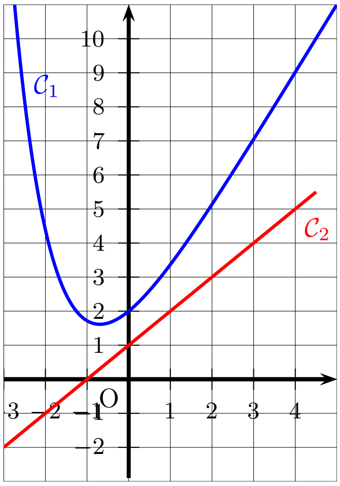
Le point B de coordonnées $(0\,;\,1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

**1/** Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction $f$. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathcal{C}_2$ de la fonction dérivée $f'$ est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

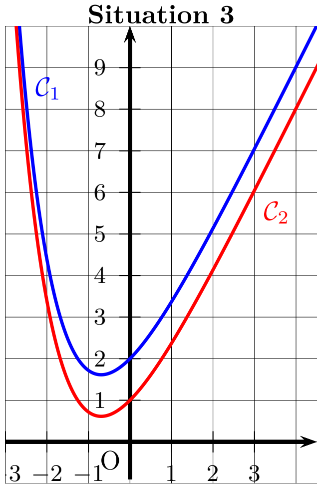
**Situation 1**




**Situation 2 ($\mathcal{C}_2$ est une droite)**




**Situation 3**




**2/** Déterminer l'équation réduite de la droite $\Delta$ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A.

**3/** On sait que pour tout réel $x$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.

(a) Déterminer la valeur de $b$ en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

(b) Prouver que $a = 2$.

**4/** Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**5/** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

**Partie B**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

**1/** (a) Montrer que la fonction $g$ admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_1$ par rapport à la droite $\Delta$.

# Géométrie Vectorielle - Exponentielle

1

**Exercice (Antilles-Guyane 2014)** **Partie A**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

**1/** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe représentative de $f$ ?

**2/** Déterminer la dérivée $f'$ de la fonction $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**3/** Dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de $f$, la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$. On prendra soin de bien faire figurer toutes les tangentes et autres asymptotes si elles existent.

On prendra $\left\{\begin{array}{l}\textbf{6 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses}\\ \textbf{10 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées}\end{array}\right.$, et on ne tracera la courbe que pour des coordonnées **positives**.

**Partie B**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**1/** Placer sur le graphique précédent, en utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\Delta$, les points $A_0$, $A_1$ et $A_2$ d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives $u_0$, $u_1$ et $u_2$.

Laisser les tracés explicatifs apparents.

**2/** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

**3/** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**4/** (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

(b) Justifier que la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$ vérifie une certaine équation que l'on précisera.

(c) Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

**Partie C**

On considère la suite $(S_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il calcule $S_{100}$.

```
Déclaration des variables :
        S et u sont des nombres réels
        k est un nombre entier
Initialisation :
        u prend la valeur ......
        S prend la valeur ......
Traitement :
        Pour k variant de 1 à ....
                u prend la valeur u × e^(-u)
                S prend la valeur ....
        Fin Pour
        Afficher ......
```

2

**Exercice (D'après bac)** L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k})$. On note $(\mathscr{D})$ la droite passant les points $A\,(1\ ;\ -2\ ;\ -1)$ et $B\,(3\ ;\ -5\ ;\ -2)$.

**1/** Démontrer qu'une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$ est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**2/** $(\mathscr{D}')$ est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ ne sont pas coplanaires.

**3/** On considère le plan $(\mathscr{P})$ passant par le point $C\,(0\ ;\ -3\ ;\ 0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ -4\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{v}\,(0\ ;\ -5\ ;\ 1)$.

(a) Démontrer que le plan $(\mathscr{P})$ contient la droite $(\mathscr{D})$.

(b) Démontrer que le plan $(\mathscr{P})$ et la droite $(\mathscr{D}')$ se coupent en un point $D$ dont on déterminera les coordonnées.

*On se souviendra d'Archimède quand on aura oublié Eschyle, parce que les langues meurent, mais pas les idées mathématiques.*

**G. H. Hardy**

Chapitre

9

# Fonctions Logarithmes

La création de la fonction logarithme népérien est, à l'origine, antérieure à la fonction exponentielle bien que dans notre progression elle suive l'étude de la fonction exponentielle.

La fonction logarithme a été créée par un drapier écossais du XVII$^{e}$ siècle. Ce drapier, John Napier avant qu'il soit anobli et prenne le nom de John Néper, cherche une fonction pour simplifier les longs calculs des astronomes, des navigateurs et des financiers. Il crée alors une fonction qui transforme le produit en somme (*ie*) $f(ab) = f(a) + f(b)$. C'est cette fonction, qui fait écho à la fonction exponentielle, qui est l'objet de ce chapitre.

1

**Exercice (Introduction)**

**1/** Résoudre les équations : $e^x = 1$, $e^x = e$ et $e^x = \frac{1}{e}$.

**2/** (a) Donner, suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de solution de l'équation $e^x = \lambda$.

(b) Donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près de la solution de l'équation $e^x = 2$.

## Sommaire

# I Logarithme népérien

## I.1 Généralités

**Définition 1**

On appelle fonction **logarithme népérien** notée ln, la fonction définie de $]0\,;+\infty\,[$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$x = e^y \iff y = \ln x.$$

On dit que les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.

**Preuve:** La fonction exponentielle est une fonction continue, strictement croissante à valeur dans $]0\,;+\infty\,[$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $x = e^y$, d'inconnue $y$ avec $x \in ]0\,;+\infty\,[$, admet une unique solution que l'on peut noter $\ln x$.

**Remarque:** Comme $e^y$ est toujours strictement positif, il est clair que l'équation $x = e^y$ n'aura pas de solutions pour $x \leqslant 0$ (*ie*) la fonction $x \longmapsto \ln x$ ne sera définie que sur $\mathbb{R}$ amputé de $]-\infty\,;0]$ soit $]0\,;+\infty\,[$.

**Corollaire 1**

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$
- $\forall x \in ]0\,;+\infty\,[$, $e^{\ln x} = x$. (**ATTENTION** aux ensembles de définition).

[ Applications 1 page 119 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemple 1:** Résoudre $\ln(2-2x) = 1$.

Tout d'abord les conditions d'existence. Cette équation ne sera valide que si $2-2x > 0$ (*ie*) $x \in ]-\infty\,;1\,[$.

Il suffit alors de résoudre en appliquant les propriétés ci-dessous :

$$\ln(2-2x) = 1 \iff \ln(2-2x) = \ln e \iff 2-2x = e \iff x = \frac{2-e}{2}.$$

Comme $\dfrac{2-e}{2} \simeq -0,36 < 1$, on a $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{2-e}{2}\right\}$.

[ Applications 2 page 119 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## I.2 Courbe représentative

**Théorème 1**

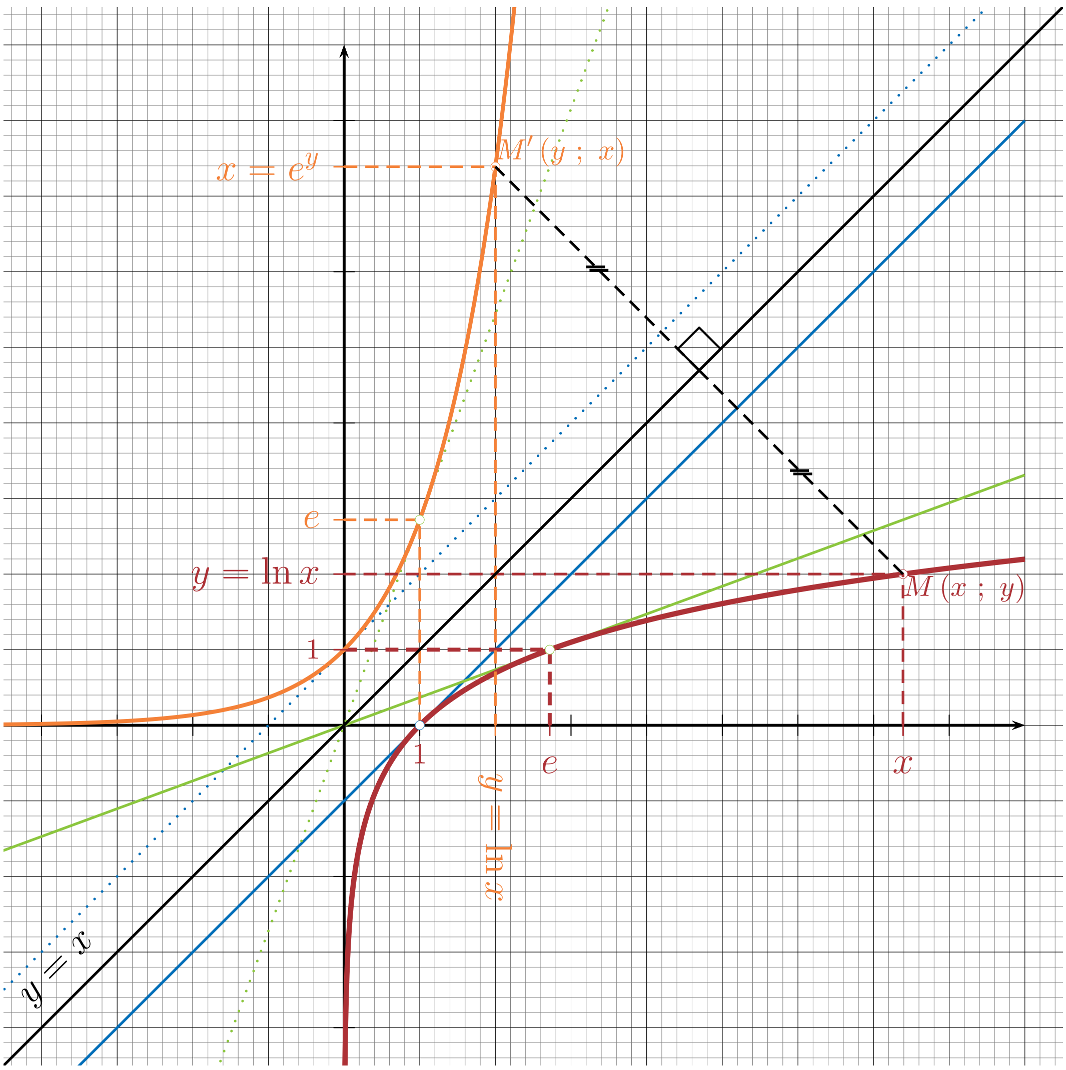
Dans un repère orthonormal, les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ [1].

**Preuve:** Notons respectivement $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ les courbes respectives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de $\mathscr{C}_{\ln}$ (*ie*) $y = \ln x$ avec $x \in ]0\,;+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$ . Par définition, on a aussi $x = e^y \iff M'(y\ ;\ x)$ est un point de $\mathscr{C}_{\exp}$. Les courbes $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ se déduisent donc l'une de l'autre par une symétrie d'axe la première bissectrice d'équation $y = x$.

**Méthode 1**

Soit $M$ un point de $\mathscr{C}_{\exp}$, par symétrie, on construit $M' \in \mathscr{C}_{\ln}$ tel que la droite d'équation $y = x$ soit la médiatrice du segment $[MM']$.




**Remarque:** Par symétrie les droites d'équation $y = x - 1$ et $y = \dfrac{1}{e}x$ sont respectivement les tangentes à $\mathscr{C}_{\ln}$ en 0 et $e$.

1. La droite d'équation $y = x$ est aussi souvent appelée « première bissectrice ».

## I.3 Variations

**Théorème 11**

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Preuve:** Soient deux réels $a$ et $b$ strictement positifs avec $a < b$. Il suffit de revenir aux définitions :

$$a = e^{\ln a} < e^{\ln b} = b \iff \ln a < \ln b \text{ par stricte croissance de l'exponentielle.}$$

La fonction logarithme est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme pour l'exponentielle, on récupère toute une série de relations à connaître :

**Proposition 1**

Soient $a$ et $b$ deux réels **strictement positifs**.

- $\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a < \ln b \iff a < b$.
- $\ln a = 0 \iff a = 1$ et $\begin{cases} \ln a > 0 \iff a > 1 \\ \ln a < 0 \iff a < 1 \end{cases}$

Bien connaître l'allure de la courbe représentative du logarithme permettra de retenir facilement ces propriétés et évitera bien des bévues.

**Remarque:** Ces propriétés permettent de résoudre des équations et des inéquations. On veillera à mettre l'équation ou l'inéquation sous la forme ci-dessus et à déterminer les conditions de validité[2] de l'équation ou de l'inéquation.

**Exemples 2:**

**1/** Résoudre $\ln(2x+1) \leqslant -1$.

Ici aussi, la condition d'existence impose $2x+1>0 \iff x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. On résout ensuite[3] :

$$\ln(2x+1) \leqslant -1 \iff \ln(2x+1) \leqslant \ln\left(e^{-1}\right) \iff 2x+1 \leqslant \frac{1}{e} \iff x \leqslant \frac{1-e}{2e}.$$

L'ensemble solution est donc l'intersection des deux ensembles $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $\left]-\infty\,;\frac{1-e}{2e}\right]$.

Comme $\frac{1-e}{2e} \simeq -0,32 \geqslant -\frac{1}{2}$ celle-ci n'est pas vide et on obtient :

$$\mathscr{S} = \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1-e}{2e}\right].$$

[ Applications 3 page 119
Exercice résolu 6 page 135
Exercices 81 à 86 pages 142-143 ] , **Maths Repère**, *Hachette*

2. Le logarithme, contrairement à l'exponentielle ne prend ses valeurs que sur les réels strictement positifs!!!
3. Et seulement ensuite!

# II Propriétés algébriques

## II.1 Relation fonctionnelle

**Théorème III**

Pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$, on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b. \tag{9.1}$$

**Preuve:** Comme toujours on se ramène à ce que l'on sait, soit les propriétés de l'exponentielle et la définition du logarithme :

Par définition : $e^{\ln ab} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$ d'après la relation fonctionnelle de l'exponentielle.

Donc $e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b}$. D'après la continuité et la stricte croissance de l'exponentielle, cette égalité est équivalente à

$$\ln ab = \ln a + \ln b.$$

[ Applications 1 page 121 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Remarque:** Comme pour la fonction exponentielle, cette relation permettrait de définir à elle seule la fonction logarithme comme étant l'unique fonction $f$ définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant la relation (9.1) et $f(e) = 1$. D'où son nom de « fonctionnelle ». Nous y reviendrons plus loin.

**Exemple 3:** $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$.

**Corollaire I**

Pour tout réels strictement positifs, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, $b_1$, $b_2$, ..., $b_m$, on a :

$$\ln\left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}\right) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n - \ln b_1 - \ln b_2 - \ldots - \ln b_m.$$

Cette propriété est souvent utilisée pour linéariser les expressions.

**Exemple 4:** L'image d'une suite géométrique par la fonction logarithme est une suite arithmétique.

En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ (*ie*)

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & & \\ u_{n+1} & = & qu_n. \end{array}\right.$$

Alors $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln q$. La suite $\left(\ln u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\ln q$ et de premier terme $\ln u_0$.

On voit déjà apparaître que cette relation va imposer au logarithme une croissance très, très, très faible.

Poursuivons !

## II.2 Quotient, Inverse, Puissance et Racine carrée

**Théorème IV**

Pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$, on a :

- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ et $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln a^n = n \ln a$ et $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

**Preuve:** On continue à se ramener aux propriétés de la fonction exponentielle :

- $e^{\ln \frac{a}{b}} = \dfrac{a}{b}$ et $e^{\ln a - \ln b} = \dfrac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \dfrac{a}{b}$. D'où la propriété.
  $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$ n'est qu'un cas particulier de la propriétés précédente avec $a = 1$ et $b = a$.
- On démontre la relation $\ln a^n = n \ln a$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'hérédité découle de
  $$\ln a^{n+1} = \ln \left(a \times a^n\right) = \ln a + n \ln a.$$
- Pour la dernière propriété, comme $a$ est strictement positif, on peut écrire $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ puis appliquer la relation fonctionnelle :
  $$\ln a = \ln \left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) = 2 \ln \sqrt{a} \iff \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

[ Démonstrations page 128
Exercices 39 et 50 à 52 page 140 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Exemples 5:**

**1/** $\ln 50 = \ln \left(5^2 \times 2\right) = 2 \ln 5 + \ln 2$.

**2/** $\ln \sqrt{12} = \dfrac{1}{2} \ln \left(2^2 \times 3\right) = \ln 2 + \dfrac{1}{2} \ln 3$.
Ces deux premiers exemples montrent, qu'à l'époque bénie où les calculatrice n'existaient pas, une simple table avec les valeurs approchées des logarithmes des 10 premiers entiers suffisait à faire bien des calculs !

**3/** Déterminons l'entier $n$ tel que $2^n > 10000$. On raisonne par équivalence :
$$2^n > 10000 \iff n \ln 2 > \ln(10000) = 4 \ln 10 \iff n > 4 \frac{\ln 10}{\ln 2} \quad \text{car } \ln 2 > 0\,!.$$
Comme $4 \dfrac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 13,3$, l'entier $n$ devra être supérieur à 14.

**4/** Résolvons l'équation $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2}\ln x$.

Avant toute opération, on s'intéresse au domaine de définition $\mathcal{D}$ de cette dernière :

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2x-3>0 \text{ et } 6-x>0 \text{ et } x>0\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x > \frac{3}{2} \text{ et } x<6 \text{ et } x>0\right\} = \left]\frac{3}{2}\,;6\right[.\end{aligned}$$


Pour $x \in \mathcal{D}$, on résout alors l'équation en essayant d'être malin dans l'application des propriétés :

$$\begin{aligned}\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x &\iff \frac{1}{2}\big(\ln(2x-3)+\ln x\big) = \ln(6-x)\\ &\iff \ln x(2x-3) = \ln(6-x)^2\\ &\iff x(2x-3) = (6-x)^2\\ &\iff x^2+9x-36=0\\ &\iff (x-3)(x+12)=0\\ &\iff x=3 \text{ ou } x=-12.\end{aligned}$$

Comme $-12 \notin \mathcal{D}$, on en déduit que $\mathscr{S} = \{3\}$.

[ Exercice résolu 4 page 133
Exercices 57, 58 et 65 à 71 page 141 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**2**

**Exercice** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{4}{5}$.

À partir de quel indice $n$ a-t-on $u_n \leqslant 10^{-3}$ ?

**Correction:** Par définition, on a $u_n = u_0 \times q^n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

Il suffit donc de résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n \leqslant 10^{-3}$.

Comme tous les nombres sont strictement positifs, cette équation est équivalente à

$$n\ln\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant -3\ln 10$$

$$n \geqslant -\frac{3\ln 10}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \qquad\qquad \frac{4}{5}<1 \iff \ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0!!!$$

De tête[4], $-\dfrac{3\ln 10}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq 30,96$. Donc, le plus petit indice cherché est $n = 31$.

[ Exercice 78 page 142 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

4. Meuh non ! À la calculatrice !

# III Propriétés analytiques

## III.1 Dérivabilité

**Théorème V**

La fonction $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

**Preuve:** On admet que la fonction ln est continue sur $]0\,;+\infty[$ et on revient à la définition de la dérivée (*ie*) on cherche les $a \in ]0\,;+\infty[$ pour lesquels le taux de variation $\dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$ en $a$ admet une limite finie lorsque $h$ tend vers 0.

Pour se ramener à ce que l'on connaît, on pose $a = e^A$ et $a+h = e^H$ (*ie*) $A = \ln a$ et $H = \ln(a+h)$.

Comme la fonction ln est continue sur $]0\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{h\to 0} H = \ln a = A$. On obtient alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \lim_{H\to A} \frac{H-A}{e^H - e^A}.$$

On reconnaît l'inverse de la dérivée de exp en $A$.

D'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$ existe et on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \frac{1}{e^A} = \frac{1}{e^{\ln a}} = \frac{1}{a}, \quad \text{valeur finie si } a \in ]0\,;+\infty[.$$

[ Démonstrations page 127 , **Maths Repère**, *Hachette*]

S'il était nécessaire, le signe de $\dfrac{1}{x}$ toujours strictement positif confirmerait la stricte croissance du logarithme démontrée au **théorème** (II).

[ Applications 2 page 121 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Remarque:** Même si ce résultat est faux en général, le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ doit nous aider à penser que la croissance de la fonction ln, déjà pas bien forte, ralentit encore pour presque s'annuler à l'infini. On se doute alors que la comparaison avec les fonctions polynômes ne sera pas à son avantage.

## Hors-Programme

**Théorème VI**

Toute fonction $f$ définie et dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$ vérifiant la relation :

$$\text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y\ ,\ f(xy) = f(x) + f(y), \tag{9.2}$$

est proportionnelle à la fonction logarithme (*ie*) s'écrit sous la forme $f(x) = k\ln x$ où $k$ est un réel quelconque.

Ce théorème caractérise le logarithme népérien comme le générateur de toutes les fonctions vérifiant la relation (9.2) (ou (9.1)). L'ensemble de celles-ci est alors une droite vectorielle dirigée par ln.

**Preuve:** Soit $f$ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent.

- Tout d'abord, pour tout $x > 0$, $\cancel{f(x)} = f(x \times 1) = \cancel{f(x)} + f(1)$ entraîne $f(1) = 0$.
- Posons ensuite, pour tout $> 0$, la fonction $g$ définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par :

$$g(x) = f(xy) - f(x).$$

Comme $g$ est dérivable, on peut calculer $g'(x) = yf'(xy) - f'(x)$.
Or, la relation (9.2) entraîne aussi que $g(x) = \cancel{f(x)} + f(y) - \cancel{f(x)} = f(y)$. Fonction constante par rapport à $x$ donc de dérivée nulle (*ie*) $g'(x) = 0$.
On en déduit que $\forall x > 0$, $yf'(xy) - f'(x) = 0$.

$$\text{En particulier, pour } x = 1,\ yf'(y) = f'(1) \iff f'(y) = \frac{k}{y} \tag{9.3}$$

En posant $k = f'(1)$.

- Montrons enfin que $f(x) = k\ln x$ en posant, $h$ la fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$ par :

$$h(x) = f(x) - k\ln x.$$

D'après la relation (9.3), on a : $h'(x) = f'(x) - \dfrac{k}{x} = 0$. La fonction $h$ est donc constante à $h(1) = f(1) - k\ln 1 = 0$ (*ie*) $f(x) = k\ln x$.

- Conclusion : Il existe un réel $k$ tel que pour tout $x > 0$ : $f(x) = k\ln x$.

[ Démonstrations page 129 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## III.2 Limites

**Théorème VII**

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

**Preuve:**

- Pour montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, considérons un réel $M$, nécessairement strictement positif et montrons qu'il existe une valeur pour $x$ au-delà de laquelle $\ln x > M$. Or, $\ln x > M \iff x > e^M$ par stricte croissance de l'exponentielle.

  Donc, pour tout $M > 0$, il suffira de choisir $x > e^M$ pour avoir $\ln x > \ln e^M = M$.

- Comme toujours, ayant déjà travaillé un peu, on essaie de se ramener à un résultat connu. Le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$, possible car $x \neq 0$ va nous y aider.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{X \to +\infty} \ln \left( \frac{1}{X} \right) = - \lim_{X \to +\infty} \ln X = -\infty.$$

En particulier, l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentative du logarithme.

[ Démonstrations page 127 , **Maths Repère**, *Hachette*]

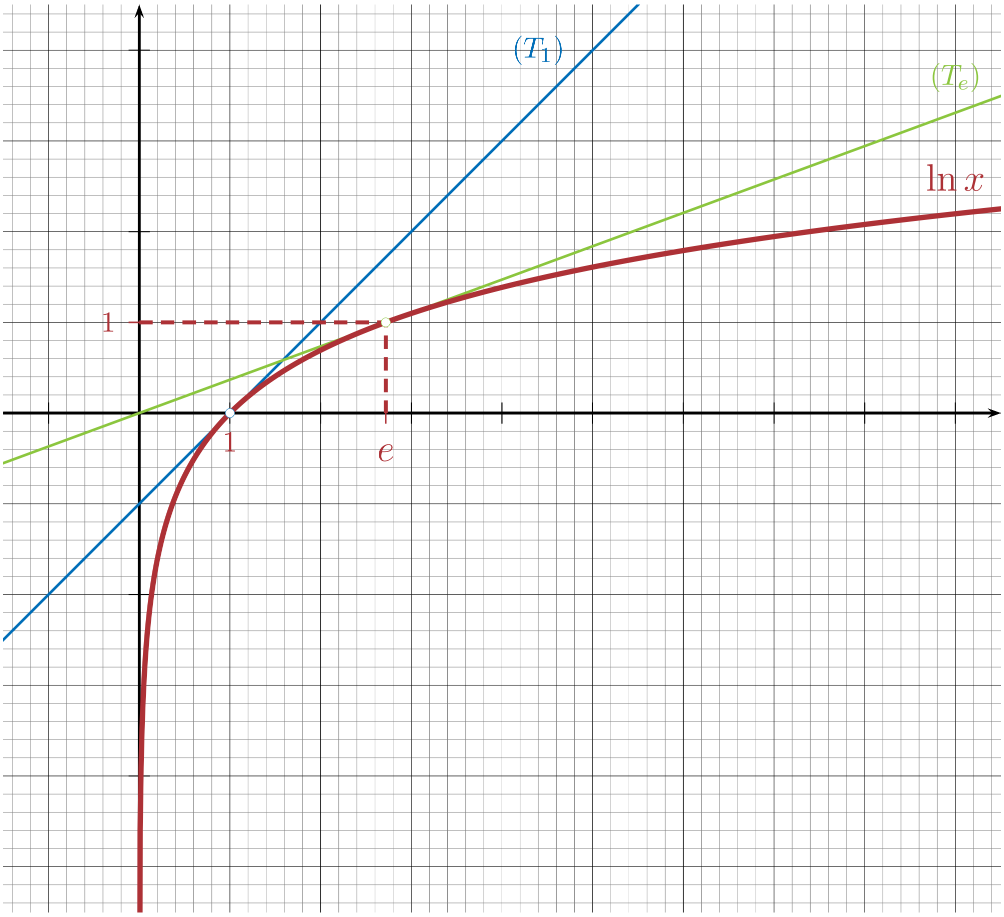
## III.3 Courbe représentative

Tous les résultats ont déjà été démontrés. On en fait la synthèse dans un tableau et sur la courbe.

| $x$ | $0$ | $1$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\Vert$ | $+$ | | |
| $\ln$ | $\Vert$ $-\infty$ $\nearrow$ | $0$ $\nearrow$ | $1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

On peut alors tracer la courbe représentative ainsi que[5] son asymptote et ses deux tangentes remarquables d'équation $(T_1) : y = x - 1$ et $(T_e) : y = \dfrac{1}{e}x$.

5. Les asymptotes et les tangentes avant la courbe!!!




### III.4 Des limites de référence

Tout d'abord une comparaison en 1 :

**Théorème VIII**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

**Preuve:** Comme pour la démonstration de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, on reconnaît la définition d'un nombre dérivé, celui de $\ln(x)$ en 1 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \big(\ln x\big)'(1) = \left(\frac{1}{x}\right)(1) = 1.$$

Ce résultat est à associer avec la partie « Approximation affine » du chapitre sur la dérivation et exprime le fait qu'au voisinage de 1, le logarithme peut être approché par sa tangente $(T_1)$[6] :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \iff \ln(1+x) = x + \varphi(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0.$$

6. L'année prochaine, vous parlerez de développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 1 en 0.

**Exemple 6:** $\ln(1,005) \simeq 0,005$. La calculatrice affiche 0,00499. Pas si mal !

**Remarque:** En posant $X = 1 + x \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, on a aussi $\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\ln X}{X-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

[ Exercice 160 page 156 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Comme pour l'exponentielle, il est bon et nécessaire de comparer le comportement du logarithme à celui des fonctions polynômes :

**Théorème IX** (Croissance comparée)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0^-.$$

**Preuve:**

- Il suffit de poser $x = e^X \iff X = \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ pour la première :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0^+.$$

- Pour la deuxième, de la même manière, on pose $X = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ :

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0^-.$$

[ Démonstrations page 128 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Ces résultats nous permettent d'avoir en tête un « classement » des prépondérances en $+\infty$ :

$$\boxed{1 \prec \ln x \prec \sqrt{x} \prec x \prec x^m \prec x^n \prec e^x,} \qquad (m < n)$$

**Exemple 7:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$

[ Exercice résolu 3 page 132
Exercice résolu 7 page 136
Vrai ou faux ? page 138
QCM page 139
Exercices 87 à 102 page 143 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# IV Composée

**Théorème X**

Soit une fonction $u$ dérivable et **strictement positive** sur un intervalle ouvert $I$. La fonction $\ln u$ est dérivable sur $I$ et on a :

$$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}.$$

**Preuve:** Déjà fait maintes fois.

[ Démonstrations page 129 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Comme $u$ est nécessairement positive, le signe de $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$ est le même que celui de $u'$ (*ie*) les fonctions $\ln u$ et $u$ ont le même sens de variations sur $I$.[7]

**Exemple 8:** Si $f(x) = \ln(1+x^2)$, comme $1+x^2>0$, $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

[ Applications 3 page 121
Exercices 104 à 124 pages 144-145 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**3**

**Exercice** On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1/ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e$. On pourra poser $v_n = \ln u_n$.

2/ Faire un programme permettant de déterminer l'entier $n$ permettant de donner une valeur approchée de $e$ à $10^{-3}$.

3/ Que penser de la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**Correction:**

1/ Comme dit dans l'énoncé, posons $v_n = \ln u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. C'est une suite donnée sous sa forme explicite donc il suffit de calculer sa limite directement pour $n\to+\infty$.

Pour lever l'indétermination, on pose $N = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{N\to 0^+} \frac{\ln(1+N)}{N} = 1.$$

Comme la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n} = e^1 = e$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e$.

7. Attention ! Elles peuvent ne pas avoir le même domaine de définition.

**2/** On programme sur l'ordinateur une boucle « TANT QUE » sous la condition $|u_n - e| > 10^{-3}$. On affecte directement $u_1 = 2$ à la variable $U$ représentant $u_n$.

```
VARIABLES
I EST_DU_TYPE ENTIER
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 2
  I PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE |U − e| > 10^(−3) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    I PREND_LA_VALEUR I+1
    U PREND_LA_VALEUR (1 + 1/I)^I .
    FIN_TANT_QUE
  Afficher I, U
FIN_ALGORITHME
```

On trouve alors $n = 1359$ et $U \simeq 2,717$.

**3/** On ne peut pas dire que cette suite converge très vite vers $e$. On a bien mieux mais il va falloir attendre un peu[8] !!!

**4** **Exercice** Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

**1/** Étudier les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.

**2/** Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.

**3/** (a) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x - \ln(2)$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

(b) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $(\Delta)$.

**4/** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ et justifier que $\alpha \in \left[1\,;\frac{5}{4}\right[$.

**5/** Tracer $(\Delta)$ et $\mathscr{C}_f$. On fera apparaître toutes les informations importantes découlant de l'étude ainsi que $\alpha$.

**5** **Exercice** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier $n > 0$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

**1/** Calcul des premiers termes de la suite :

(a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}.$$

(b) Calculer les premiers termes $u_1$, $u_2$ et $u_3$ de cette suite.

8. En 1998, après 714 heures de calculs sur un super calculateur, Patrick Demichel a calculer les 50 millions premières décimales de $e$

**2/** Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

(a) i. Démontrer que pour tout réel $x$ strictement positif, $1-\dfrac{1}{x}\leqslant \ln x\leqslant x-1$.

ii. En déduire que pour tout entier naturel non nul $p$, $\dfrac{1}{p+1}\leqslant \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right)\leqslant \dfrac{1}{p}$.

(b) Soit $n$ un entier naturel non nul.

i. Écrire l'encadrement précédent pour les valeurs $n$, $n+1$, …, $2n-1$ de $p$.

ii. En effectuant les sommes membre à membre des inégalités obtenues, démontrer que :

$$u_n\leqslant \ln 2\leqslant u_n+\frac{1}{2n}.$$

(c) Prouver alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln 2$.

[ Exercices 129 et 130 pages 146-147 , **Maths Repère**, *Hachette*]

[ Exercice 165 page 158 , **Maths Repère**, *Hachette*]

# V Applications

## V.1 Puissance réelle d'un nombre strictement positif

Lorsque $n$ n'est plus entier, la notation $a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ fois}}$, introduite en 4e ne suffit plus.

En effet, que penser de $2^{\frac{5}{3}}$, $3^{\pi}$ ou $7^{\sqrt{2}}$ ?

**Définition 2**

Pour tout réel $a$ strictement positif et tout réel $x$, on pose :

$$a^x=e^{x\ln a}.$$

**Remarque:** $a>0$ s'impose par le fait que figure $\ln a$ dans l'expression.

**Exemples 9:** A la calculatrice, on obtient :

- $2^{\frac{5}{3}}=e^{\frac{5}{3}\ln 2}\simeq 3,2$
- $3^{\pi}=e^{\pi\ln 3}\simeq 31,5$
- $7^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\ln 7}\simeq 15,7$

### Propriétés

Lorsque $n$ est un entier,

$$\begin{aligned}a^n&=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ fois}}=\underbrace{e^{\ln a}\times e^{\ln a}\times\ldots\times e^{\ln a}}_{n\text{ fois}}\\&=e^{\overbrace{}^{}\underbrace{\ln a+\ln a+\ldots+\ln a}_{n\text{ fois}}}\\&=e^{n\ln a}.\end{aligned}$$

On retrouve alors la définition du collège. Cette notation est donc bien cohérente. Cela ne s'arrête pas là puisque l'on récupère aussi toutes les propriétés des puissances entières avec , notamment :

**Proposition 2**

Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs et quels que soient les réels $r$ et $s$, on a :

- $a^r \times a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{rs}$
- $\ln(a^r) = r\ln a$
- $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
- $a^r \times b^r = (ab)^r$

**Preuve:** Il suffit d'écrire et d'utiliser les propriétés de l'exponentielle et du logarithme que l'on connaît :

- $a^r \times a^s = e^{r\ln a} \times e^{s\ln a} = e^{(r+s)\ln a} = a^{r+s}$.
- $\ldots$
- $(a^r)^s = e^{s\ln\left(e^{r\ln a}\right)} = e^{sr\ln a} = a^{rs}$.
- $\ln(a^r) = \ln\left(e^{r\ln a}\right) = r\ln a$.

### Fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha$

**Théorème XI**

Soit $\alpha$ un réel fixé.
La fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$ et on a :

$$\forall x \in ]0\,;+\infty\,[,\ f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

**Remarque:** Nouvelle preuve de la cohérence de cette notation, on retrouve ici encore la dérivée d'une fonction polynôme lorsque $n$ est entier : $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

**Preuve:** La fonctions ln est définie et dérivable de $]0\,;+\infty\,[$ sur $\mathbb{R}$, la fonction exp l'est sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction $x \longmapsto e^{\alpha\ln x}$ est donc définie et dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$ et on a, d'après les formules de dérivation d'une fonction composée :

$$\forall x \in ]0\,;+\infty\,[,\ \left(e^{\alpha\ln x}\right)' = \frac{\alpha}{x} \times e^{\alpha\ln x} = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Le signe de la dérivée dépend donc de celui de $\alpha$. Afin de compléter le tableau de variations, cherchons les limites aux bornes du domaine de définition.

Tout dépend du signe de $\alpha$ :

**Proposition 3**

Soit $\alpha$ un réel fixé.

$\boldsymbol{\alpha > 0}$ : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

$\boldsymbol{\alpha < 0}$ : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.

**Preuve:** Simple application des théorèmes sur les produits et composées de limites.

Rien d'étonnant à ce que l'on retrouve les limites des fonctions $x \longmapsto x^n$ pour $n$ entier. Remarquons quand même que la présence du logarithme nous limite à définir les fonctions puissances pour $\alpha$ réel sur $]0\,;+\infty\,[$. On ne peut pas tout avoir !

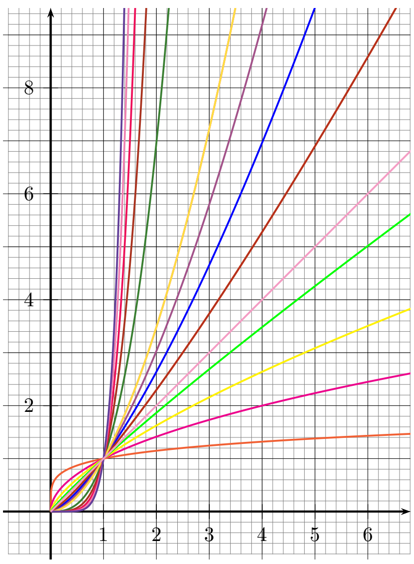
**Remarque:** Dans le cas, $\alpha > 0$, comme $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0 en posant naturellement $0^\alpha = 0$. On dit alors que l'on a prolongé la fonction puissance par continuité en 0. Cette nouvelle fonction puissance qui coïncide avec l'ancienne sur $]0\,;+\infty\,[$ est alors définie sur $[0\,;+\infty\,[$. On les confondra désormais.

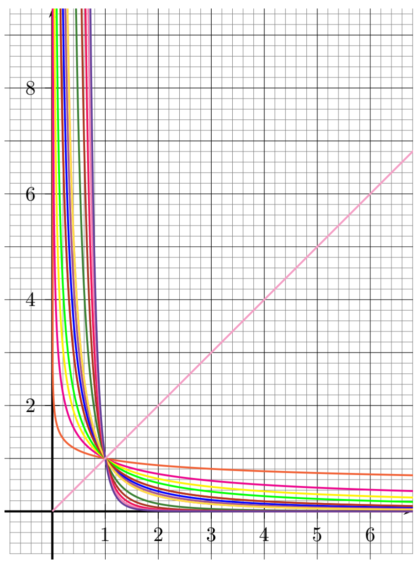
**Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$ :**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha\, x^{\alpha-1}$ | | | $+$ | | |
| $x^\alpha$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Cas $\boldsymbol{\alpha < 0}$ :**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha\, x^{\alpha-1}$ | $\|$ | | $-$ | | |
| $x^\alpha$ | $\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |



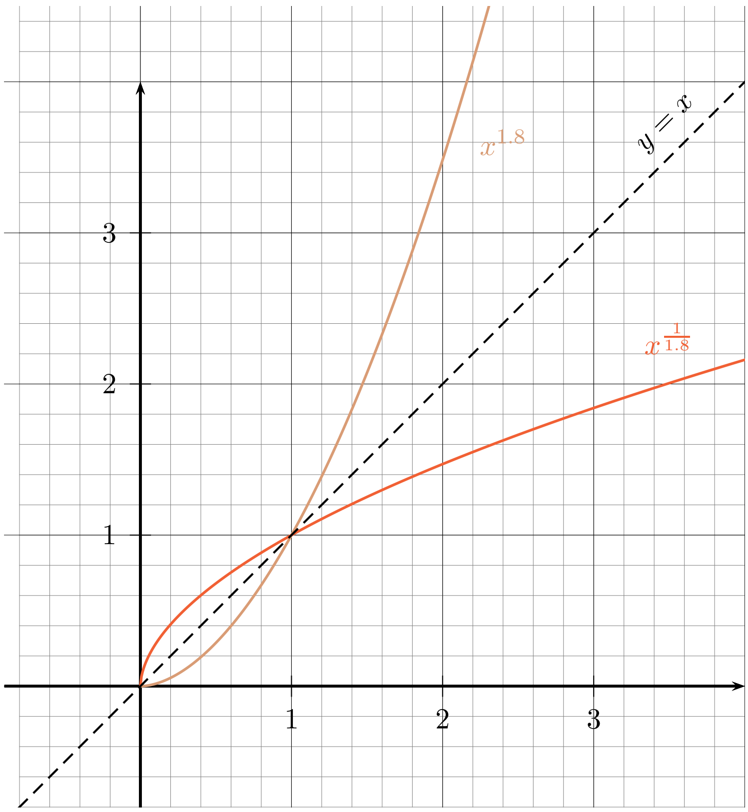




Pour tout $x > 0$, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ réalise une bijection de $]0\,;+\infty\,[$ sur $]0\,;+\infty\,[$. La fonction $f$ est donc une fonction réciproque, notée $f^{-1}$ définie sur $]0\,;+\infty\,[$. Cette fonction est la fonction racine n-ième : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$.

8. Rassurez-vous, il est bien évident que l'on a su prolonger de telles fonctions à un peu plus que $]0\,;+\infty\,[$ mais cela demande quelques notions supplémentaires notamment celle des nombres complexes pour commencer.

De plus, on remarquera que pour tout $x$ strictement positif et $n \geqslant 1$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Enfin, comme le les fonction ln et exp, les fonction $x^n$ et $\sqrt[n]{x}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.




[ Exercice 194 page 163 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

### V.2 Le logarithme décimal

**Définition 3**

On appelle **logarithme décimal**, la fonction, notée log, définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Le logarithme népérien est ainsi la « fonction logarithme de base $e$ », la fonction log, celle de de base 10 ».

- $\log 10 = 1$ et, d'une manière générale $\forall n \in \mathbb{N}$, $\log 10^n = \dfrac{\ln 10^n}{\ln 10} = n \times \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = n$.
- Mieux, la fonction logarithme décimal est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 10 qui, à tout nombre réel $x$, fait associer $e^{x \ln 10} = 10^x$.

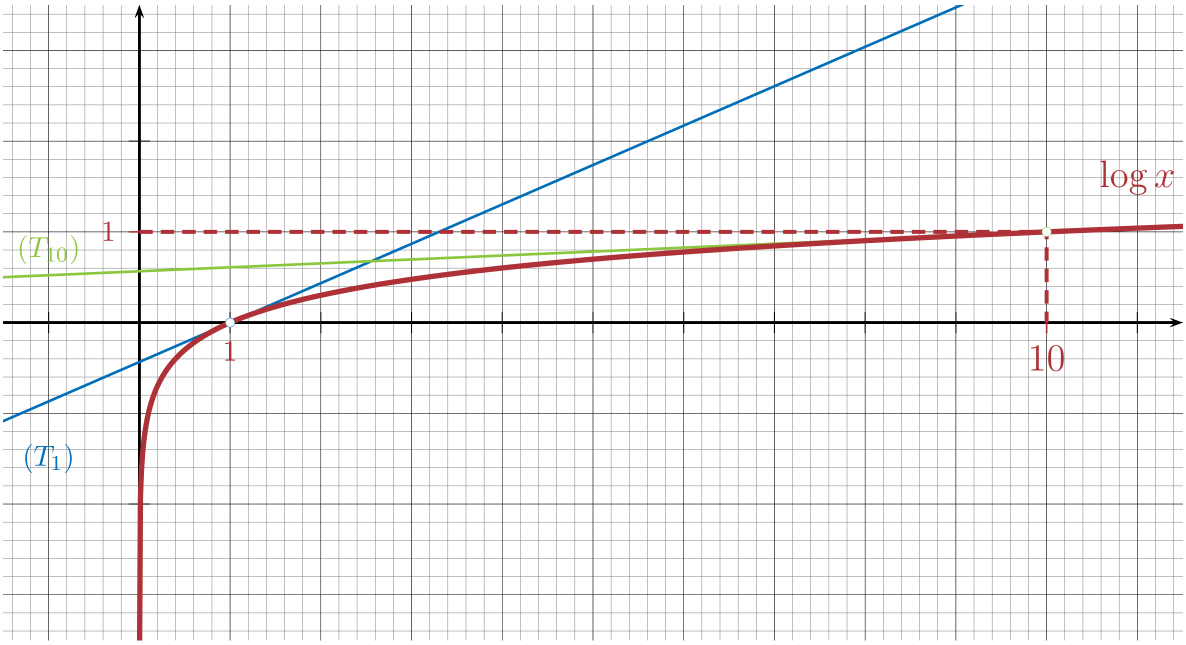
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log 10^x = x \quad \text{et} \quad \forall x \in ]0\,;+\infty\,[,\ 10^{\log x} = x.$$

C'est cette dernière propriété qui rend si chère aux physiciens la fonction logarithme décimal. La plupart des calculatrices possède une touche dédiée en plus de celle du logarithme népérien.

- Comme $\ln 10 > 0$, les fonctions $\log = \dfrac{1}{\ln 10} \times \ln$ et $\ln$ ont les mêmes variations et les mêmes limites.

  On a : $\forall x \in ]0\,;+\infty\,[,\ \log'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

| $x$ | $0$ | $1$ | $10$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\log'(x)$ | ‖ | $+$ | | |
| $\log$ | ‖ $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |




$$(T_1) : \ y = \frac{1}{\ln 10}(x-1) \qquad \text{et} \qquad (T_{10}) : \ y = \frac{1}{10 \ln 10}(x-10)+1.$$

- Comme le logarithme, la fonction log transforme les produits en sommes :

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

**Exemple 10 (Nombre de chiffres en écriture décimale):**

Un nombre $\geqslant 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10 (*ie*)

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \ / \ 10^p \leqslant N < 10^{p+1} \qquad (ie) \ N \text{ possède } p+1 \text{ chiffres.}$$

Or, comme la fonction log est une fonction croissante, on a aussi :

$$\begin{array}{rcl} \log 10^p & \leqslant \log N < & \log 10^{p+1} \\ p & \leqslant \log N < & p+1. \end{array}$$

On a donc : $E(\log N) = p$ où $E$ est la fonction partie entière.

Conclusion : le nombre de chiffres de $N$ est donc : $E(\log N) + 1$.

Par exemple, comme $\log\left(2014^{2015}\right) \simeq 6657,7$. Le nombre $2014^{2015}$ s'écrit avec 6 657 chiffres ![9]

[ Exercice résolu 8 page 137 , **Maths Repère**, *Hachette*]

6

## Exercice (Fonctions exponentielles)

### Définition 4

Soit $a$ un réel strictement positif, on appelle fonction exponentielle de base $a$, la fonction $\exp_a$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_a(x) = e^{x \ln a}.$$

**1/** (a) Montrer que $\exp_e = \exp$ et que $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$ pour $x$ et $y$ réels.

(b) Montrer que $\exp_a(n) = a^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire une autre notation possible pour $\exp_a(x)$.

(c) Montrer que la fonction $\exp_a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\exp_a'$.

(d) En déduire les variations de la fonction $\exp_a$ suivant les valeurs de $a$.

**2/** (a) Montrer que l'équation $x^n = y_0$ admet une unique solution positive $x_0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $y_0 > 0$.

(b) Montrer que si $y_0 > 0$ alors $x_0 = y_0^{\frac{1}{n}}$.

7

## Exercice (Fonctions logarithmes)

### Définition 5

Soit $a$ un réel strictement positif différent de 1, on appelle fonction logarithme de base $a$, la fonction $\log_a$ définie par :

$$\forall x \in ]0\,;+\infty\,[,\ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

**1/** Montrer que $\log_e = \ln$ et que $log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ pour $x$ et $y$ réels strictement positifs.

**2/** (a) Montrer que l'équation $a^x = y_0$ admet une unique solution $x_0$ pour $y_0$ strictement positif et $a$ strictement positif différent de 1.

(b) Montrer que $x_0 = \log_a y_0$.

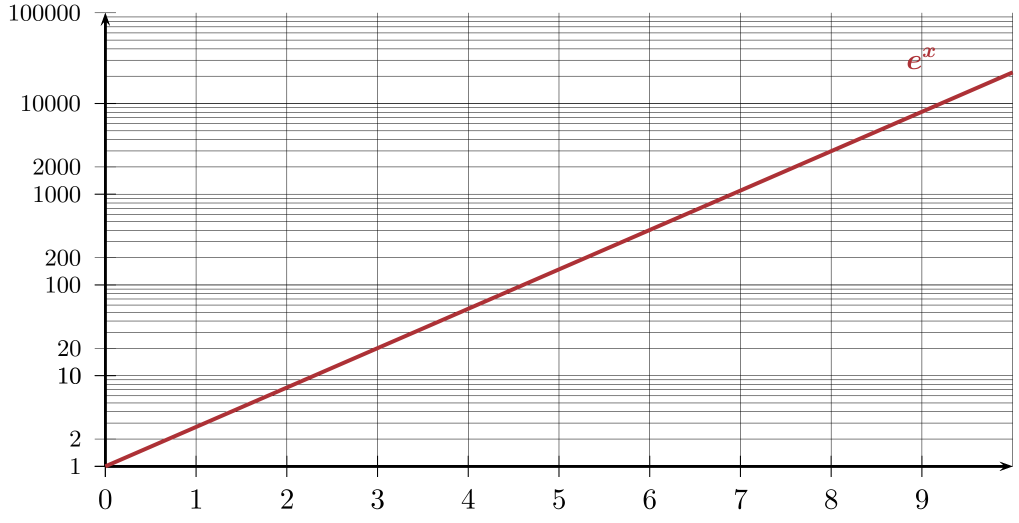
## V.3 Papier semi-logarithmique et logarithmique

- Le papier semi-logarithmique utilise une échelle linéaire sur l'axe des abscisses et une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées. Sur l'axe des ordonnées 10 correspond à 1 unité, 100 à 2 unités, 1 000 à 3 unités,...

  Dans un repère semi-logarithmique, la courbe représentative d'une fonction $f$ à valeurs strictement positives est alors :

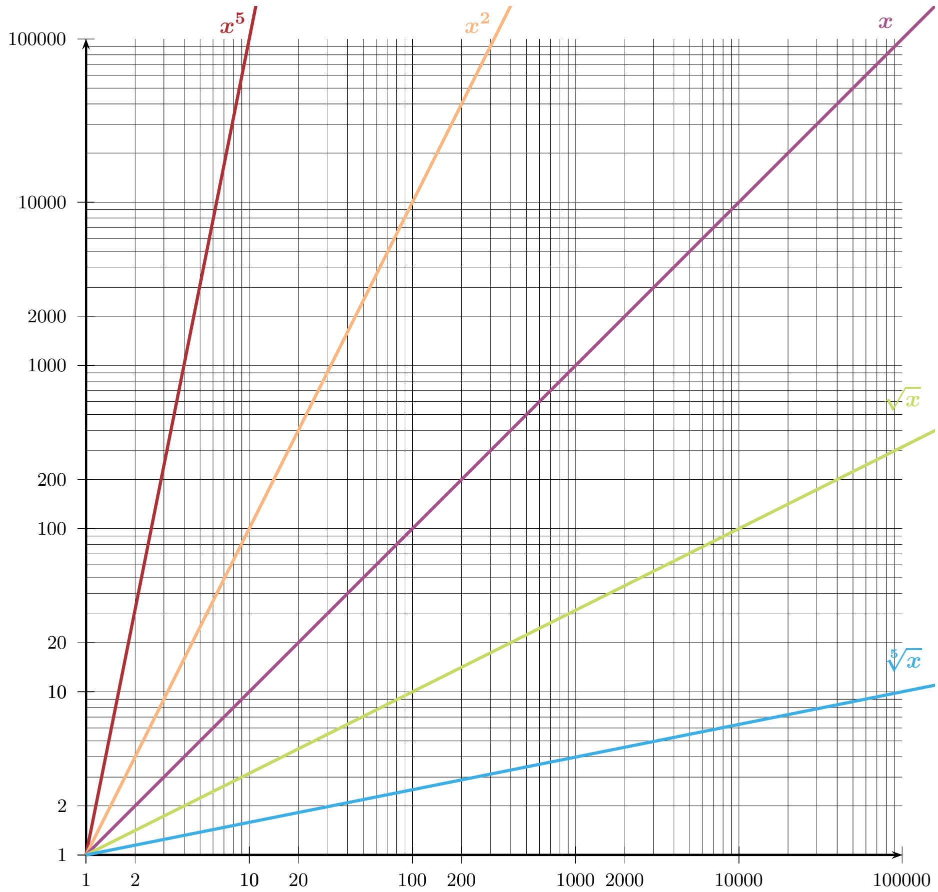
$$\begin{aligned}\mathscr{C}_f &= \{(x, \log y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = f(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \log f(x)\}\end{aligned}$$

  Sur le papier semi-logarithmique ci-dessous, on a tracé la fonction exponentielle dont la représentation graphique est alors une droite d'équation $y = \log\left(e^x\right) = \dfrac{1}{\ln 10}x$.




- Le papier logarithmique utilise une échelle logarithmique sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

  Comme $\log(x^n) = n \log x$, sur ce papier, les représentations graphiques des fonctions puissances sont des droites d'équation $Y = nX$.




Parfois, on utilise des unités logarithmiques, c'est-à-dire dont la valeur est le logarithme du rapport entre deux valeurs ($v_{min}$ et $v_{max}$) d'une grandeur. La base logarithmique choisie dépend des habitudes de la discipline qui les utilisent :

- le logarithme népérien, dont la base est $e$, facilite certains calculs, mais ne permet pas d'accéder intuitivement à l'ordre de grandeur décimal (*cf exemple* 10).
- le logarithme décimal (base 10) donne directement une notion de l'ordre de grandeur puisque la caractéristique, c'est-à-dire le signe et la partie avant la virgule, le donne directement.

  Par exemple, une échelle, qui va dans la réalité de $10^{-10}$ à $10^{10}$, sera représentée sur un axe allant de $-10$ à 10. Très utile en astronomie, statistiques, intensité sonore, magnitude d'un séisme, calcul du pH,...

**Exemples 11:**

**En chimie :** On définit l'acidité d'une solution par son potentiel hydrogène ($pH$) qui dépend de la concentration des ions $H_3O^+$. Ces concentration étant faible, on définit :

$$pH = -\log[H_3O^+].$$

Conséquence, lorsque la concentration en $[H_3O^+]$ est multipliée par 10, le pH diminue de 1 :

$$-\log\left(10 \times [H_3O^+]\right) = -\left(\log 10 + \log[H_3O^+]\right) = -1 + pH.$$

De plus $pH = -\log[H_3O^+] \iff [H_3O^+] = 10^{-pH}$. Donc, une certaine boisson gazeuse de $pH = 2,6$ contient $10^{-2.6} \simeq 2,5.10^{-3} mol.l^{-1}$ d'ions $[H_3O^+]$ à peine 3 fois moins qu'une batterie de voiture et environ 25000 fois plus qu'un litre d'eau [10].

En gros, est à retenir pour faire plaisir à *môman*, La baisse d'une unité de pH implique que l'acidité est multipliée par un facteur 10. Ainsi, une eau de $pH$ 6 est dix fois plus acide qu'une eau de $pH$ 7 ; une eau de $pH$ 5 est 100 fois plus acide qu'une eau de $pH$ 7...

[ Exercice 141 page 150 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**En acoustique :** Le niveau sonore $L$ (en décibels) d'un son d'intensité $I$ est donnée par la formule :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

où $I_0 = 10^{-12} W.m^{-2}$ correspond au seuil d'audibilité en dessous duquel aucun son n'est perçu.

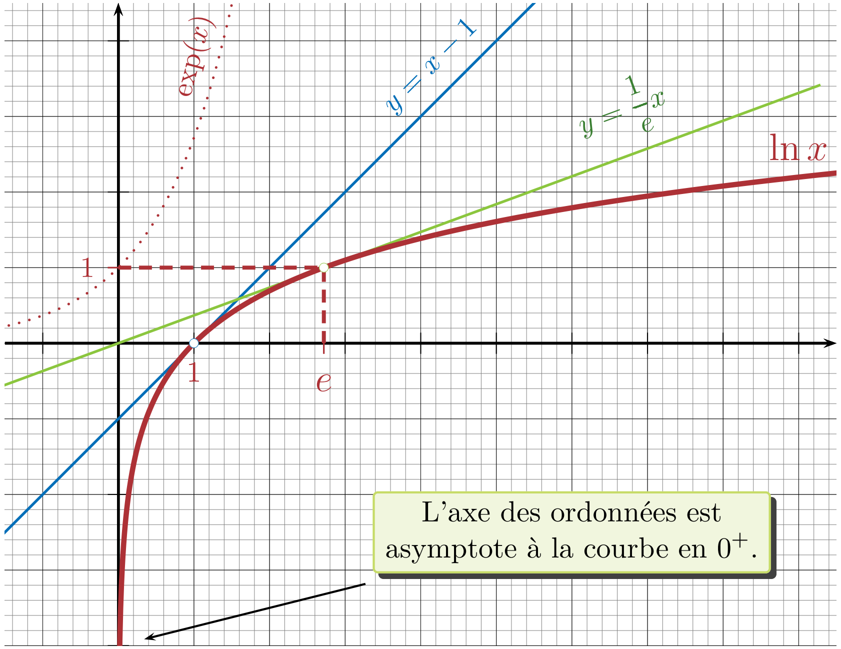
Par exemple le niveau sonore $L_2$ d'une conversation normale entre deux personnes correspondant à $I = 10^5 I_0$ est de :

$$L_2 = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ décibels.}$$

Si 2 personnes de plus se joignent à la conversation, le niveau sonore n'est pas multiplié par 2 ! ! !
En effet, $L_4 = 10 \log(2 \times 10^5) = 10 \times 5 + 10 \log 2 \simeq 53$ décibels.

[ Exercice 142 page 151 , **Maths Repère**, *Hachette*]

10. Très intéressant, je vous l'accorde.




| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ | \|\| | | | $+$ | | | |
| $\ln$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\ln ab = \ln a + \ln b \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a \qquad \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

La fonction logarithme est un morphisme de groupes entre $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ : elle « transforme » les produits en sommes.

**Théorème XII**

$x \longmapsto \ln x$ est l'unique fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ telle que :

$$\forall x \in ]0\,;+\infty[,\ e^{\ln x} = x.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$$

$$\Big(\ln u\Big)' = \frac{u'}{u}$$
(avec $u > 0$ !)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \boxed{\Big(\ln x\Big)' = \frac{1}{x}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln e^x = x.$$

- $\ln a = 1 \iff a = e.$
- $\ln a > 0 \iff a > 1.$
- $\ln a = \ln b \iff a = b.$
- $\ln a < \ln b \iff a < b.$

$\forall x \in ]0\,;+\infty[,$ $\boxed{\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}}$ $\qquad \log'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$

$$\boxed{\log 10^x = 10^{\log x} = x}$$

$$\forall a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x \ln a}.$$

# Logarithme - Probabilité

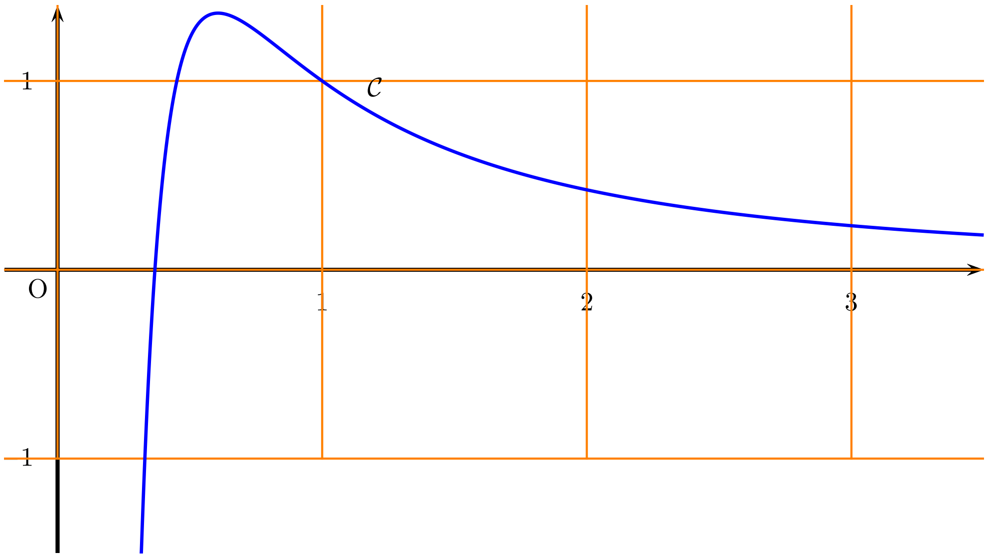
1

## Exercice (Amérique du Nord 2013)

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :




**1/** (a) Étudier la limite de $f$ en 0.

(b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ ? En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

(c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

**2/** (a) On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

(b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

(c) Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.

**3/** (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

(b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2

## Exercice (Liban 2013)

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18.

On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication $F_1$ et $F_2$.

La chaîne de production $F_2$ semble plus fiable que la chaîne de production $F_1$. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne $F_1$ et 30 % de la chaîne $F_2$.

La chaîne $F_1$ produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne $F_2$ en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

$E$ : « Le petit pot provient de la chaîne $F_2$ »

$C$ : « Le petit pot est conforme. »

**1/** Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

**2/** Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production $F_1$. »

**3/** Déterminer la probabilité de l'événement $C$.

**4/** Déterminer, à $10^{-3}$ près, la probabilité de l'événement $E$ sachant que l'événement $C$ est réalisé.

Chapitre
10

# Produit scalaire dans l'espace et Applications

Le produit scalaire de deux vecteurs est une opération qui à deux vecteurs associe un réel, un scalaire. On utilise le terme produit car il possède certains propriétés analogues au produit des réels. Le produit scalaire est aussi utilisé en mécanique, le travail d'une force est le produit scalaire de cette force et du vecteur déplacement.

Il y a essentiellement quatre manières de définir le produit scalaire de deux vecteurs.

- A l'aide des coordonnées dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.
- A l'aide des normes et de l'angle des deux vecteurs.
- A l'aide des normes uniquement.
- A l'aide de la projection orthogonale de l'un des vecteurs sur la direction de l'autre.

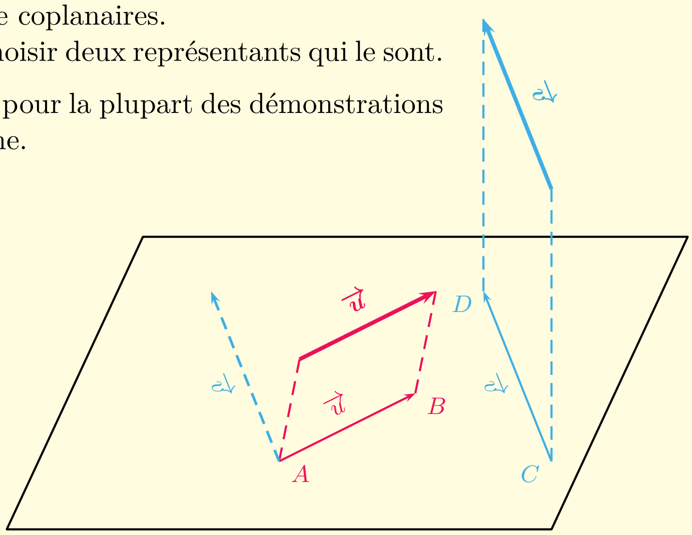
## Sommaire

Dans ce chapitre et sauf mention contraire, l'espace sera muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$.

**Rappels 1**

Dans l'espace, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pourront toujours être considérés comme coplanaires.
Il suffit pour cela de choisir deux représentants qui le sont.

On se ramènera ainsi, pour la plupart des démonstrations à de la géométrie plane.




Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants, respectivement, des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, choisis de telle sorte que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ soient coplanaires.

**Remarque:** Si nécessaire comme pour la **définition** (3), on pourra même choisir pour $\overrightarrow{CD}$ un représentant d'origine $A$.

L'expression « $\vec{u} \in (\mathscr{P})$ » où $(\mathscr{P})$ est un plan signifiera donc, par abus de langage, qu'il existe un représentant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ avec $A$ et $B$ deux points de $(\mathscr{P})$.

# I Produit scalaire

## I.1 À l'aide des coordonnées

**Définition 1**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre réel** défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'. \tag{P.S 1}$$

[ Exercices 56 à 60 page 312 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

1

**Exercice** On considère un cube ABCDEFGH et I le centre de la face ADHE et on munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AD}\,;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

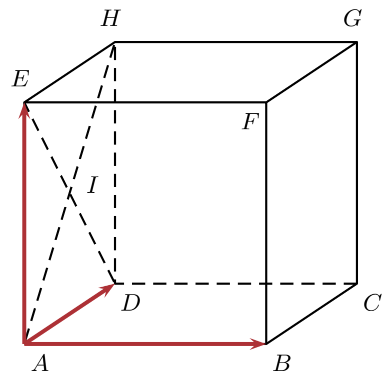
**1/** Dans ce repère, donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{IB}$.

**2/** Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$.
Une conjecture ?

**3/** Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.
Une conjecture ?

**4/** Calculer et comparer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}$ puis $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$. Une conjecture ?

**5/** Calculer et comparer $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IB}$.
Une conjecture ?




[ Applications pages 295 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Cette première définition a déjà de grandes conséquences, notamment sur les propriétés de l'application

$$\bullet : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) & & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}. \end{array}$$

**Proposition 1** (Propriétés algébriques)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs de l'espace et $\lambda$ un réel.

- Commutativité : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- Associativité : $(\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$.
- Distributivité sur l'addition : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$.

Ce qu'il faut donc retenir de cette propriété c'est que si le produit scalaire porte le nom de « produit » c'est justement parce, à bien des égards, il se comporte comme un produit.

**Preuve:** Tout découle des propriétés de la multiplication et de l'addition de deux réels.

- Rien à faire à part regarder.
- Les coordonnées de $\lambda\overrightarrow{u}$ sont $(\lambda x\ ;\ \lambda y\ ;\ \lambda z)$. D'où :

$$(\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda xx' + \lambda yy' + \lambda zz' = \lambda(xx' + yy' + zz') = \lambda \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}).$$

- Soient $\overrightarrow{w}\,(x"\ ;\ y"\ ;\ z")$, on écrit, développe, arrange un peu et observe :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}) &= x(x' + x") + y(y' + y") + z(z' + z") \\ &= \underbrace{xx' + yy' + zz'}_{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}} + \underbrace{xx" + yy" + zz"}_{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}}. \end{aligned}$$

**Remarque:** D'une manière générale, remarquez que les formules de 5e n'ont pas changées :

$$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}).(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d})=\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}.\overrightarrow{d}+\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}.\overrightarrow{d}.$$

On peut prolonger les ressemblances :

**Corollaire 1** (Identités remarquables)

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$. On note alors $\overrightarrow{u}^2=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$.
- $\begin{cases}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2=\overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2.\end{cases}$ (On rappelle que $\overrightarrow{u}^2=\|\overrightarrow{u}\|^2$).

**Preuve:** Il suffit d'appliquer la **proposition** (1) :

Par exemple, $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}$

$$=\overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2.$$

### I.2 À l'aide de la Norme

**Définition 2**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **nombre réel** défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\Big(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\Big). \qquad \text{(P.S 2)}$$

**Preuve:** Vérifions que les deux définitions (P.S 1) et (P.S 2) coïncident :

Soient $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\\z-z'\end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$. On a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2&=x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-(x-x')^2-(y-y')^2-(z-z')^2\\&=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}+\cancel{x'^2}+\cancel{y'^2}+\cancel{z'^2}-\cancel{x^2}+2xx'-\cancel{x'^2}\\&\quad-\cancel{y^2}+2yy'-\cancel{y'^2}-\cancel{z^2}+2zz'-\cancel{z'^2}\\&=2\big(xx'+yy'+zz'\big)=2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}.\end{aligned}$$

[ Exercice 54 page 312 , **Maths Repère**, *Hachette*]

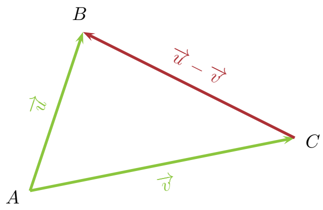
**Remarque:** Lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on a déjà vu que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$. Il n'est cependant pas nécessaire que l'un des vecteurs soit nul pour que leur produit scalaire le soit comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 1:** Soit $ABC$ un triangle quelconque.

On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Alors $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).\end{aligned}$$




Si le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ (*ie*) $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ alors, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2+AC^2 = BC^2$ (*ie*) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ : le produit scalaire de deux vecteurs peut donc être nul sans qu'aucun de deux facteurs ne le soit.

Voyons cela !

## I.3 À l'aide de l'Angle et de la Norme

**Définition 3**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **nombre réel** défini par :

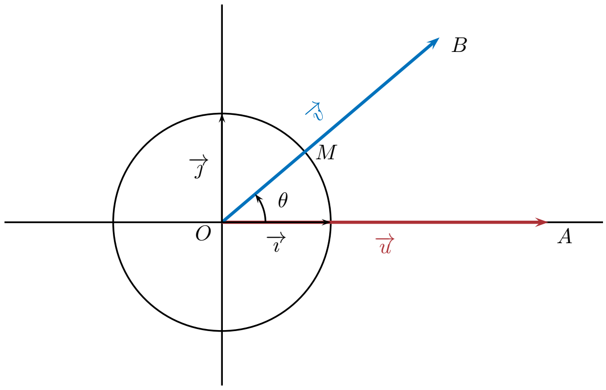
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right). \qquad \text{(P.S 3)}$$

où $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$ désigne l'angle orienté des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

**Preuve:** De même que précédemment, il est nécessaire de vérifier que cette nouvelle définition coïncide avec les deux précédentes (P.S 1) et (P.S 2).

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et considérons deux représentants $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ d'un même plan $(\mathscr{P})$ où $O$ est l'origine d'un repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k})$ orthonormé choisi de telle manière que $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ appartiennent à $(\mathscr{P})$ et que $\overrightarrow{\imath}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et de même sens.

Notons $M$, l'intersection de la demi-droite $[OB)$ et du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre $O$.




Calculons alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ :

Dans ce repère, $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} OA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix} \cos\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) \\ \sin\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) \\ OB \times \sin\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\ \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\ 0 \end{pmatrix}$, puis :

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\ \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + 0 \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + 0 \times 0 \\
&= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}).
\end{aligned}$$

La **définition** (P.S 3) fait apparaître un lien extrêmement intéressant entre produit scalaire et orthogonalité tout en renforçant le lien avec le produit réel :

**Définition 4** (Vecteurs orthogonaux)

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque leur direction le sont.
On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

**Théorème 1**

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \text{ si, et seulement si } \begin{cases} & \vec{u} = \vec{0} \\ ou & \\ & \vec{v} = \vec{0} \\ ou & \\ & \vec{u} \perp \vec{v} \end{cases}$$

**Preuve:** Un produit est nul si, et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$\vec{u}.\vec{v}=0 \iff \begin{cases} \|\vec{u}\|=0 \iff \vec{u}=\vec{0} \\ ou \\ \|\vec{v}\|=0 \iff \vec{v}=\vec{0} \\ ou \\ \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})=0 \iff (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \vec{u}\perp\vec{v} \end{cases}$$

**Remarque:** À la question (5) de l'**exemple** (1), on aurait donc conclue que $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{IB}$ (*ie*) les droites $(AG)$ et $(IB)$ sont orthogonales.[1]

Applications pages 295
Exercices 62 et 63 page 312 , **Maths Repère**, *Hachette*

2

**Exercice (À savoir faire absolument!...)**

**1/** Déterminer le réel $\alpha$ pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\3\\\alpha\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

**2/** Soient $A(2\ ;\ -5\ ;\ 1)$ et $B(0\ ;\ 2\ ;\ 6)$.
Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ qui passe par le point $C(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=-4\vec{\imath}+\vec{\jmath}-3\vec{k}$ est orthogonale à la droite $(AB)$.

**3/** Soient $A(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $B(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$, $D(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $E(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$.

(a) Prouvez que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

(b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC) (*ie*) orthogonal à tout vecteur de $(ABC)$[2].

**Correction:**

**1/** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul. On cherche donc $\alpha$ comme solution de l'équation :

$$\vec{u}.\vec{v}=0 \iff 2\times\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{2}\times 3+5\alpha=0$$
$$\iff \frac{23}{10}+5\alpha=0 \iff \alpha=\frac{23}{50}.$$

**2/** Ici la donnée du point $C$ ne sert à rien. Il suffit simplement de montrer que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$[3] :

Or, $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\7\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}=8+7-15=0.$

Donc $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ (*ie*) $(\mathscr{D})$ est orthogonale à la droite $(AB)$.

**Remarque:** Si demandé, on pourrait se servir des coordonnées de $C$ pour chercher si les droites $(\mathscr{D})$ et $(AB)$ sont perpendiculaires ou non.

1. Un élève sérieux et volontaire cherchera si elles sont également perpendiculaires.
2. Les vecteurs n'ont toujours pas de point d'application. L'expression « vecteur de $(ABC)$ » est un raccourcis ou abus de langage signifiant « tout vecteur dont il existe un représentant $\overrightarrow{MN}$ avec $M$ et $N$ des points de $(ABC)$.

**3/** (a) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, par exemple, ne sont pas colinéaires ce qui est manifestement le cas du fait des 2$^{e}$ coordonnées ($-2$ n'est pas un multiple de 0).

(b) Comme tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $(ABC)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ que l'on peut prendre comme vecteurs directeurs de $(ABC)$ d'après la question précédente, il suffit de montrer que $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à ces derniers :

Or, $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\7\\5\end{pmatrix} = -4-14+10 = 0$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 2-4+2 = 0.$

D'où $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DE}.(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{CA}) = x\underbrace{\left(\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}\right)}_{=0}+y\underbrace{\left(\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CA}\right)}_{=0} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est donc orthogonal à tout vecteur de $(ABC)$. Il lui est normal.

La **définition** (P.S 3) amène aussi d'autres propriétés intéressantes :

**Proposition 2**

- Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \neq 0$ alors $\cos(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de même sens.} \\ -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$$

**Preuve:** Tout découle de (P.S 3) :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}).$$

- Easy ...
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) \equiv 0\ [2\pi] &\iff \cos(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = 1 && \text{(même sens),} \\ (\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) \equiv \pi\ [2\pi] &\iff \cos(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = -1 && \text{(sens contraire).} \end{aligned}$$

**3** **Exercice** Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$ (l'unité est $OI = OJ = OK$ dans le repère orthonormé direct.)

**1/** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

**2/** Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$ arrondie au degré près.

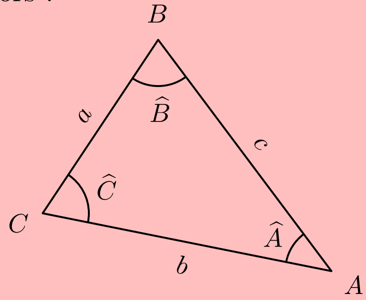
Ce lien entre mesure d'angle géométrie et longueur et un des fondements de la trigonométrie :

3. Deux droites sont orthogonales si, et seulement si leurs vecteurs directeurs le sont !

**Théorème 11** (Théorème d'Al-Kashi)

Soit $ABC$ un triangle dont les longueurs des côtés opposés aux angles géométriques $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont respectivement notés $a$, $b$ et $c$. On a alors :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{A}.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}.$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{C}.$$




**Remarque:** Lorsque le triangle $ABC$ est rectangle, on remarquera que l'on retrouve le théorème de Pythagore dont le théorème d'Al-Kashi en est le prolongement.

**Preuve:** Il suffit de combiner les définitions (P.S 2) et (P.S 3) :

D'après (P.S 2), on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right).\end{aligned}$$

Et d'après (P.S 3), on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)\\ &= bc\cos\widehat{A}.\end{aligned}$$

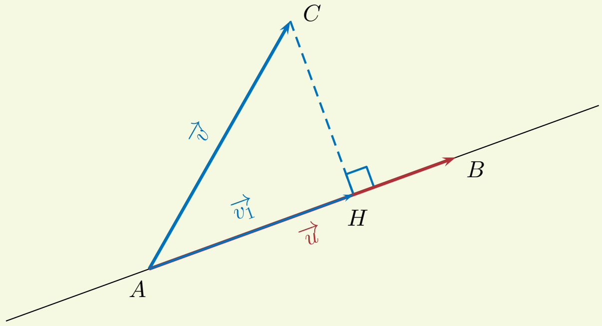
En combinant les deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}bc\cos\widehat{A} &= \frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)\\ 2bc\cos\widehat{A} &= c^2+b^2-a^2\\ a^2 &= c^2+b^2-2bc\cos\widehat{A}.\end{aligned}$$

## I.4 À l'aide de la projection orthogonale

**Définition 5**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et $A$, $B$ et $C$ trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Soient $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur la direction $(AB)$ et $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AH}$. Alors :




$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1}. \qquad \text{(P.S 4)}$$

[ Exercices 55 page 312 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Preuve:** Une simple relation de Chasles permet de faire apparaître la composante de $\overrightarrow{v}$ orthogonale à $\overrightarrow{u}$. Le **théorème** (I) fondamental de l'annuler :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \underbrace{\cancel{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}}}_{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{HC}}\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1}.\end{aligned}$$

La morale de la **définition** (P.S 4) est que le produit scalaire supprime les composantes orthogonale pour ne garder que celles qui sont colinéaires.

Un bon exemple de mise en pratique est l'exercice ci-dessous qui reprend exactement les idées que la démonstration :

4 **Exercice (Hauteurs d'un triangle)** Soit ABC est un triangle quelconque.

Soit H le pied de la hauteur issue de A et K le pied de la hauteur issue de B. Les hauteurs $(AH)$ et $(BK)$ se coupent en O.

**1/** Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ en fonction de $AC$.

**2/** Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}$. (Penser à décomposer astucieusement les vecteurs ![4])

**3/** En déduire que $(CO)$ est la 3e hauteur du triangle ABC.

**4/** Conclure.

# II Équations cartésiennes d'un plan

## II.1 Vecteur Normal

**Définition 6** (Vecteur normal)

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est un **vecteur normal** (ou orthogonal) à un plan $(\mathscr{P})$ signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans $(\mathscr{P})$ (*ie*) pour tout vecteur $\vec{u}$ admettant un représentant dans $(\mathscr{P})$ :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

On note alors $\vec{n} \perp (\mathscr{P})$.

Tout de suite une caractérisation plus aisée que de prendre tous les vecteurs d'un plan :

**Théorème III**

Un vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à un plan $(\mathscr{P})$ si, et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $(\mathscr{P})$.

**Preuve:** Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $(\mathscr{P})$. Ils forment donc une base des vecteurs de $(\mathscr{P})$ (*ie*) pour tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathscr{P})$, il existe un unique couple $(\alpha\ ;\ \beta)$ de réels tel que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}.$$

Si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors, par distributivité du produit scalaire, il l'est avec $\vec{w}$ :

$$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}\right) = \alpha\left(\vec{n}.\vec{u}\right) + \beta\left(\vec{n}.\vec{v}\right) = 0.$$

Par définition, $\vec{n}$ est donc orthogonal à $(\mathscr{P})$.

La réciproque est exactement la définition d'un vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$.

**Remarque:** Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$, tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est aussi normal à $(\mathscr{P})$. Il suffit d'appliquer l'associativité du produit scalaire pour le comprendre :

**Preuve:** Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ et $\vec{m} = \lambda\vec{n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, un vecteur colinéaire à $\vec{n}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $(\mathscr{P})$, on a : $\vec{m}.\vec{u} = \left(\lambda\vec{n}\right).\vec{u} = \lambda\left(\vec{n}.\vec{u}\right) = 0$.

$\vec{m}$ est donc aussi normal à $(\mathscr{P})$.

4. Par exemple, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right).\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right)$

**Méthode 1** (Trouver un vecteur normal à un plan)

Un plan est défini par deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Pour trouver un vecteur $\vec{n}$ normal à ce plan, il suffira alors de trouver un vecteur non nul et simultanément orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (*ie*) de résoudre le système

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ \vec{n}.\vec{v} = 0 \end{cases}, \quad \text{d'inconnues les coordonnées de } \vec{n}.$$

**Remarque:** Les vecteurs normaux n'étant pas uniques, les solutions ne le seront pas non plus.

**Exemple 2:** Soit un plan $(\mathscr{P})$ défini par la représentation paramétrique suivante :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = 2 + 3t + s \\ y = -1 - t + 5s \\ z = 4 + t - s \end{cases}, \ (t \ ; \ s) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons un vecteur $\vec{n}$ normal à $(\mathscr{P})$ :

- $(\mathscr{P})$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\vec{n}$ doivent donc vérifier le système :

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ \vec{n}.\vec{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -4x \end{cases}$$

Faisant jouer à $x$, par exemple, le rôle du paramètre $t$. Le vecteur $\vec{n}\,(x \ ; \ y \ ; \ z)$ sera un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ si, et seulement si ses coordonnées peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -4t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}. \text{[5]}$$

Réciproquement, il est clair que de tels vecteurs sont normaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc à $(\mathscr{P})$ d'après le **théorème** (III).

On pourra vérifier, par exemple, que les vecteurs $\vec{n_1}\,(1 \ ; \ -1 \ ; \ -4)$, $\vec{n_2}\left(\sqrt{2} \ ; \ -\sqrt{2} \ ; \ -4\sqrt{2}\right)$ et $\vec{n_3}\,(-1 \ ; \ 1 \ ; \ 4)$ sont colinéaires et orthogonaux à $(\mathscr{P})$.

Maintenant qu'il est clair que tout plan possède au moins un vecteur normal, on peut s'attacher à comprendre le lien entre ces derniers. C'est l'objet du corollaire suivant :

5. Une droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

**Corollaire 1** (Caractérisation d'un plan par son vecteur normal)

Le plan $(\mathscr{P})$, passant par $A$ et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que :

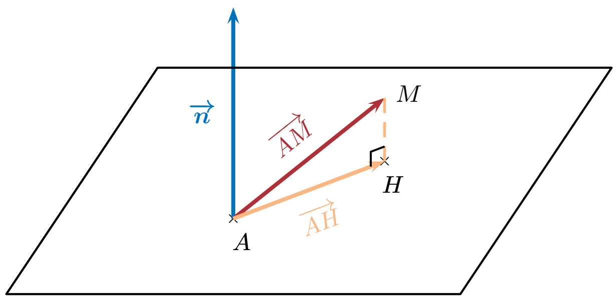
$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0.$$

Difficile de faire plus simple et étrangement ressemblant à la définition d'une droite dans le plan.

**Preuve:**

- Tout d'abord si $M \in (\mathscr{P})$ alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient aussi à $(\mathscr{P})$. Comme $\vec{n}$ est normal à $(\mathscr{P})$, il l'est à tout vecteur de celui-ci, en particulier à $\overrightarrow{AM}$ et on a $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
- Réciproquement, supposons que le point $M$ de l'espace soit tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ et montrons que $M \in (\mathscr{P})$.

  Posons $H$, le projeté orthogonal de $M$ sur $(\mathscr{P})$. Par essence les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.




  Ils forment donc une base de vecteurs directeurs du plan $(AMH)$ dans laquelle on peut décomposer $\overrightarrow{AM}$.

  Il existe donc un couple de réels $(\alpha\ ;\ \beta)$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AH} + \beta\vec{n}.$$

  On a alors : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \iff \left(\alpha\overrightarrow{AH} + \beta\vec{n}\right).\vec{n} = 0$

$$\iff \alpha\left(\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right) + \beta\,\|\vec{n}\|^2 = 0.$$

  Or, $\overrightarrow{AH} \in (\mathscr{P})$ et $\vec{n}$ est normal à $(\mathscr{P})$ donc $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = 0$ $(ie)$ $\beta\,\|\vec{n}\|^2 = 0$.

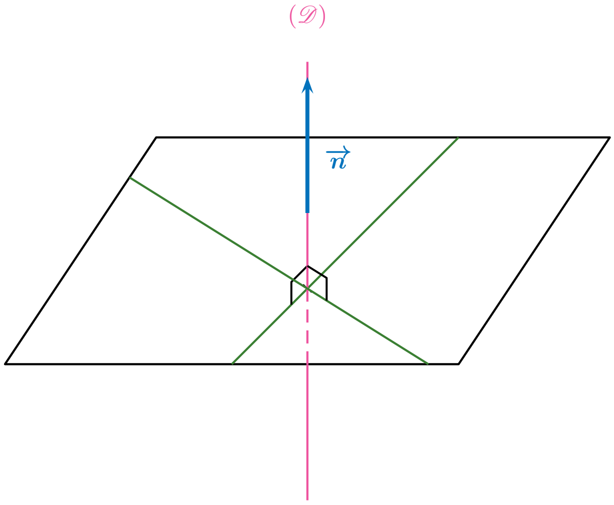
  Comme $\vec{n}$ est non nul, on obtient $y = 0$ $(ie)$ $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AH} \in (\mathscr{P})$.

  On a donc bien $M \in (\mathscr{P})$.

**Corollaire 2**

Une droite $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à un plan $(\mathscr{P})$ si, et seulement si l'un de ses vecteurs directeurs est normal au plan $(\mathscr{P})$.

ou de manière équivalente :




**Corollaire 3**

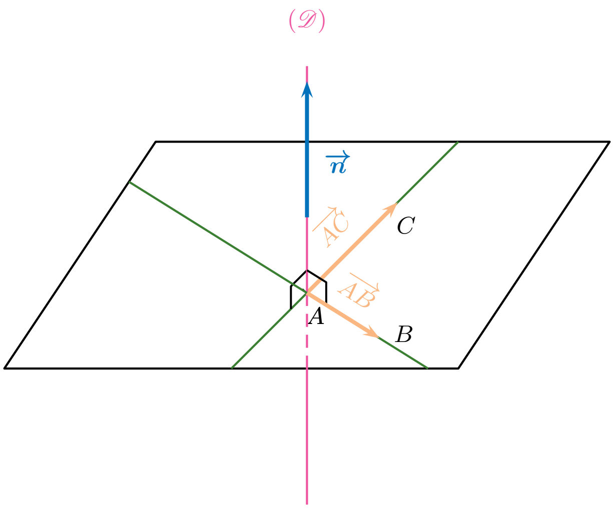
Une droite $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à un plan $(\mathscr{P})$ si, et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

**Preuve:** Posons $\overrightarrow{n}$, un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ et $A$ le point d'intersection entre $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$. Montrons la véracité et l'équivalence des deux corollaires en un seul trait :

$(\mathscr{D})$ est orthogonale à $(\mathscr{P})$ $\iff$ $\overrightarrow{n} \perp (\mathscr{P})$

$\iff$ $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ non colinéaires de $(\mathscr{P})$

$\iff$ $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à deux droites de $(\mathscr{P})$ passant par $A$ et dirigées, respectivement, par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.




[Démonstration page 299 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## II.2 Plans perpendiculaires

**Définition 7**

Deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont dit **perpendiculaires** (ou orthogonaux) si, et seulement si une droite de l'un est orthogonale à l'autre plan.

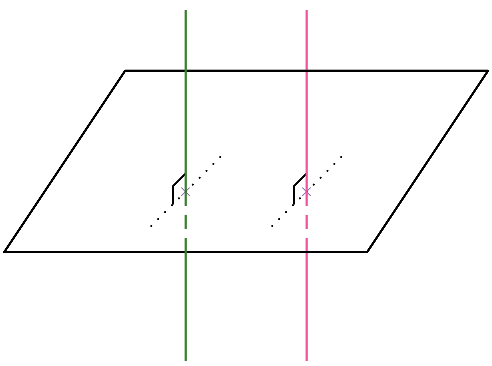
**ATTENTION** La notion d'orthogonalité de deux plans est moins souple qu'avec deux droites. Par exemple :

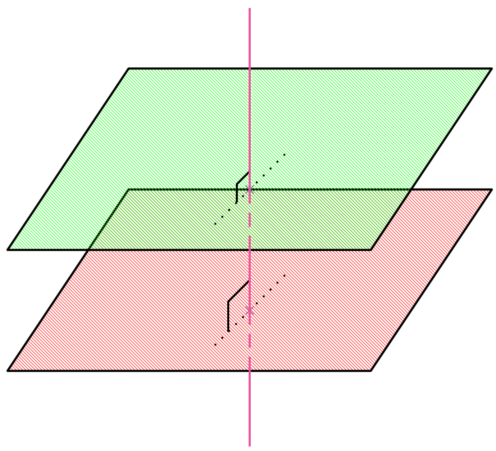
- Si $(\mathscr{P}_1) \perp (\mathscr{P}_2)$, une droite $(\mathscr{D})$ de $(\mathscr{P}_1)$ peut être parallèle à une droite de $(\mathscr{D}')$ de $(\mathscr{P}_2)$.
- Si un plan $(\mathscr{Q})$ est perpendiculaire à deux plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$, les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.[6]

Cependant, les deux prolongement des postulats d'Euclide restent valables :

**Rappels 2**

- Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, ils sont parallèles.





6. Dans un repère orthogonal, on a $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}) \perp (O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{k})$ et $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}) \perp (O; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k})$ mais aussi $(O; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}) \perp (O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{k})$.

6. Pour bien comprendre pourquoi, il faudrait avoir des notions de dualité et d'hyperplan, ce qui n'est pas encore au programme. Patience !

**Proposition 3**

Deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont perpendiculaires ou orthogonaux si, et seulement si

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0.$$

**Preuve:**

- Supposons d'abord que $(\mathscr{P})$ est perpendiculaire à $(\mathscr{P}')$. Alors il existe une droite $(\mathscr{D})$ de $(\mathscr{P})$ orthogonale à $(\mathscr{P}')$.

  $(\mathscr{D})$ est alors orthogonale à toute droite de $(\mathscr{P}')$ donc $\overrightarrow{n'}$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$, $\overrightarrow{n'}$ est donc un vecteur de $(\mathscr{P}')$.

  Comme $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$, on a bien $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$.

- Supposons maintenant que $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$.

  Alors $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires (*ie*) les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants.
  Soit A un point de $(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{D})$ la droite passant par $A$, dirigée par $\overrightarrow{n}$. $(\mathscr{D})$ est orthogonale à $(\mathscr{P})$, montrons donc que $(\mathscr{D})$ est contenue dans $(\mathscr{P}')$.
  Soit $M \in (\mathscr{D})$, il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{n}$.

  $$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n'} = k\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0 \implies M \in (\mathscr{P}').$$

  Conclusion, $(\mathscr{D})$ est une droite de $(\mathscr{P}')$ orthogonale au plan $(\mathscr{P})$ donc $(\mathscr{P}')$ est perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.

Cette proposition montre toute l'efficacité du vecteur normal sur les vecteurs directeurs :

***Deux plans sont orthogonaux si, et seulement si leurs vecteurs normaux le sont !***

**Exemple 3:** Dans un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{\imath};\ \overrightarrow{\jmath};\ \overrightarrow{k})$ :

$$\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \iff (O;\ \overrightarrow{\jmath};\ \overrightarrow{k}) \perp (O;\ \overrightarrow{\imath};\ \overrightarrow{\jmath}).$$

**Méthode 2** (À retenir)

- Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal au plan.
- Deux plans sont parallèles si, et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
- Deux plans sont orthogonaux si, et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

### II.3 Équation d'un plan

Il suffit de traduire, avec des coordonnées, le **corollaire** (1) :

**Théorème IV** (Équation cartésienne d'un plan)

L'équation cartésienne d'un plan $(\mathscr{P})$ est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ avec } a,\ b \text{ et } c \text{ non tous nuls.}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est alors un vecteur normal au plan.

[ Démonstration page 298
Exercices 66 à 69 page 313 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace appartiendra donc au plan $(\mathscr{P})$ si, et seulement si ses coordonnées sont solutions de l'équation à 3 inconnues $ax + by + cz + d = 0$.

**Remarque:** L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients $a$, $b$ et $c$ par un facteur $k$ non nul ($ie$) remplacer le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ par un vecteur qui lui est colinéaire.

**ROC**

Deux implications à montrer :

- D'après le **corollaire** (1), si $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est un point de l'espace appartenant au plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ alors :

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0 \iff \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$

$$a(x-x_A)+(y-y_A)+(z-z_A)=0 \iff ax+by+cz\underbrace{-(ax_A+by_A+cz_A)}_{d}=0$$

$$ax+by+cz+d=0.$$

- Réciproquement, supposons que les coordonnées d'un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ soient solution de l'équation $ax+by+cz+d=0$ et montrons qu'il appartient alors à un certain plan $(\mathscr{P})$ dont on devra trouver un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et un point $A$.

  Comme $a$, $b$ et $c$ sont non tous nuls, on peut, par exemple, supposer que $a\neq 0$.
  Le point $A\left(-\dfrac{d}{a}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ appartient donc au plan $(\mathscr{P})$.

  On peut aussi poser $\overrightarrow{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$, vecteur non nul car $a$, $b$ et $c$ sont non tous nuls.

  On calcule alors $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix} x+\dfrac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\left(x+\dfrac{d}{a}\right)\times a+by+cz$

  $$=ax+by+cz+d=0.$$

  D'après le **corollaire** (1), le point $M$ appartient donc au plan $(\mathscr{P})$ passant par $A$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

**Exemple 4:** Les Plans $(O;\ \overrightarrow{\imath};\ \overrightarrow{\jmath})$, $(O;\ \overrightarrow{\imath};\ \overrightarrow{k})$ et $(O;\ \overrightarrow{\jmath};\ \overrightarrow{k})$ ont, respectivement, comme équation $z=0$, $y=0$ et $x=0$.

[ Applications pages 297<br>Exercice résolu 6 page 305 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

5 **Exercice** Montrer que les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires avec :

$$(\mathscr{P}):\ 2x+y+1=0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z-4=0.$$

**Méthode 3** (Fondamental)

**1/** Déterminer une équation cartésienne d'un plan $(\mathscr{P})$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et passant par un point A :

$$A\left(\sqrt{2}\ ;\ -2\ ;\ 5\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n}\,(2\ ;\ -3\ ;\ -1)\,.$$

**2/** Trouver une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$ parallèle à un plan $(\mathscr{P})$ et passant par un point A :

$$A\,(3\ ;\ -1\ ;\ 0) \quad \text{et} \quad (\mathscr{P}):\ 2x - y + 3z = 0.$$

**3/** Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur d'un segment [AB] :

$$A\,(-1\ ;\ 1\ ;\ 0) \quad \text{et} \quad B\,(2\ ;\ 1\ ;\ -1)\,.$$

**4/** Déterminer une équation cartésienne d'un plan $(\mathscr{P})$ passant par un point $A$ et dirigé par deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ :

$$A\,(1\ ;\ 2\ ;\ 3)\,, \quad \overrightarrow{u}\,(1\ ;\ -1\ ;\ 2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 3)\,.$$

**Correction:**

**1/** D'après le **théorème** (IV), l'équation est tout de suite de la forme :

$$2x - 3y - z + d = 0.$$

Reste à trouver $d$. La méthode est la même que pour les équations de droites dans le plan :

Un point appartient à un plan si, et seulement si ses coordonnées vérifient son équation ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} A\left(\sqrt{2}\ ;\ -2\ ;\ 5\right) \in (\mathscr{P}) \iff 2\sqrt{2} - 3\times(-2) - 5 + d &= 0 \\ 2\sqrt{2} + 1 + d &= 0 \\ d &= -1 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P}):\ 2x - 3y - z - 1 - 2\sqrt{2} = 0$.

**2/** Pour définir, un plan, il suffit de trouver un vecteur normal et un point appartenant à ce plan. Pour le point, celui-ci est donné, pour le vecteur normal, celui de $(\mathscr{P})$ convient. On obtient donc, en deux temps :

$$(\mathscr{Q}):\ 2x - 3y - 1 + d = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } A\,(3\ ;\ -1\ ;\ 0) \in (\mathscr{Q}) \iff 2\times 3 - 3\times(-1) + 0 + d &= 0 \\ 9 + d &= 0 \\ d &= -9. \end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{Q}):\ 2x - 3y - z - 9 = 0$.

**3/** Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants des extrémités $A$ et $B$. C'est donc le plan passant le milieu de $[AB]$ et orthogonal au segment $[AB]$ ($ie$) de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ :

Les coordonnées du milieu $I$ de $[AB]$ sont $\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le plan médiateur $(\mathscr{M})$ a donc pour équation : $3x - z + d = 0$.
Puis, toujours par le même raisonnement :

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ -\frac{1}{2}\right) \in (\mathscr{M}) \iff 3 \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) + d &= 0 \\ 2 + d &= 0 \\ d &= -2. \end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{M})$ : $3x - z - 2 = 0$.

[ Exercice résolu 1 page 300 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**4/** Tout d'abord bien s'assurer que les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires même si non demandé. C'est bien le cas, leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
Une équation paramétrique de $(\mathscr{P})$ est alors :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t + 3s \end{cases}, \ (t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2.$$

Une des méthodes pour obtenir une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ est de faire disparaître les deux paramètres $s$ et $t$ par des combinaisons linéaires sur $x$, $y$ et $z$ :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x + y = 3 + s \\ z - 2x = 1 + s \end{cases}, \ (t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\begin{aligned} (\mathscr{P}) :&\quad x + y - z - (-2x) = 3 + \cancel{s} - (1 + \cancel{s}) \\ (\mathscr{P}) :&\quad 3x + y - z - 2 = 0. \end{aligned}$$

Une autre méthode est de chercher directement un vecteur $\overrightarrow{n}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (*ie*) dont les coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ a + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -c \\ a = -3c \end{cases}$$

Aucune condition ne porte sur le paramètre $c$. On choisit $c = -1$, d'où $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et l'équation de $(\mathscr{P})$ est $3x + y - z + d = 0$. On trouve $d$ de la même manière que précédemment.

**Remarque:** Suivant la valeur attribuée à $c$, on trouve une infinité de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{n}$ et normaux à $(\mathscr{P})$.

6

**Exercice (Bac)** L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$. Les points $A$, $B$ et $C$ ont pour coordonnées $A\,(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, $B\,(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et $C\,(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$.

**Partie A**

**1/** Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que le triangle $ABC$ est un triangle rectangle.

**2/** Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + y + z - 3 = 0.$$

Prouver que $(\mathscr{P})$ est orthogonal à la droite $(AB)$ et passe par le point $A$.

3/ Soit $(\mathscr{P}')$ le plan orthogonal à la droite $(AC)$ et passant par le point $A$. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{P}')$.

4/ Déterminer un vecteur directeur de la droite $(\mathscr{D})$ intersection des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

**Partie B**

1/ Soit $D$ le point de coordonnées $(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$. Prouvez que la droite $(AD)$ est perpendiculaire au plan $(ABC)$.

2/ Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

3/ Prouver que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.

4/ (a) Calculer l'aire du triangle $BDC$.

(b) En déduire la distance du point $A$ au plan $(BDC)$.

# III Applications

## III.1 Intersection d'une droite et d'un plan

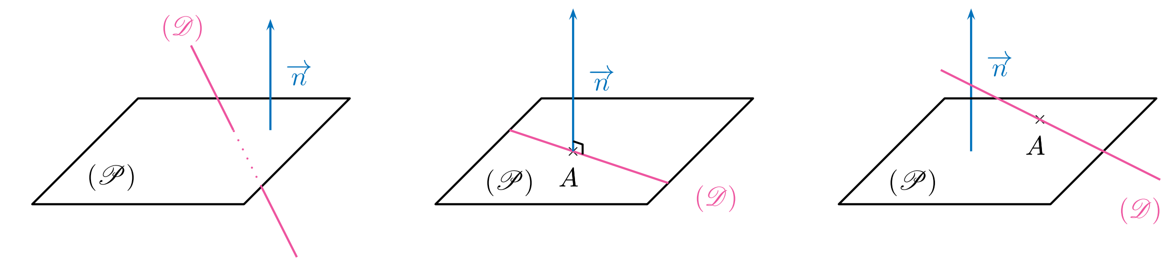
La notion d'équation cartésienne et de vecteur normal simplifient grandement les questions de positions relatives droite-plan.

**Proposition 4**

Soient $(\mathscr{D})$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

- Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \neq 0$ alors $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D})$ sont sécants en un point.
- Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$ alors soit $A$ est un point quelconque de $(\mathscr{D})$.
  - Si $A \in (\mathscr{P})$, la droite $(\mathscr{D})$ est contenue dans $(\mathscr{P})$.
  - Si $A \notin (\mathscr{P})$, la droite $(\mathscr{D})$ est strictement parallèle à $(\mathscr{P})$.

**Preuve:**




$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D})$ ont un unique point d'intersection — $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$ — $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D})$ n'ont aucun point commun

- Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \neq 0$ alors $(\mathscr{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathscr{P})$. Elle lui est donc sécante.
- Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$ alors $(\mathscr{D})$ est parallèle à $(\mathscr{P})$. Reste à savoir si elle est contenue dans ce dernier ou s'ils sont disjoints. Tout dépend de l'appartenance d'un de ses points à $(\mathscr{P})$.

**7** **Exercice** Déterminer l'intersection éventuelle du plan $(\mathscr{P})$ d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$ et de la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{P}) : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

[ Exercice 89 page 315
Exercices 97 à 99 page 317 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

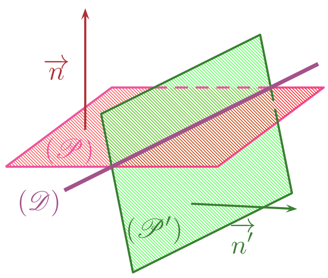
## III.2 Intersection de deux plans

**Proposition 5**

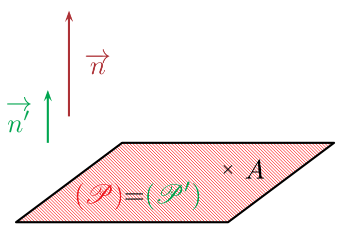
Soient $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires et si $A$ est un point quelconque de $(\mathscr{P})$ :
  - Si $A \in (\mathscr{P}')$, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont confondus.
  - Si $A \notin (\mathscr{P})$, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont strictement parallèles.

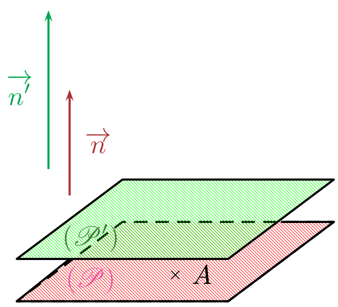
**Preuve:**




L'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ est la droite $(\mathscr{D})$




L'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ est le plan $(\mathscr{P})$




L'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ est vide

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires alors les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles. Reste à savoir s'ils sont confondus ou disjoints.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont sécants suivant une droite $(\mathscr{D})$.

[ Exercice 94 page 316
Exercice 100 page 317 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** Dans l'espace, une droite $(\mathscr{D})$ n'est pas représenter par une seule équation cartésienne mais par deux : celles de deux plans sécants (*ie*) de vecteurs normaux non colinéaires dont elle est l'intersection.

**Méthode 4** (Fondamental)

Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans sécants :

$$(\mathscr{P}): \ x - 3y + 2z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathscr{P}'): \ 2x + y + 7z - 1 = 0.$$

**Correction:** Les vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$ de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ ne sont pas colinéaires donc les plans sont sécants en une droite $(\mathscr{D})$.

L'idée est toujours la même : traduire au niveau des coordonnées les propriétés d'un point quelconque de la droite.

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathscr{D}) \iff \begin{cases} M \in (\mathscr{P}) \\ M \in (\mathscr{P}') \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 & (L_1) \\ 2x + y + 7z - 1 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

Étant donné que c'est un système à 3 inconnues pour deux équations, nous ne trouverons pas une solution unique. On exprime deux des inconnues en fonction de la troisième qui jouera le rôle du paramètre.

$$\begin{cases} 7x + 23z - 8 = 0 & (L_1) + 3 \times (L_2) \\ 7y + 3z + 9 = 0 & (L_2) - 2 \times (L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} - \dfrac{23}{7}z \\ y = -\dfrac{9}{7} - \dfrac{3}{7}z \end{cases}$$

En posant $z = t$, une représentation de $(\mathscr{D})$ peut être :

$$(\mathscr{D}) : \begin{cases} x = \dfrac{8}{7} - \dfrac{23}{7}t \\ y = -\dfrac{9}{7} - \dfrac{3}{7}t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

8 **Exercice** Soient $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ les plan d'équation

$$(\mathscr{P}): \ 2x - y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathscr{P}'): \ -x + 4y + z - 3 = 0.$$

Étudier l'intersection éventuelle des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.

[ Exercice résolu 5 page 304
QCM page 306 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice I et II page 325 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

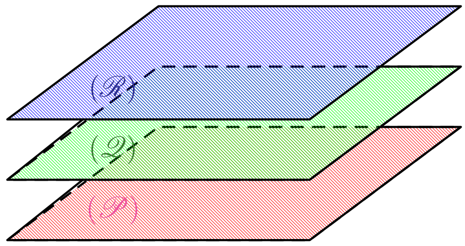
# IV Hors-programme mais...

## IV.1 Intersection de trois plans

Soient $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ trois plans de l'espace. Alors six cas sont possibles :

**1/** Les plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ sont strictement parallèles.

$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = \emptyset.$$

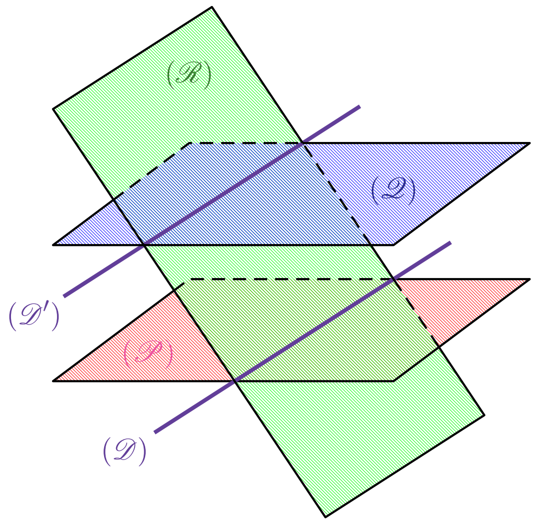



**2/** Les plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont strictement parallèles.

$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = \emptyset.$$

Le plan $(\mathscr{R})$ est sécant avec $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$, respectivement en $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

- $(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D})$.
- $(\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D}')$.

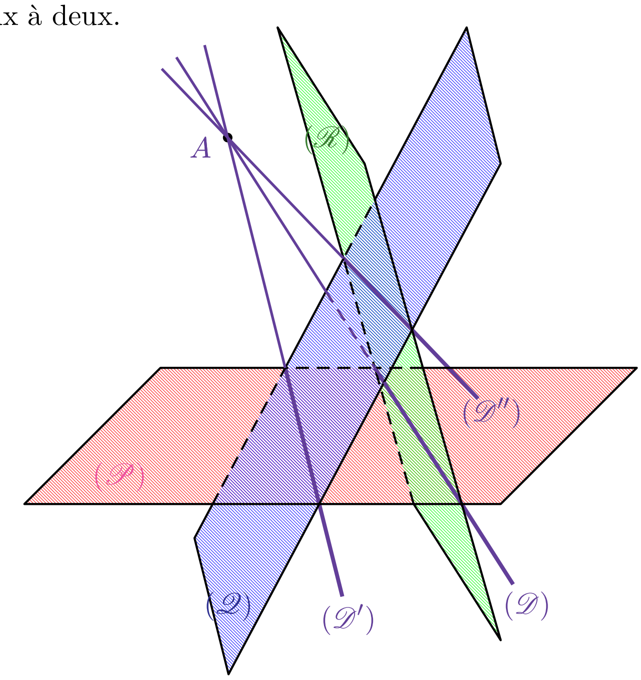



**3/** Les plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ sont sécants deux à deux.

$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = \emptyset.$$

- Le plan $(\mathscr{P})$ est sécant avec $(\mathscr{Q})$ :
$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) = (\mathscr{D}').$$
- Le plan $(\mathscr{P})$ est sécant avec $(\mathscr{R})$ :
$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D}).$$
- Le plan $(\mathscr{Q})$ est sécant avec $(\mathscr{R})$ :
$$(\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D}'').$$

**Remarque:** Les droites $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{D}'')$ n'ont aucune raison d'être parallèles. D'après le « théorème du toit », elles sont soit parallèles soit concourantes en un unique point $A$.



**4/** Les plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ sont sécants en une même droite $(\mathscr{D})$.

$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D}).$$

- Le plan $(\mathscr{P})$ est sécant avec $(\mathscr{Q})$ :

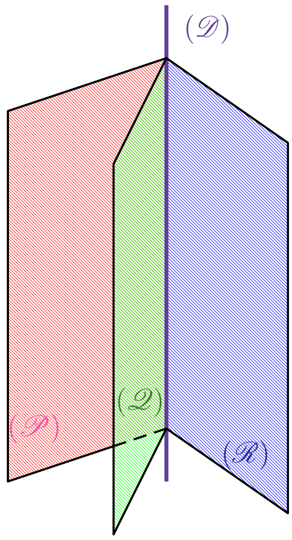
$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) = (\mathscr{D}).$$

- Le plan $(\mathscr{P})$ est sécant avec $(\mathscr{R})$ :

$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D}).$$

- Le plan $(\mathscr{Q})$ est sécant avec $(\mathscr{R})$ :

$$(\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D}).$$




**5/** Les plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ sont sécants en un unique point $A$.

$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = A.$$

- Le plan $(\mathscr{P})$ est sécant avec $(\mathscr{Q})$ :

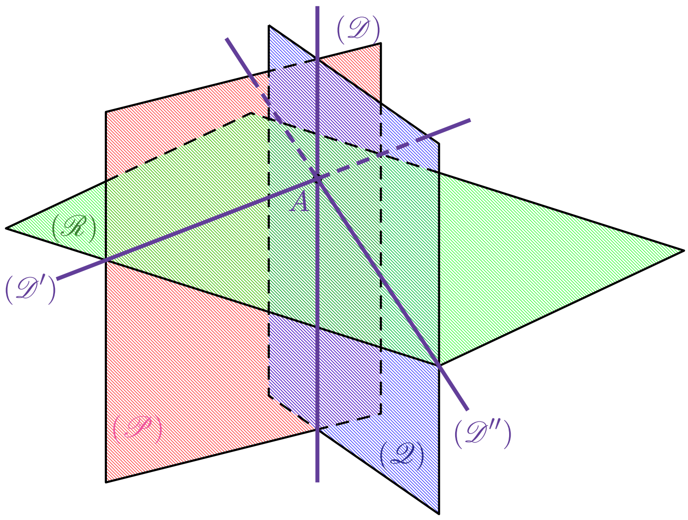
$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) = (\mathscr{D}).$$

- Le plan $(\mathscr{P})$ est sécant avec $(\mathscr{R})$ :

$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D}').$$

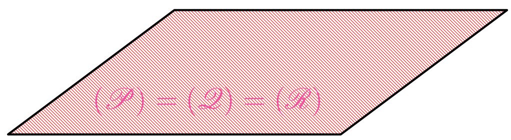
- Le plan $(\mathscr{Q})$ est sécant avec $(\mathscr{R})$ :

$$(\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{D}'').$$




**6/** Les plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ sont confondus.

$$(\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q}) \cap (\mathscr{R}) = (\mathscr{P}).$$




D'un point de vue algébrique, dans un repère orthonormé, la recherche de l'intersection de trois plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ d'équation respective

$$(\mathscr{P}) : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad \text{de vecteur normal } \overrightarrow{n_1}\,(a_1 \ ; \ b_1 \ ; \ c_1)\,,$$

$$(\mathscr{Q}) : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \quad \text{de vecteur normal } \overrightarrow{n_2}\,(a_2 \ ; \ b_2 \ ; \ c_2)\,,$$

et

$$(\mathscr{R}) : \ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0, \quad \text{de vecteur normal } \overrightarrow{n_3}\,(a_3 \ ; \ b_3 \ ; \ c_3)$$

revient à chercher les points $M\,(x\;;\;y\;;\;z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient le système de trois équations à 3 inconnues :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

Le système $(\mathcal{S})$ peut donc avoir aucune solution, une unique solution ou une infinité.

9

**Exercice** Déterminer l'intersection des plans $(\mathscr{P})$, $(\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{R})$ avec :

**1/** $(\mathscr{P}):\ 3x + 3y + z + 2 = 0$, $(\mathscr{Q}):\ y + z - 5 = 0$ et $(\mathscr{R}):\ 2z - 8 = 0$.

**2/** $(\mathscr{P}):\ 4x + 3y + z + 2 = 0$, $(\mathscr{Q}):\ x + 2y + z - 5 = 0$ et $(\mathscr{R}):\ 3x + 5y + 2z - 9 = 0$.

[ Exercice 120 page 323 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## IV.2 Sphère

On considère toujours un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ orthonormé de l'espace.

**Définition 8** (Sphère)

La sphère de centre $\Omega$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant

$$\Omega M = R.$$

**Proposition 6**

Soit $A$ et $B$ deux points de l'espace.

- La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0.$$

- Soit $R$ un réel strictement positif et $\Omega\,(a\;;\;b\;;\;c)$ un point de l'espace.

  Une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega$ et de rayon $R$ est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

**Preuve:**

- Soit $I$ le milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \iff (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0 \iff MI^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\underbrace{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}}_{\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}}=0$$

$$\iff MI^2+\overrightarrow{MI}.\underbrace{\cancel{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}}_{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}}-IA^2=0 \iff MI^2=IA^2 \iff MI=IA$$

$$\iff M \text{ appartient à la sphère de diamètre } [AB].$$

- Il suffit simplement de traduire la relation de la **définition** (8) au niveau des coordonnées :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathscr{S}(\Omega\ ;\ R) \iff \Omega M^2=R^2$$
$$\iff (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

[ Exercices 77 à 80 page 314 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice 81 page 314 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

10 **Exercice** $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

On considère $(\mathscr{S})$ est la sphère de centre $J(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et de rayon 1, deux réels $u$ et $v$ et les points $M$ et $N$ définis par $\overrightarrow{OM}=u\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{AN}=v\,\vec{\imath}$ où $A(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$.

**1/** Donner une équation de la sphère $(\mathscr{S})$.

**2/** (a) Quelles sont les coordonnées des points $M$ et $N$ ?

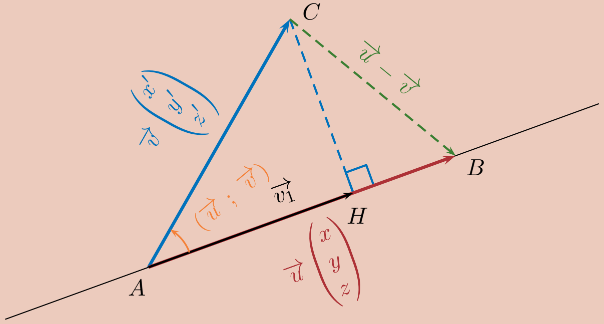
(b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(MN)$.

**3/** Montrer que la droite $(MN)$ est tangente à la sphère $(\mathscr{S})$ si, et seulement si $u^2v^2=4$.

[ Exercice résolu 4 page 303 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice 103 page 317
Exercices 104 à 110 pages 318-319 , **Maths Repère**, *Hachette*
Exercice 119 page 323 ]

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= xx' + yy' + zz' \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \vec{u}.\vec{v_1}\end{aligned}$$




$$(\alpha\vec{a} + \vec{b}).(\vec{c} - \vec{d}) = \alpha\vec{a}.\vec{c} - \alpha\vec{a}.\vec{d} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}.\vec{d}.$$
$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$
$$I = mil([AB]) \iff I\left(\frac{x_B + x_A}{2}\ ;\ \frac{y_B + y_A}{2}\ ;\ \frac{z_B + z_A}{2}\right).$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$
$$\vec{u} = (x\ ;\ y\ ;\ z) \implies \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
(Dans un repère orthonormal)

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \vec{u} \perp \vec{v}.$$
$$\vec{u}.\vec{v} \neq 0 \implies \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

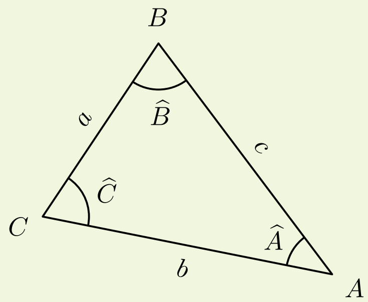
Un *repère* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ de l'espace est constitué d'un point origine $O$ et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

$(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ est orthonormal si, et seulement si
$$\begin{cases}\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1 \\ \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0.\end{cases}$$

Al-Kashi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{A}.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}.$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{C}.$$

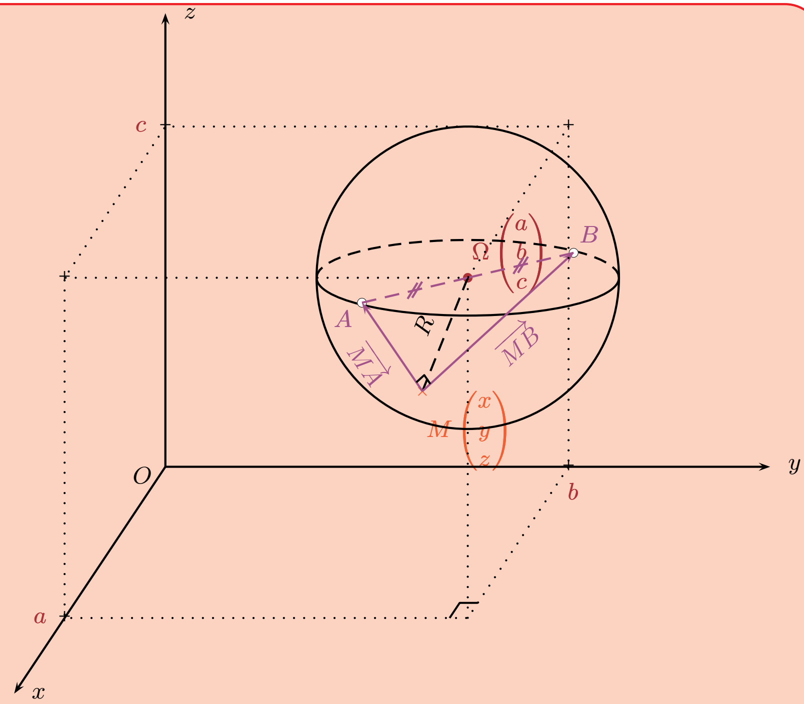


- La sphère de centre $\Omega\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et de rayon $R$,
- ou la sphère de diamètre $[AB]$

est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de l'espace vérifiant :

$$\Omega M = R \iff \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0.$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2.}$$



# Bac Blanc de Mathématiques

Classes de Terminale S

**Durée : 4 heures**

**Wallis & Futuna**
**Août 2015**

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

La calculatrice est autorisée

**Exercice 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- $A$ l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- $B$ l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- $V$ l'événement « La personne interrogée dit la vérité ».

**1/** Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

**2/** Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.

**3/** (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

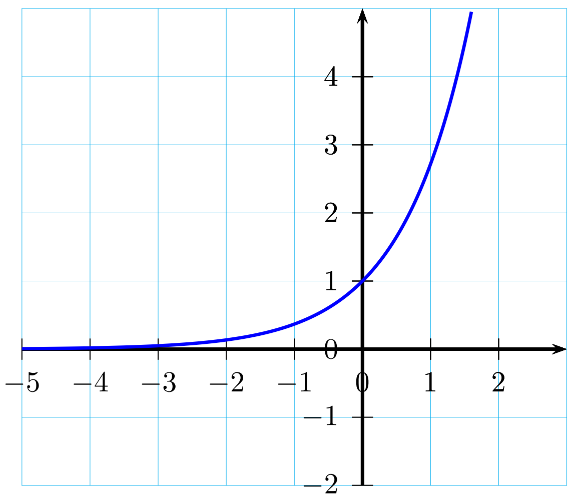
(b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

**Exercice 2** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-contre.

Pour tout réel $m$ strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.



**1/** Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.

Démontrer que la droite $\mathcal{D}_{\mathrm{e}}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

**2/** Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif $m$, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.

**3/** Démonstration de la conjecture.

On pose $\varphi$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) - mx$.

(a) Montrer que $\varphi$ admet un minimum en $\ln m$ que l'on déterminera.

(b) Démontrer la conjecture.

**Exercice 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\mathrm{M}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$, $\mathrm{N}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$, $\mathrm{P}\left(1\ ;\ 0\ ;\ -\dfrac{5}{4}\right)$.

**1/** Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

**2/** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$.

En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

**3/** (a) Déterminer une représentation paramétrique du plan (MNP).

(b) On considère la droite $\Delta$ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta$.

(c) Montrer que le plan (MNP) et la droite $\Delta$ sont sécants.

**4/** Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite $\Delta$.

(a) Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{4}{7}\ ;\ \dfrac{24}{35}\ ;\ \dfrac{23}{35}\right)$.

(b) Montrer que $\mathrm{FK} = \sqrt{\dfrac{27}{35}}$.

**5/** Sur la figure donnée en annexe, tracer en vert et avec soin la section du cube ABCDEFGH par le plan (MNP). On laissera les traits de construction apparents. Aucune justification n'est demandée.

**Exercice 4** **5 points**

**Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A**

Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0$ et, pour tout entier naturel $n$, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel $n$, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

**1/** Démontrer que, la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $a$.

**2/** (a) Donner l'expression de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n$ et $v_0$.

(b) En déduire que si $a$ appartient à l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, alors la suite $(u_n)$ a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

**Partie B**

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

**1/** Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

**2/** Pour tout entier naturel $n$, on note $h_n$ la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.

(a) Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

(b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite $(h_n)$.

Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

(c) La suite $(h_n)$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

**Exercice 4** **5 points**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».

Ainsi $(3,\ 4,\ 5)$ est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

**Partie A : généralités**

**1/** Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, et $p$ un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,\ py,\ pz)$ est lui aussi un TP.

**2/** Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, alors les entiers naturels $x$, $y$ et $z$ ne peuvent pas être tous les trois impairs.

**3/** Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul $n$ peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :

$n = 2^\alpha \times k$ où $\alpha$ est un entier naturel (éventuellement nul) et $k$ un entier naturel impair.

L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de $n$.

Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,

$120 = 2^3 \times 15$.

(a) Donner la décomposition de l'entier 192.

(b) Soient $x$ et $z$ deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et $z^2$.

(c) En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de $z^2$ , montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels $x$, $y$ et $z$ sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels $x$, $y$ jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels $x$, $y$ et $z$ seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

**Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015**

**1/** Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x,\ y,\ 2015)$.

**2/** On admet que, pour tout entier naturel $n$ , $(2n+1)^2 + \left(2n^2 + 2n\right)^2 = \left(2n^2 + 2n + 1\right)^2$.

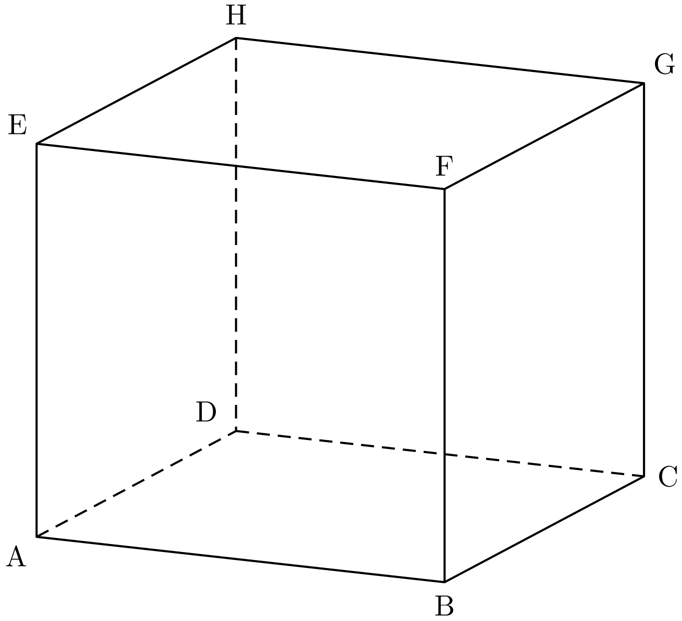
Déterminer un TP de la forme $(2015,\ y,\ z)$.

**3/** (a) En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.

(b) En déduire un TP de la forme $(x,\ 2015,\ z)$.

**ANNEXE à remettre avec la copie**

**EXERCICE 3 : Commun à tous les candidats**



CHAPITRE

11

# Calcul Intégral

Dès l'aube du calcul différentiel et la formalisation de la dérivée d'une fonction $f$, les mathématiciens se sont naturellement posé la question de l'existence d'une fonction $F$ dont $f$ serait la dérivée. La notion de *primitive* était née.

D'un autre côté, les mathématiciens étant aussi des géomètres, il était tout aussi intéressant de savoir calculer l'aire d'une surface un peu moins simple qu'un rectangle (*ie*) délimitée par une portion de courbe par exemple. Difficile a priori ce problème trouva une solution élégante et triviale lorsque le lien avec les primitives fut trouvé.

Mettons nos pas dans ceux de ces mathématiciens du XVII^e^ siècle et attaquons nous au *calcul intégral* !

## Sommaire

# I Primitives d'une fonction sur un intervalle

## I.1 Généralités

**Définition 1**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive** de $f$ sur $I$ toute fonction $F$ définie et **dérivable** sur $I$ vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

**Remarque:** On ne parle pas de LA primitive, mais DES primitives de f. En effet, si $F$ est une primitive de $f$ alors $F + c$, $c \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de $f$.

**Exemple 1:** Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

- La fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Remarque:** La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{3}x^3$ est une primitive de $x^3$ sur $\mathbb{R}$.

[ Application 1 page 175 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Proposition 1**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

**1/** Si $f$ admet une primitive $F$ sur $I$, les primitives de $f$ sont les fonctions du type $F + c$ où $c$ est une constante réelle.

**2/** Si de plus on impose la condition $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique.

**3/** Si $F$ et $G$ sont respectivement des primitives de $f$ et $g$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $F + G$ et $\lambda F$ sont des primitives de $f + g$ et $\lambda f$.

**Preuve:** Trivial en dérivant chacune des primitives et en utilisant la linéarité de la dérivation.

[ Démonstration page 181
Applications 2 et 3 page 175 , **Maths Repère**, *Hachette*]

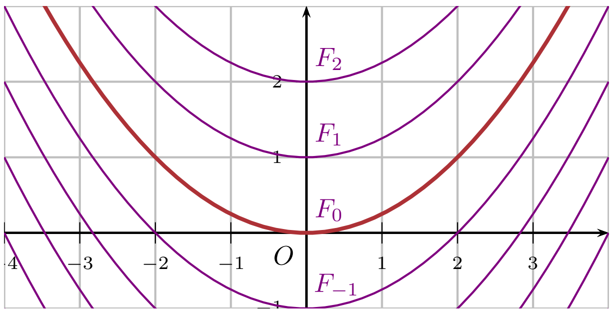
**Remarque:** Pour les physiciens [1], la condition $F(x_0) = y_0$ est appelée *condition initiale*.

**ATTENTION** Si la « primitivation » est une opération linéaire, elle n'est en rien compatible avec la multiplication et personne ne songera JAMAIS à écrire qu'une primitive de $f \times g$ est ... [2].

1. et les chimistes.
2. J'ai dit JAMAIS !

**Exemple 2:**

- Les fonctions $F_0(x) = \dfrac{1}{4}x^2$, $F_1(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$, $F_2(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 2$, ... , $F_c(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ sont toutes des primitives de la fonctions $f : x \to \dfrac{x}{2}$.
  Leur courbe représentative se déduisent les unes des autres par une translation de direction celle de l'axe des ordonnées.
- On préférera souvent une primitive particulière comme $F_0$ vérifiant $F_0(0) = 0$.




## I.2 Primitives des fonctions de référence

La lecture du tableau des primitive se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ».
Les fonctions $f$ suivantes sont définies, dérivables sur l'intervalle $I$, $n$ est un entier relatif non nul différent de $-1$.

| Fonction $f$ | Fonction $F$ | $I$ |
|---|---|---|
| $x \longmapsto 0$ | $x \longmapsto c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto x^n\ (n \in \mathbb{N})$ | $x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ | $x \longmapsto \ln x$ | $]0; +\infty[$ |
| $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ | $x \longmapsto -\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \longmapsto 2\sqrt{x}$ | $]0; +\infty[$ |
| $x \longmapsto e^x$ | $x \longmapsto e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto \sin(x)$ | $x \longmapsto -\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto \cos(x)$ | $x \longmapsto \sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[\ (k \in \mathbb{Z})$ |

**Remarque:** Ce tableau ne donne qu'UNE primitive de la fonction $f$. Pour obtenir toutes les primitives de $f$, il suffit de rajouter une constante $c$ à $F$.

**Exemples 3:**

- Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^8} = x^{-8}$ est $F(x) = -\dfrac{1}{7x^7}$.
- Comme $\left(x \ln x - x\right)' = \ln x - \cancel{1} + \cancel{1}$, une primitive de $x \longmapsto \ln x$ est la fonction $x \longmapsto x \ln x - x$.

Ne pensez pas, cependant, qu'il sera toujours aussi facile de trouver une primitive d'une fonction. C'est, le plus souvent une question extrêmement difficile voire irrésoluble pour les plus grands[3].

## I.3 Opérations sur les primitives

$u'$ et $v'$ sont des fonction définies sur $I$, de primitives $u$ et $v$ et $n$ est un entier relatif non nul différent de -1.

Il suffit de résumer la **proposition** (1) et de se rappeler de la formule de la dérivée d'une fonction composée :

$$\left(F(u)\right)' = u' \times f(u), \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \ (ie) \ F' = f.$$

| Fonction du type | Une primitive | Condition |
|---|---|---|
| $u' + v'$ | $u + v$ | |
| $k \times u'$ | $k \times u$ | |
| $u' \, u^n$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ | $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ si $n$ est négatif |
| $u'e^u$ | $e^u$ | |
| $\dfrac{u'}{u}$ | $\ln u$ | $u(x) > 0$ sur $I$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u}$ | |
| $\cos(ax+b)$ | $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$ | $a \neq 0$ |

**Exemple 4:**

- $f(x) = 2x(x^2-1)^5$ est du type $u'u^5$ de primitive $\dfrac{u^6}{6}$. Donc, $F(x) = \dfrac{(x^2-1)^6}{6}$.
- $f(x) = 3x^2 + \cos(7x)$ est du type $u' + v'$ de primitive $u + v$. Donc, $F(x) = x^3 + \dfrac{1}{7}\sin(7x)$.
- $f(x) = -3\,e^{-3x-1}$ est du type $u'\,e^u$ de primitive $e^u$. Donc, $F(x) = e^{-3x-1}$.
- $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+3}$ est du type $\dfrac{u'}{u}$ de primitive $\ln(u)$. Donc, $F(x) = \ln(x^2-x+3)$.
- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+4}}$ est du type $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ de primitive $2\sqrt{u}$. Donc, $F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+4}$.

[ Exercice résolu 5 page 190 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

3. Quelle est une primitive de $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ? Réponse : $-\ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)$.

**Méthode 1** (Trouver une primitive)

D'une manière générale, pour trouver une primitive $F$ d'une fonction $f$, on revisite son tableau des fonctions dérivées à l'envers et on conjecture la forme de la fonction $F$ puis on complète avec des coefficients multiplicatifs afin de simplifier ceux qui apparaîtraient en dérivant la fonction $F$.

**ATTENTION** Trouver une primitive, je le redis, n'est pas toujours chose facile. Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive.

Pire, parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue. Elle est alors uniquement définie par une intégrale [4].

Contrairement à la dérivation qui est toujours possible, la recherche de primitive s'avère donc parfois impossible !...

[ Applications page 177
Exercice résolu 1 pages 184-185 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice résolu 3 page 188 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

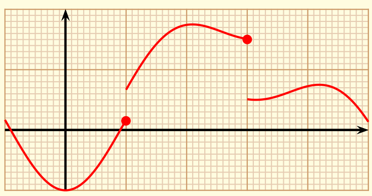
Dans toute la suite de ce chapitre, on se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

## II Intégrale d'une fonction

**Rappels 1**

Une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ est dite continue sur $I$ si on peut tracer sa courbe représentative dans un repère d'un trait continu sans lever le crayon.

*fonction continue*



*fonction discontinue*

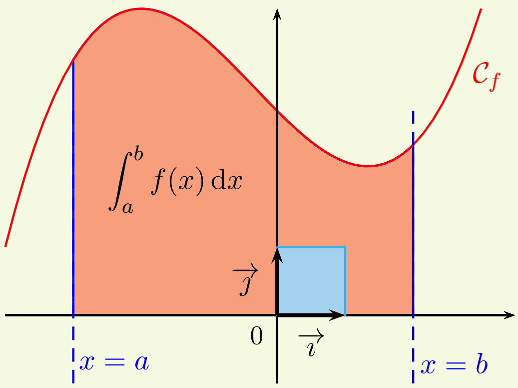
4. Par exemple, la primitive de $x \longmapsto e^{-x^2}$.

## II.1 Intégrale d'une fonction continue

**Définition 2** (Intégrale)

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [a; b]$.
On appelle **intégrale de $f$ sur $I$** l'aire **algébrique** du domaine délimité par :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$,
- l'axe des abscisses
- et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.




On note alors cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « somme de $a$ à $b$ de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

**Notation :**

- $a$ et $b$ sont les bornes d'intégration.
- Le $x$ dans « $\mathrm{d}x$ » est la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs. Elle est dite muette, d'autres lettres peuvent être utilisées :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \dots$$

Lorsque la fonction $f$ ne prend que des valeurs positives, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du domaine délimité précédemment et exprimée en unités d'aire (u.a.) (*ie*) l'aire du rectangle formé par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Dans le cas où les valeurs de $f$ sont négatives, l'aire sera égale à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

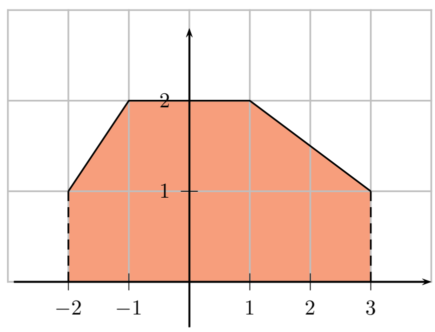
1 **Exercice**

On donne la représentation suivante d'une fonction $f$ sur $[-2\,;3]$ ainsi que les mesures : $\|\vec{\imath}\| = 2\,cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 3\,cm$.

Calculer :

**1/** L'unité d'aire.

**2/** $\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ puis l'aire en $cm^2$.



**Correction:**

**1/** L'unité d'aire vaut : u.a $= 2 \times 3 = 6\,cm^2$.

**2/** Pour calculer l'intégrale, il faut calculer l'aire sous la courbe en unité d'aire soit le nombre de rectangles. Il y a 7 rectangles pleins un demi rectangle en haut à gauche et un triangle en haut à droite de côté respectifs 2 et 1 soit $\dfrac{2 \times 1}{1} = 1$ rectangle.

On en déduit donc :

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 8,5 \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = 8,5 \times 6 = 51\,cm^2.$$

[ Exercice 31 page 198 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemple 5:** Calcul de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

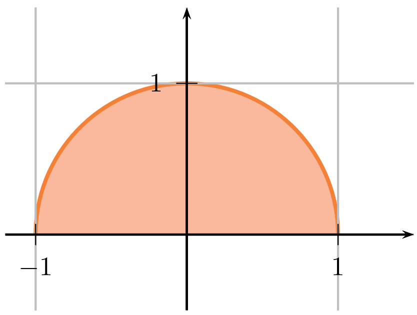
Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

On en déduit alors que le demi-cercle de centre O et de rayon 1 pour $y \geqslant 0$ a pour équation $y = \sqrt{1-x^2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ est donc l'aire du demi-disque de rayon 1 soit $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$




[ Application 1 page 171 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Corollaire 1** (Positivité)

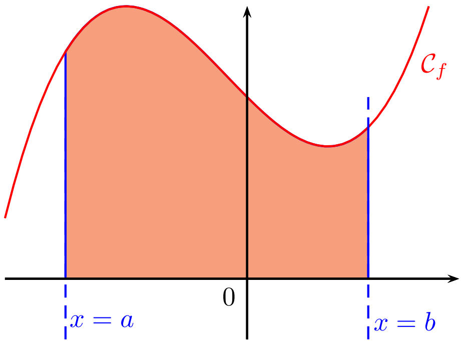
Soit $f$ et $g$ des fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
- Si $f$ est positive sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

**Preuve:**

- L'aire du domaine est nulle …
- Cette assertion découle de la définition : si $f$ est positive, l'aire de la surface située entre la courbe représentative et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[a\,;b]$ est positive.

  De la même manière, si $f$ était négative, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
- Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction $h = g - f \geqslant 0$.




[ Démonstration page 180
Application 1 page 173 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** La réciproque de la positivité n'est pas forcément vraie, on peut avoir $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ sans avoir $f$ positive sur $[a; b]$ comme on va le voir dans l'exemple suivant.

**Exemple 6:** Soit $f$ la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

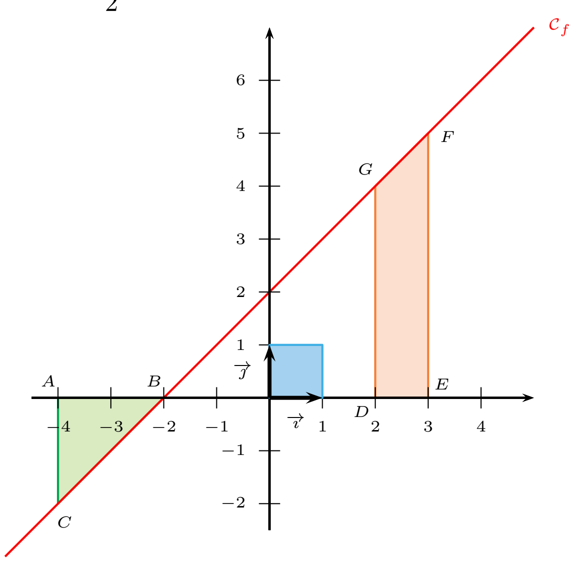
- $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du trapèze $DEFG$ soit :

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{DG + EF}{2} \times DE = 5.$$

- $\int_{-4}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est la somme des aires algébriques des triangles $ABC$ et $BEF$ soit :

$$\int_{-4}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}_{BEF} - \mathcal{A}_{ABC}$$
$$= \frac{5 \times 5}{2} - \frac{2 \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = 12,5 - 2$$
$$= 10,5.$$

Dans ce cas, $\int_{-4}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ ne correspond par à l'aire du polygone $ACBFE$.

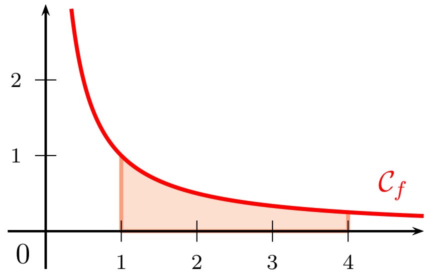



En particulier, $\int_{-4}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 10,5 \geqslant 0$ sans que $f$ ne soit positive sur tout l'intervalle $[-4\,;3]$ comme annoncé dans la remarque précédente.

[ Application 3 page 171
Application 3 page 173 (questions 1 et 2) , **Maths Repère**, *Hachette* ]

On voit tout de suite, qu'il deviendrait rapidement difficile de calculer de telles aires sous des courbes quelconques même très simples comme

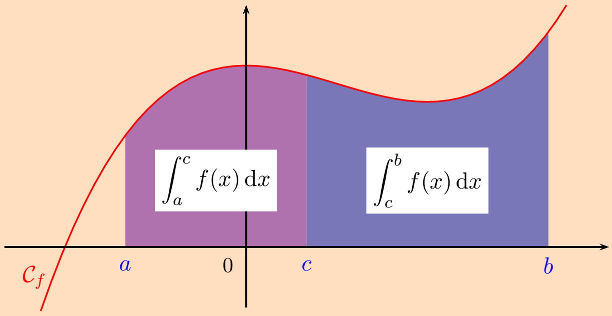
$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$




En considérant l'additivité des aires algébriques, on obtient une propriété simple, logique, familière et qui va nous être très utile par la suite :

**Proposition 2** (Relation de Chasles[5])

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et $c \in [a;b]$, alors :




$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Corollaire 2**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Preuve:** D'après la **proposition** (2), on :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

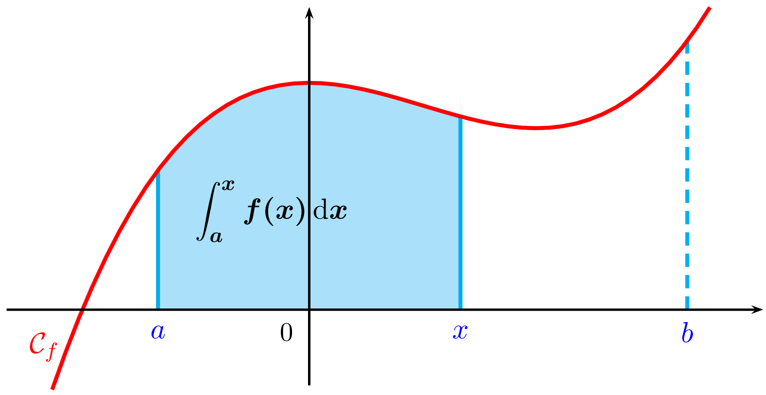
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Il est désormais temps de s'attaquer à trouver un moyen de calculer la valeur de celle-ci. Les primitives vont nous y aider[6].

5. Mathématicien français né en 1793 et mort en 1880.
6. Il y avait forcément un lien !

## II.2 Lien entre Intégrale et primitive

Soit $f$ une fonction continue et positive définie sur l'intervalle $[a;b]$ et $x$ un nombre réel quelconque de cet intervalle. L'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'aire de la partie coloriée en bleue qui dépend de $x$.




**Théorème 1** (Fondamental)

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ est un réel de I.
Alors la fonction $F$ définie sur $I$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ telle que $F(a) = 0$.

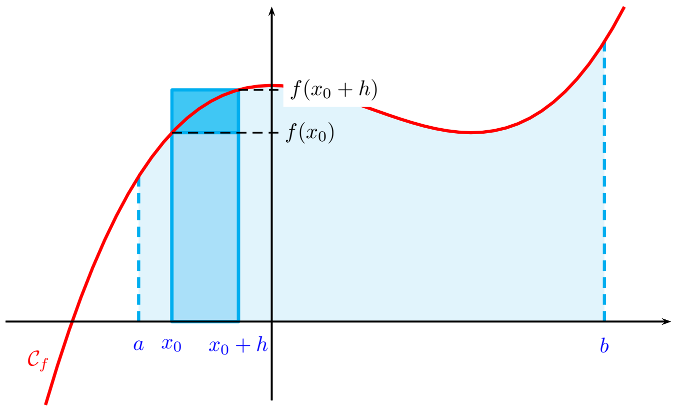
**Preuve:** D'après la **définition** (1), il suffit de montrer que $F$ est dérivable sur $I$ et que sa fonction dérivée est la fonction $f$.

De plus, d'après la **proposition** (2), quitte à découper l'intégrale sur les intervalles où la fonction $f$ est strictement monotone, on peut supposer que $f$ est croissante sur $I$

Soient $x_0$ quelconque dans l'intervalle $I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in I$.

**Cas $h > 0$ :**

- $F(x_0 + h) = \displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a\,;x_0 + h\,]$.
- $F(x) = \displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\,dt$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a\,;x_0\,]$.
- La différence $F(x_0 + h) - F(x_0) = \displaystyle\int_x^{x_0+h} f(t)\,dt$ correspond alors à l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[x_0\,;x_0 + h\,]$.




Comme la fonction $f$ est croissante sur $[x_0\,;x_0+h]$, pour tout $t$ compris entre $x_0$ et $x_0+h$ :

$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h).$$

L'aire $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ est donc comprise entre $h\times f(x_0)$, l'aire du petit rectangle sous la courbe, et $h\times f(x_0+h)$, l'aire du grand rectangle englobant la courbe (*ie*)

$$h\times f(x_0) \leqslant F(x_0+h)-F(x_0) \leqslant h\times f(x_0+h).$$

En divisant l'inégalité par $h>0$, on obtient alors un encadrement du taux de variation de $f$ en $x_0$ :

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Comme $f$ est continue en $x_0$, on a : $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0).$$

**Cas $h<0$ :** Le même raisonnement conduit successivement à :

$$h\times f(x_0+h) \leqslant F(x_0+h)-F(x_0) \leqslant h\times f(x_0).$$

Puis,

$$f(x_0+h) \geqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \geqslant f(x_0) \qquad\qquad (h<0\,!)$$

Et enfin $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

**Conclusion :** $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$. La fonction $F$ est donc dérivable en tout $x_0$ de $I$ et $F'(x_0)=f(x_0)$

Il est clair que $F(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et d'après la **proposition** (1).2, cette primitive est unique.

[ Démonstration page 182 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice résolu 7 pages 192-193 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Ce théorème, le plus important du chapitre, va nous amener toutes les propriétés et simplifications désirées mais avant d'aller plus avant, la démonstration montre que seule, la continuité de $f$ était nécessaire. Ceci est suffisamment important pour être noté :

**Corollaire 1**

Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives sur $I$.

# III Conséquences du théorème (I)

## III.1 Calculs d'intégrales

**Théorème 11**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [a;b]$ et $F$ une primitive de $f$ sur $I$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Pour les calculs, on note : $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).}$

**Preuve:** On sait que la fonction $G : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $f$ sur $I$ telle que $G(a) = 0$. Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x$ de $I$, $G(x) = F(x) + c$. Or $G(a) = 0$, d'où $c = -F(a)$ et on obtient : $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Pour $x = b$, on obtient bien $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Démonstration page 183
Application 4 page 175
, **Maths Repère**, *Hachette*

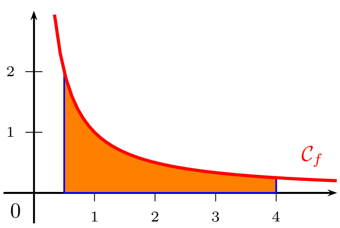
**Remarque:** la valeur de l'intégrale est donc indépendante du choix de $F$.

**Preuve:** Soient $F$ et $G = F + c$, $c \in \mathbb{R}$ deux primitives d'une fonction continue $f$.

Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [G(t)]_a^b = [F(t) + c]_a^b = F(b) + \cancel{c} - F(a) - \cancel{c} = F(b) - F(a)$.

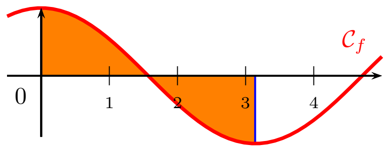
**Exemple 7:**

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)]_{\frac{1}{2}}^4 \\ &= \ln 4 - \ln\frac{1}{2} \\ &= \ln 8 \text{ u.a.} \simeq 2,08 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$



(Aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x &= [\sin x]_0^{\pi}\\ &= \sin\pi - \sin 0\\ &= 0.\end{aligned}$$




Le **théorème** (II) ramène donc le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à la recherche d'une primitive $F$ de $f$ sur $[a\,;b]$. Cela semble simple sur des exemples élémentaires mais ne croyez pas que ce le soit. Nombre de fonctions pourtant simples en apparence n'ont pas de primitives explicite.

**Exemple 8:** Quelle est une primitive de la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2}$ ?

## III.2 Propriétés de l'intégrale

**Proposition 3** (Linéarité)

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ et $\lambda$ un réel, alors :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,;$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

**Preuve:** Montrer les deux propositions est équivalent à montrer que :

$$\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soient alors $F$ et $G$, deux primitives sur $[a\,;b]$, respectivement, de $f$ et $g$ alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$. Il n'y a plus qu' à appliquer le **théorème** (II) :

$$\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = [\lambda F(x)+G(x)]_a^b = \lambda F(b)+G(b)-\lambda F(a)-G(a).$$

$$\lambda\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda[F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = \lambda F(b)-\lambda F(a)+G(b)-G(a).$$

Donc $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Ce théorème permet en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires. [7]

7. Comme la dérivation, l'intégration se comportera donc bien avec les sommes.

**Exemple 9:**

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(6x + \frac{5}{x}\right) \mathrm{d}x = 3\int_1^2 2x \,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\ &= 3[\,x^2\,]_1^2 + 5[\,\ln x\,]_1^2 = 3(2^2 - 1) + 5(\ln 2 - \ln 1) \\ &= 9 + 5\ln 2. \end{aligned}$$

## IV Formule de la moyenne

Ce paragraphe aurait pu se situer avant le **théorème** (I) dont il lui est indépendant. Il n'apparaît maintenant que dans le but de pouvoir calculer quelques intégrales plus facilement. Voyez cela comme une pause théorique avant d'entamer les calculs pratiques.

**Théorème III** (Inégalités de la moyenne)

S'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que, pour tout $x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors on a :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

**Preuve:** D'après le **corollaire** (1), si $f(x) \leqslant M$ sur $[\,a\,;b\,]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x.$$

Or, $\displaystyle\int_a^b M\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du rectangle de longueur $b-a$ et de hauteur $M$ (*ie*) d'aire $M(b-a)$.

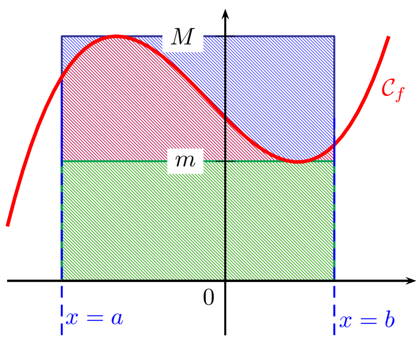
D'où $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

De la même manière si $m \leqslant f(x)$ sur $[\,a\,;b\,]$ alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

On obtient bien l'encadrement :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

D'un point de vue graphique, l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur.




Démonstration page 180
Application 2 page 173
Exercice résolu 2 page 186
, **Maths Repère**, *Hachette*

La philosophie de ce théorème est que l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ ne peut faire n'importe quoi comme devenir infinie par exemple. Elle est bornée par le produit des extrema de la fonction par la longueur de l'intervalle. Ce théorème est important maison a mieux. Pourquoi se contenter d'une faible inégalité alors qu'on pourrait avoir une égalité ?

[ Exercice résolu 8 page 194 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Théorème IV** (Valeur moyenne d'une fonction)
Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Alors il existe un réel $c$ de $[a\,;b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$.
Le nombre $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors appelé la **valeur moyenne de $f$ entre $a$ et $b$**.

**Remarque:** Le signe $\displaystyle\int$ se dit aussi « somme », ce qui nous donne une formule similaire à la formule de la moyenne classique :

**Preuve:** La fonction $f$ étant continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ elle y est bornée par deux réels $m = \min\limits_{[a;b]} f$ et $M = \max\limits_{[a;b]} f$ et on a :

$$\forall x \in a\,;b\,, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

D'après le **théorème** (III) :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \iff m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M.$$

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient donc à l'intervalle $f\big([a\,;b]\big) = [m\,;M\,]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $f$ continue sur $[a\,;b]$, il existe donc un [8] réel $c \in [a\,;b]$ tel que :

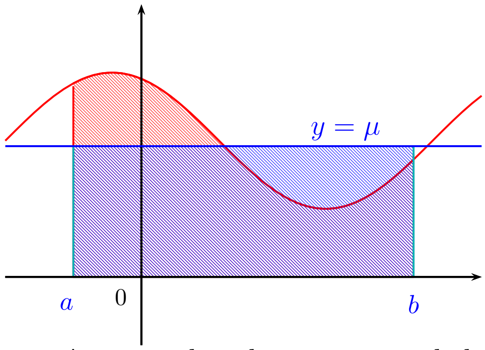
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c).$$

[ Démonstration page 182 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Interprétation graphique si $f$ est positive sur $[a\,;b]$ :**

Le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est le réel pour lequel l'aire délimitée par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle bleu dont les côtés ont pour mesures $b-a$ et $\mu$.

8. Pas forcément unique si $f$ n'est pas strictement monotone.




**Remarque:** D'un point du vue cinématique la valeur moyenne de la vitesse d'un mobile mesurée entre deux temps $t_1$ et $t_2$ s'écrit :

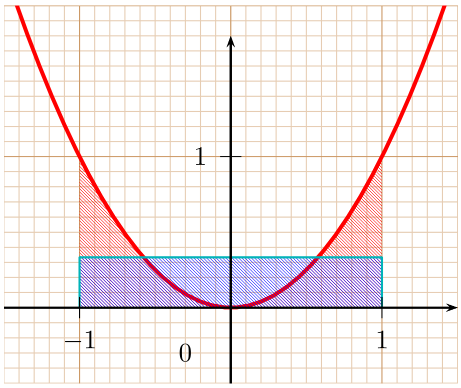
$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_2 - t_1}[x(t)]_{t_1}^{t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$
$$= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \text{vitesse moyenne.}$$

La valeur moyenne de la vitesse d'un mobile est donc sa vitesse moyenne[9]

**Exemple 10:**

La valeur moyenne sur $[-1\,;1\,]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{3}.$$




[ Exercice résolu 4 page 189 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# V Calcul d'aires

## V.1 Aire d'un domaine compris entre une courbe et l'axe des abscisses

### Cas d'une fonction négative

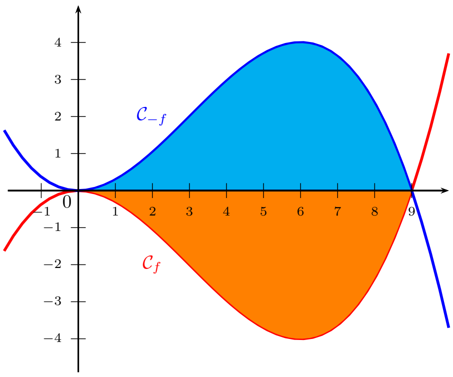
Si la fonction $f$ est négative, alors la fonction $-f$ est positive et les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Donc, l'aire du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe de $-f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Dans ce cas, $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b \big(-f(x)\big)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

9. Heureusement !

**Exemple 11:** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{27} - \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{x^2}{27}(x-9)$.

Comme $\dfrac{x^2}{9} \geqslant 0$, le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de $x-9$ qui est négatif sur $]-\infty\,;9\,]$ et en particulier sur l'intervalle $[0\,;9\,]$.




$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^9 \Big(-f(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^9 \left(-\frac{x^3}{27} + \frac{x^2}{3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{x^4}{108} + \frac{9^3}{9}\right]_0^9 = \left(-\frac{9^4}{108} + \frac{9^3}{9}\right) - 0\\ &= \frac{81}{4}\text{ u.a..}\end{aligned}$$

## Cas d'une fonction changeant de signe

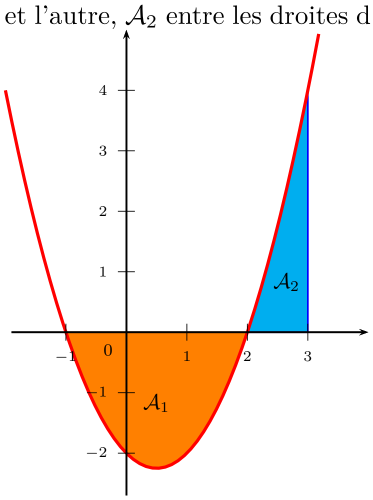
Pour calculer l'aire d'un domaine défini par une fonction changeant de signe, il suffit de découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant puis utiliser la relation de Chasles (**proposition** (2)).

**Remarque:** Il sera donc nécessaire de faire une étude préalable du signe de $f$ sur l'intervalle d'intégration.

**Exemple 12:** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.

On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre la courbe de $f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=-1$ et $x=3$.

Comme $f$ est positive sur $]-\infty\,;-1\,] \cup [\,2\,;+\infty\,[$ et négative sur $[-1\,;2\,]$, on découpe l'aire en deux partie : l'une, $\mathcal{A}_1$ entre les droites d'équation $x=-1$ et $x=2$ et l'autre, $\mathcal{A}_2$ entre les droites d'équation $x=2$ et $x=3$.




$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 && + \ \mathcal{A}_2\\ &= -\int_{-1}^2 -f(x)\,\mathrm{d}x && + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{-1}^2 x^2 - x - 2\,\mathrm{d}x && + \int_2^3 x^2 - x - 2\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^2 && + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3\\ &= \frac{11}{2} && + \frac{11}{6}\\ &= \frac{19}{3} \simeq 6,33\text{ u.a.}\end{aligned}$$

[ Application 1 page 179 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice 120 page 206 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## V.2 Aire d'un domaine compris entre deux courbes

**Proposition 4**

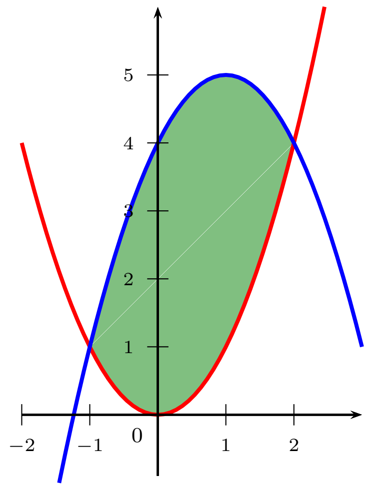
Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{\imath};\ \overrightarrow{\jmath})$. L'aire de la partie du plan limitée par les courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

**Remarque:** Si $g(x) - f(x)$ change de signe sur l'intervalle d'intégration, on découpera de même que précédemment l'intégrale afin que ce dernier garde un signe constant.

**Exemple 13:** Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{2} \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} \big((-x^2 + 2x + 4) - (x^2)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-2 \times \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} \\
&= 9 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$




[ Application 2 page 179
Exercice résolu 6 page 191 , **Maths Repère**, *Hachette*
Exercice 119 page 205 ]

### Cas d'une fonction en escalier

**Définition 3**

Il est un cas où, si la fonction $f$ n'est pas continue sur $[a;b]$, on peut néanmoins définir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ , c'est le cas des fonctions en escalier.

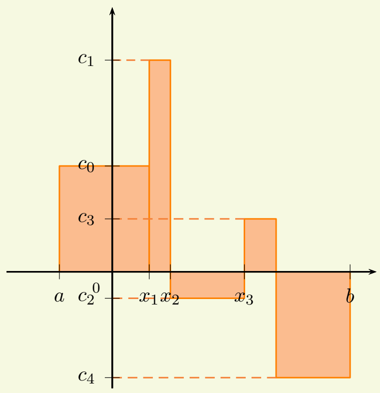
Si $f$ est définie ainsi :

**1/** si $x \in [a;x_1[$, $f(x) = c_1$

**2/** si $x \in [x_1;x_2[$, $f(x) = c_2$

**3/** si $x \in [x_2;x_3[$, $f(x) = c_3$

**4/** si $x \in [x_3;b]$, $f(x) = c_4$




alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la somme des aires des rectangles situés au-dessus de l'axe des abscisses-(somme des aires des rectangles en dessous de l'axe des abscisses)

Exercices 128 et 129 pages 207-208
Exercice 132 page 209
Exercice 140 page 211
Exercice 154 page 216
Exercice 169 page 220
Exercices 176, 177 et 179 pages 222-223
Exercices 191 à 193 page 225

, **Maths Repère**, *Hachette*

## VI (Hors-programme) Intégration par parties

**Théorème V**

Si $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$, telles que leurs dérivées $u'$ et $v'$ soient continues sur $I$.
Alors pour tous réels $a$ et $b$ de $I$ :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

.

**Preuve:** La fonction $uv$ est dérivable sur $I$ avec $(uv)' = u'v - uv'$. Ainsi $uv' = (uv)' - u'v$.
Puisque $uv'$, $(uv)'$ et $u'v$ sont continues sur $I$, on en déduit que :

$$\int_a^b (uv')(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)]\,\mathrm{d}t,$$

et par linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b (uv')(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b (u'v)(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $uv$ est une primitive de $(uv)'$ sur $I$, donc

$$\int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b.$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 14:** Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$. La difficulté ici est de ne pas connaître de primitive de $x \longmapsto \ln x$ sur $[\,;1\,2]$.

Posons $u = \ln x$ et $v' = 1$ alors $u' = \dfrac{1}{x}$ et $v = x$. Ces choix fait, toutes les conditions du théorème sont remplies et on a :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x \times 1\,\mathrm{d}x &= \big[\ln x \times x\big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln 2 - \cancel{\ln 1} - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \big[x\big]_1^2\\ &= 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

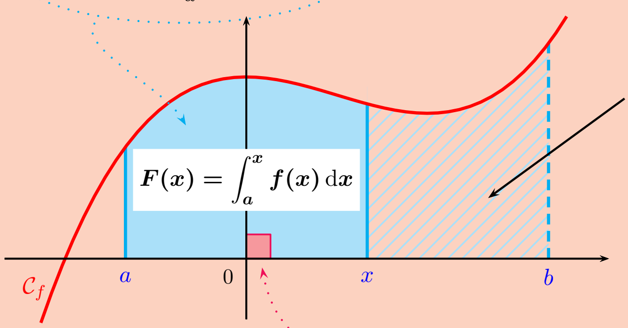
**Remarque:** À condition de la connaître, on aurait tout aussi bien pu prendre $x\ln x - x$ comme primitive de $\ln x$ sur $[1\,;2\,]$.

$$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \big[x\ln x - x\big]_1^2 = 2\ln 2 - 2 - \cancel{\ln 1} + 1 = 2\ln 2 - 1.$$

$F$, dérivable sur $I$ est une primitive de $f$ sur $I \iff \forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives sur $I$.

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$ et on a $F'(x) = f(x)$.




$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire algébrique délimitée par la courbe de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$$

1 u.a.

| $f$ | $F = \displaystyle\int f \quad (+c)$ |
|---|---|
| $x^n\ (n \in \mathbb{N})$ | $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln x$ |
| $\dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ | $-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |

| $f$ | $F$ |
|---|---|
| $ku' + v'$ | $ku + v$ |
| $u'\,u^n$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ |
| $u'e^u$ | $e^u$ |
| $\dfrac{u'}{u}$ | $\ln u$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u}$ |
| $\cos(ax+b)$ | $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$ |
| $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x$ |

**Continuité :**
- $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0.$

**Linéarité :**
- $\displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

**Chasles :**
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

**Positivité :**
- $\displaystyle 0 \leqslant f(x) \implies 0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle f(x) \leqslant g(x) \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Soit $f$ continue sur $[a\,;b]$ :

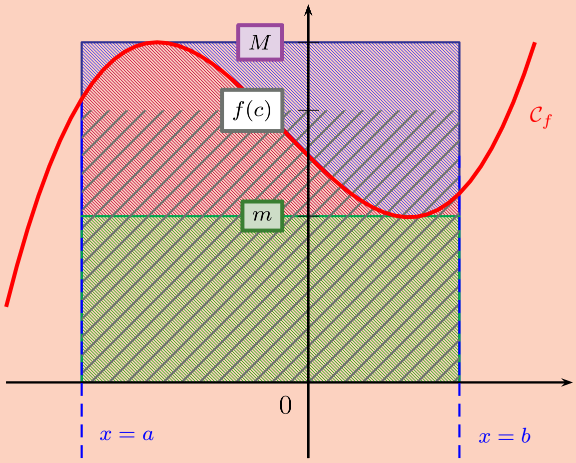
$$\color{green}{m} \leqslant f(x) \leqslant \color{purple}{M}$$

$$\Downarrow$$

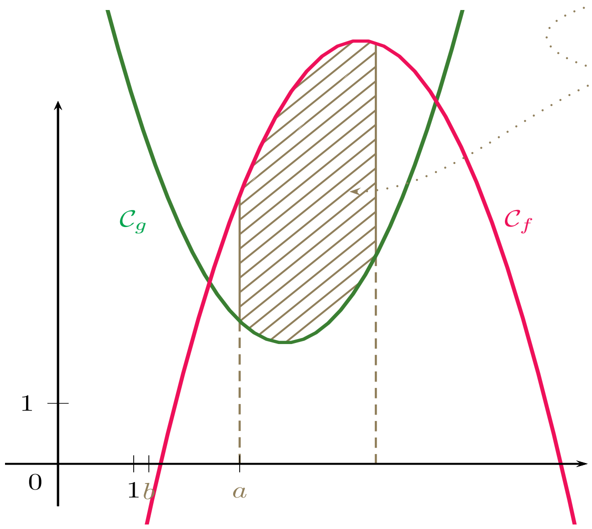
$$\boxed{m(b-a)} \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \boxed{M(b-a)}.$$

et

$$\exists\, c \in [a\,;b] \text{ tel que } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{(b-a)f(c)}.$$




$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \text{Valeur moyenne de } f \text{ entre } a \text{ et } b.$$




$\int_a^b \big(f(t)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t =$ Aire algébrique comprise entre les courbes de $f$ et $g$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

**Intégration par parties :**

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Chapitre

12

# Lois Continues

Les lois étudiées jusqu'à présent (loi de Bernoulli, binomiale) sont des lois « discrètes ». Dans ce chapitre, on s'intéresse à des lois « continues », c'est-à dire pour lesquelles la variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, on les appelle lois à densité.

**Sommaire**



## I Rappels de première

### I.1 Variable aléatoire

**Rappels 1**

Lorsqu'à chaque événement élémentaire $\omega$ d'un univers $\Omega$ on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire** réelle notée en général $\mathbb{X}$.

Ainsi $\mathbb{X}$ est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{X} : \quad \Omega \longmapsto \mathbb{R}$$

### I.2 Loi de probabilité associé à une variable aléatoire

**Rappels 2**

Soit $P$ une probabilité sur un univers $\Omega$.
Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire tel que $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, .., x_n\}$ , qui désigne l'ensemble des valeurs prises par $\mathbb{X}$, soit fini.
Lorsque qu'à chaque valeur $x_i$ prise par $\mathbb{X}$ on lui associe la probabilité $p_i = P(\mathbb{X} = x_i)$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité** $P$ de la variable aléatoire $\mathbb{X}$.

### I.3 Espérance,variance,écart-type

Soit $\mathbb{X}$ dont la loi est donnée par le tableau :

| valeurs prises par $\mathbb{X}$ :$x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ...... | $x_n$ | total |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(\mathbb{X} = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | ...... | $p_n$ | 1 |

**Rappels 3**

- **L'espérance mathématique de** $\mathbb{X}$ est le réel défini par :

$$\boxed{E(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i}, \qquad \text{où } p_i = P(\mathbb{X} = x_i).$$

- **La variance de** $\mathbb{X}$ est le réel défini par :

$$\boxed{\begin{aligned} V(\mathbb{X}) = E\Big(\big(\mathbb{X} - E(\mathbb{X})\big)^2\Big) &= \sum_{i=1}^{i=n} \Big(x_i - E(\mathbb{X})\Big)^2 p_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i\right) - E(\mathbb{X})^2 \end{aligned}}.$$

- **L'écart type de** $\mathbb{X}$ est le réel défini par :

$$\boxed{\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{V(\mathbb{X})}}.$$

**Remarques:**

- L'espérance mathématique désigne , dans le cas d'un jeu , une espérance de gain moyen , en outre si $E(\mathbb{X}) = 0$ on dit que le jeu est **équitable**, si $E(\mathbb{X}) > 0$ on dit que le jeu est **avantageux** et si $E(\mathbb{X}) < 0$ le jeu est dit **désavantageux** pour le joueur.

- La variance est une quantité positive ou nulle , donc si après calculs vous trouvez $V(\mathbb{X}) < 0$ il y a une grosse bourde quelque part...

# II Variable aléatoire à densité

Lorsque l'on s'intéresse à la durée d'une communication téléphonique, à la durée de vie d'un composant électronique ou à la température de l'eau d'un lac, la variable aléatoire $\mathbb{X}$ associée au temps ou à la température, peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné. On dit alors que cette variable $\mathbb{X}$ est continue (qui s'oppose à discrète comme c'est le cas par exemple dans la loi binomiale). On ne peut plus parler de probabilité d'événements car les événements élémentaires sont en nombre infini. La probabilité d'une valeur **isolée** de $\mathbb{X}$ est alors **nulle**.

On contourne cette difficulté en associant à la variable $\mathbb{X}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et en définissant une densité de probabilité.

Soit une expérience aléatoire et son univers associé $\Omega$ (ensemble des issues)

## II.1 Variable aléatoire continue

**Définition 1**

Une variable aléatoire est une fonction définie sur $\Omega$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. On la note $X$. Elle est dite **continue** si elle peut prendre comme valeur tous les réels d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

**Exemples 1:**

- Si on lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on peut définir une variable aléatoire qui à chaque lancer associe par exemple la somme nombres obtenus. Comme cette variable ne prend que des valeurs finies entières comprises entre 2 et 12, il ne s'agit pas d'une variable aléatoire **continue**, elle est dite **discrète**.
- Si on considère la variable aléatoire $X$ qui, à chaque ampoule basse consommation d'un certain modèle, associe sa durée de vie en heure, cette durée n'est pas forcément un nombre entier d'heure et en théorie on ne connaît pas sa durée de vie maximale. Cette variable aléatoire est donc **continue** et l'intervalle $I$ est $[0\,;+\infty\,[$.

## II.2 Fonction de densité

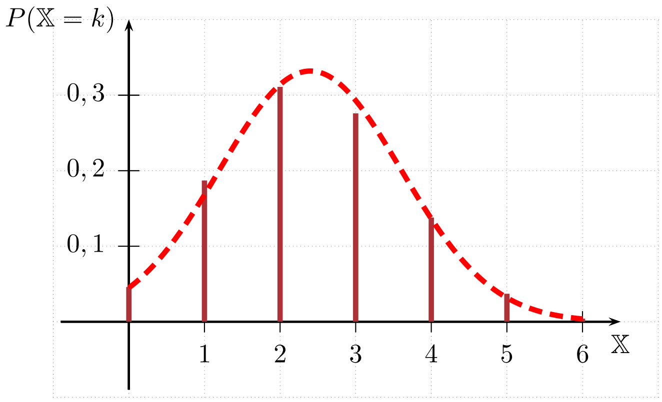
Une fois une variable aléatoire définie on s'intéresse à sa loi de probabilité. Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la loi de probabilité associée est généralement donnée sous la forme d'un tableau ou encore à l'aide d'une formule, c'est le cas par exemple pour les variables aléatoires qui suivent la loi binomiale.

**Exemples 2:**

- Si on reprend l'exemple de la variable aléatoire discrète $X$ qui associe au lancer de deux dés la somme des deux nombres obtenus.
  La loi de probabilité de $X$ est donnée par le tableau ci-dessous :

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

- Si on considère la variable aléatoire $Y$ qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(6;0,4)$, on a alors pour tout entier $k$ compris entre 0 et 6, $P(\mathbb{X}=k)=\binom{6}{k}0,4^k 0,6^{6-k}$ et sa représentation graphique :




Dans le cas d'une variable aléatoire continue, on utilise une fonction définie sur $I$, un intervalle de $\mathbb{R}$, appelée **densité**.

**Définition 2** (Densité de probabilité)

Une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ [1] de $\mathbb{R}$ est appelée fonction densité, ou **densité** si, et seulement si

- $f$ est **positive** (*ie*) $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$.
- $f$ est **continue** sur $I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- L'aire du domaine $\mathscr{D}$, délimitée sous la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal et l'axe des abscisses est égale à 1 (*ie*) $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

**Remarques:**

- La dernière assertion correspond tout simplement au cas discret lorsque nous écrivions que la somme des probabilités des événements élémentaires devait être égale à 1.
- Si $I = [a\,;b]$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à 1 ce traduit par $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

[ Application 1 page 337 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

1 **Exercice**

**1/** Démontrer que la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{3}$ est une densité de probabilité sur $[1, 4]$.

**2/** Démontrer que la fonction $g$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est une densité de probabilité sur $[0, e-1]$.

La fonction densité choisie, on peut alors définir la loi de probabilité associée à celle-ci.

1. Par exemple $[a\,;b]$, $[a\,;+\infty]$ ou $\mathbb{R}$.

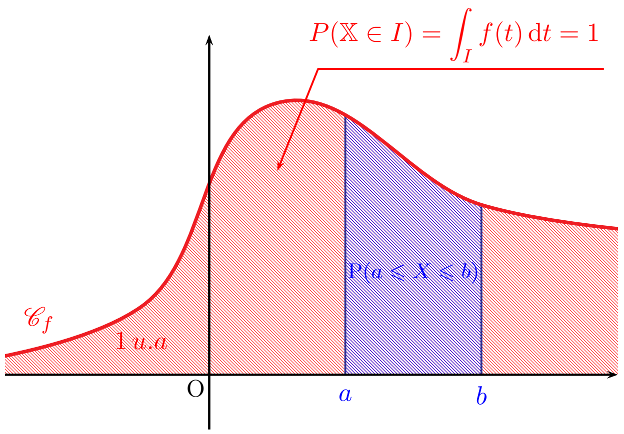
### II.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Dans tout ce qui suit $\mathbb{X}$ désigne une variable aléatoire à valeurs dans un **intervalle**.

**Définition 3** (Loi de probabilité)

On note $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une densité de probabilité sur $I$.
On dit qu'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ à valeurs dans $I$ suit **une loi de probabilité $P$** de densité $f$ si pour tout intervalle $[a\,;b\,]$ de $I$ on a :

$$P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) = P([a\,;b\,]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$




Cas où $I = \mathbb{R}$.

La probabilité $P(\mathbb{X} \in [a\,;b\,]) = P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b)$ correspond à l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

**Proposition 1**

**1/** $P([a\,;a\,]) = P(\{a\}) = 0.$

**2/** $P(\overline{[a,b]}) = 1 - P([a,b])$

L'assertion (1).1 a pour conséquence qu'une loi **continue** ne « **charge** » pas les points (*ie*)

$$P([a,b]) = P([a,b[) = P(]a,b]) = P(]a,b[).$$

En conséquence, dans tout ce qui suit, les résultats donnés pour un intervalle fermé seront valables aussi pour les semi-ouverts ou ouverts, ...

[ Application 2 page 337 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

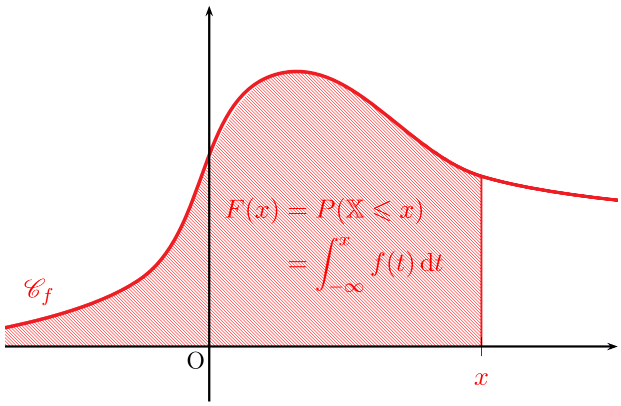
**Définition 4** (Fonction de répartition)

On note $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une densité de probabilité sur $I$.
La fonction $F$ définie par :

$$F(x) = P(\mathbb{X} \leqslant x)$$

est appelée la **fonction de répartition** de la variable $\mathbb{X}$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \left( \text{ou} \quad \lim_{a \to -\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right).$$




Cas où $I = \mathbb{R}$.

**Remarque:** $\boxed{P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) = F(b) - F(a).}$

### II.4 Espérance et variance

**Définition 5**

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire de densité $f$ sur $[a\,;b]$, on appelle espérance de $\mathbb{X}$ le réel, noté $E(\mathbb{X})$ défini par

$$E(\mathbb{X}) = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On appelle variance de $\mathbb{X}$ le réel, $V(\mathbb{X})$ défini par

$$V(\mathbb{X}) = \int_a^b (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas discret [2], on avait $E(\mathbb{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$ et $V(\mathbb{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$.

2. *cf* le rappel (3)

# III Exemples de lois

## III.1 Loi uniforme

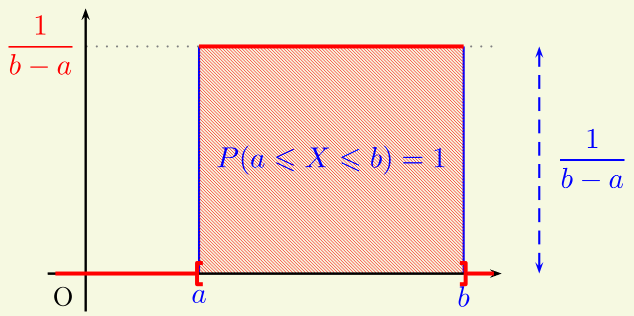
2

**Exercice** Soit $f$ une fonction constante sur $[a,b]$.

Déterminer la valeur de cette constante pour que $f$ soit une densité de probabilité .

**Définition 6**

On dit qu'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la **loi uniforme** si sa densité $f$ est constante sur $[a,b]$ et égale à $\dfrac{1}{b-a}$. On la note $\mathcal{U}([a\,;b\,])$.




[ Démonstration page 340 , **Maths Repère**, *Hachette*]

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné. La notion d'uniformité vient du fait que la probabilité qu'une valeur tirée d'une loi uniforme soit dans un certain intervalle ne dépend pas de la position de l'intervalle, mais uniquement de sa longueur.

On l'utilise généralement lorsque la situation se ramène à choisir **au hasard** un réel dans un intervalle $[a\,;b\,]$.

**Théorème 1**

Si une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi uniforme sur $[a,b]$ on a :

$$\forall \alpha,\ \beta \in [a\,;b\,],\ P(\alpha \leqslant \mathbb{X} \leqslant \beta) = P([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

**Exemple 3:** À un arrêt de bus, un bus passe toutes les 10 minutes. Un voyageur ignore les horaires et arrive à cet arrêt de bus. Quelle est la probabilité d'attendre le bus exactement 3 minutes ? entre 2 et 4 minutes ? plus de 5 minutes ?

On note $T$ la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en minutes. On suppose que $T$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0\,;10\,])$.

- $P(3 \leqslant T \leqslant 3) = \displaystyle\int_3^3 \frac{1}{10-0}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{10}\right]_3^3 = \frac{3-3}{10} = \frac{0}{10} = 0.$

- $P(2 \leqslant T \leqslant 4) = \int_2^4 \frac{1}{10-0}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{10}\right]_2^4 = \frac{4-2}{10} = \frac{2}{10} = 0,2.$
- $P(T \geqslant 5) = 1 - \mathrm{P}(T < 5) = 1 - \frac{5}{10} = \frac{5}{10} = 0,5.$

3

**Exercice**

**1/** On choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $[0,7]$. Le choix est modélisé par une loi uniforme.

(a) Calculer la probabilité que ce nombre soit dans $[2,5]$.

(b) Calculer la probabilité que ce nombre soit dans $[4,6]$.

(c) Calculer $P_{[2,5]}([4,6])$.

**2/** On choisit un nombre au hasard de $[0,1]$.
Calculer la probabilité que le premier chiffre après la virgule soit impair, sachant que ce nombre est strictement supérieur à $0,7$.

**Proposition 2**

Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{U}([a\,;b])$, l'espérance $E(\mathbb{X})$ et la variance $\sigma(\mathbb{X})$ sont données par :

$$E(\mathbb{X}) = \frac{a+b}{2} \qquad V(\mathbb{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

**Remarque:** $E(\mathbb{X})$ correspond dans ce cas au centre de l'intervalle.

**Preuve:**

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\mathbb{X}) &= \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 \times \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b \\ &= \frac{1}{3(b-a)} \times \left(\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{24(b-a)} \times \left((b-a)^3 - (a-b)^3\right) \\ &= \frac{2}{24(b-a)} \times (b-a)^3 \\ &= \frac{1}{12} \times (b-a)^2 \end{aligned}$$

[ Démonstration page 341 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemple 4:** A notre arrêt de bus précédent, l'attente moyenne de notre voyageur sera donc de :

$$E(T) = \frac{0+10}{2} = 5 \text{ minutes.}$$

L'écart-type $\sigma(T) = \sqrt{\frac{1}{12}} \times (10-0) = 1,67$ minutes, nous informe sur la manière dont les temps d'attente se répartissent autour de la moyenne.

### III.2 Loi exponentielle ou de « durée de vie sans vieillissement »

Dans tout ce qui suit il faudra donner un sens à $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ , donc à un intégrale avec une borne infinie , nous définissons cette intégrale de la manière suivante :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t.$$

.

En conséquence , faites tous vos calculs sur $[0,\mathbb{X}]$ puis ensuite passer à la limite en $+\infty$ sur $X$.

4 **Exercice** Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

Démontrer que la fonction $f_\lambda$ définie par $f_\lambda(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $[0,+\infty[$.

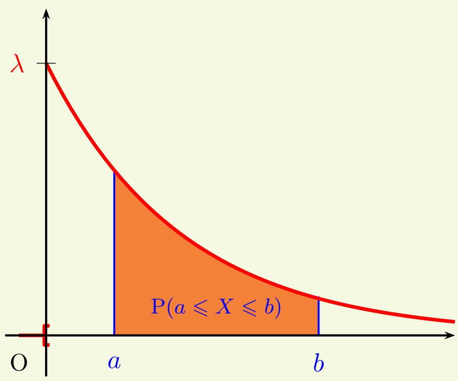
**Définition 7**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit **la loi exponentielle de paramètre** $\lambda$ sur $[0,+\infty[$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction $f_\lambda$ définie par :

$$f_\lambda(t)=\lambda e^{-\lambda t}.$$

On a donc pour $0\leqslant a\leqslant b$ :

$$\begin{aligned}P([a,b]) &= P(a\leqslant \mathbb{X}\leqslant b)\\ &= \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\\ &= e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.\end{aligned}$$




[ Démonstration page 341 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps $t$ ne change rien à son espérance de vie à partir du temps $t$.

Elle permet entre autres de modéliser la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique, de décrire le temps écoulé entre deux moments…

**Proposition 3**

Une variable aléatoire $\mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ si, et seulement si, pour tout $t\geqslant 0$,

$$P(\mathbb{X}\leqslant t)=1-e^{-\lambda t}.$$

**Preuve:** Comme, $\displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathbb{X} \leqslant t) &= P(0 \leqslant \mathbb{X} \leqslant t) && (\mathbb{X} \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

**Exemple 5:** La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire $T$ qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,00005.

- Probabilité que ce composant tombe en panne avant 10 000 heures :

$$P(T < 10000) = P(T \leqslant 10000) = 1 - e^{-0{,}00005\times 10000} = 0,40.$$

- Probabilité que ce composant fonctionne au moins 15 000 heures :

$$P(T \geqslant 15000) = 1 - P(T < 15000) = 1 - (1 - e^{-0{,}00005\times 15000}) = 0,47.$$

- Probabilité que ce composant tombe en panne entre la 10 000ᵉ heure et la 15 000ᵉ heure :

$$P(10000 \leqslant T \leqslant 15000) = P(T \leqslant 15000) - P(T < 10000) = 0,47 - 0,40 = 0,07.$$

**Remarque:** $P(a \leqslant T \leqslant b) = P(T \leqslant b) - P(T < a) = P(T \leqslant b) - P(T \leqslant a)$.

[ Application 2 page 339
Exercices résolus 4 et 5 page 348-349 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Définition 8** (Espérance d'une loi exponentielle)

L'espérance $E(\mathbb{X})$ d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ est donnée par :

$$E(\mathbb{X}) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Proposition 4**

Si $\mathbb{X}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, l'espérance $E(\mathbb{X})$ est :

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{\lambda}.$$

**Preuve:** Rien de bien compliqué avec une intégration par parties mais cet outils a été retiré du programme. . . admis donc !. . . ou pas. Contournons cette absence par une observation :

$$\begin{aligned} \left(tf(t)\right)' &= \left(\lambda t e^{-\lambda t}\right)' = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} - \lambda t f(t). \end{aligned}$$

D'où $$tf(t) = e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\Big(tf(t)\Big)'$$

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{X}) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \left(e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\Big(tf(t)\Big)'\right)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^x \Big(tf(t)\Big)'\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\Big[tf(t)\Big]_0^x \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\lim_{x\to+\infty} xf(x).
\end{aligned}$$

D'après un théorème déjà démontré, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-\lambda x} = 0$.

On obtient donc bien le résultat escompté : $E(\mathbb{X}) = \dfrac{1}{\lambda}$.

**Exemple 6:** On reprend l'**exemple** (5) précédent :

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{0,00005} = 20\,000.$$

On peut donc en conclure que la durée de vie moyenne du composant électronique est de 20 000 heures.

**5**

**Exercice (Quelques résultats remarquables)** On considère $P$ qui suit **la loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$**.

**1/** Pour $t \geqslant 0$ , calculer $P\big([0\,;t\,]\big)$ puis en déduire $P([t\,;+\infty\,[)$.

**2/** Soit $F$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $F(t) = P([0\,;t\,])$.

*$F$ est appelée **fonction de répartition**. Elle donne la probabilité qu'une substance ou un appareil donné ait une durée de vie inférieure ou égale à $t$.*

Vérifier que $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ puis démontrer que pour tout $t$ et $s$ positifs :

$$P_{[t;+\infty[}([t\,;t+s\,]) = F(s).$$

**3/** Pourquoi dit-on de cette loi de durée de vie qu'elle est **sans vieillissement** ?

[ Démonstration page 342
Exercice 104 page 363 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# IV Problèmes de bac

**6**

**Exercice** On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique.

On modélise cette situation par une loi de probabilité $p$ de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ : la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de $t$ semaines est

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\ ;\ 200[) = 0,5$.

**1/** Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

**2/** Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

**3/** On admet que la durée de vie moyenne $d_m$ de ces composants est la limite quand $A$ tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

(a) (Hors-Programme) Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\lambda A\mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

(b) En déduire $d_m$ on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

**7** **Exercice** Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée $\mathbb{X}$ qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre $\lambda$ avec $\lambda > 0$.)

Toutes les probabilités seront données à $10^{-3}$ près.

**1/** Sachant que $p(\mathbb{X} > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\lambda$ est $0,125$.
On prendra $0,125$ pour valeur de $\lambda$ dans la suite de l'exercice.

**2/** Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

**3/** Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

**4/** On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?

**5/** Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

**8** **Exercice** On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité $p$ de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0\,;t\,[$, notée $p([0\,;t\,[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant $t$.

**1/** Pour $t \geqslant 0$, calculer la valeur exacte de $p([t\,;+\infty\,[)$.

**2/** Calculer la valeur de $t$ pour laquelle on a $p([0\,;t\,[) = p([t\,;+\infty\,[)$.

**3/** D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est $0,18$. Calculer la valeur exacte de $\lambda$.

**4/** Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, calculer la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante .

**5/** Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.

(a) Calculer la probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années.

(b) Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.

Donner la loi de $\mathbb{X}$ et calculer $P(\mathbb{X} = 4)$ , puis la probabilité qu'au moins 5 appareils n'aient pas eu de panne au cours des trois premières années.

9

**Exercice** Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut :

- un défaut de soudure avec une probabilité égale à $0,03$
- et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à $0,02$.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

**1/** Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à $0,0494$.

**2/** Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

(a) Définir la loi de $\mathbb{X}$.

(b) Calculer l'espérance mathématique de $\mathbb{X}$. Quel est le sens de ce nombre ?

**3/** Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

(a) Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

(b) Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50%. Déterminer la valeur maximale du nombre $n$ d'articles qu'il peut commander.

**4/** La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre $0,0007$, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 0,000\,7\mathrm{e}^{-0,000\,7x}.$$

Calculer la probabilité, à $10^{-3}$ près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours.

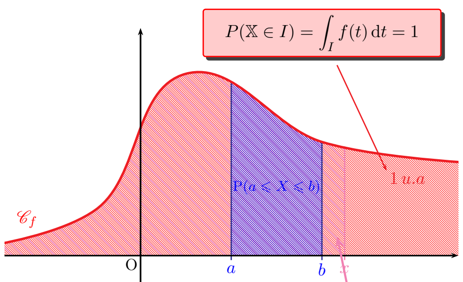
[ Exercice 123 page 367 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Variable aléatoire continue :** $\mathbb{X} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ I \subset \mathbb{R} & & \mathbb{X}(I) \end{array}$

$f$ est une densité de probabilité sur $I$ $\iff$ $\begin{cases} \bullet\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0 \\ \bullet\ f \text{ est } \textbf{continue} \text{ sur } I. \\ \bullet\ \displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1. \end{cases}$

($I$ intervalle de $\mathbb{R}$)

$\mathbb{X}$ suit **une loi de probabilité $P$** de densité $f$ sur $I$ $\iff$ $P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\forall [a\,;b] \subset I$.




$$E(\mathbb{X}) = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$V(\mathbb{X}) = \int_a^b (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Fonction de répartition :**

$$\Phi(x) = P(\mathbb{X} \leqslant x)$$

$$\Longrightarrow\ P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$$P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant a) = P(\{a\}) = 0$$

$$\begin{aligned} P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) &= P(a < \mathbb{X} \leqslant b) \\ &= P(a \leqslant \mathbb{X} < b) \\ &= P(a < \mathbb{X} < b). \end{aligned}$$

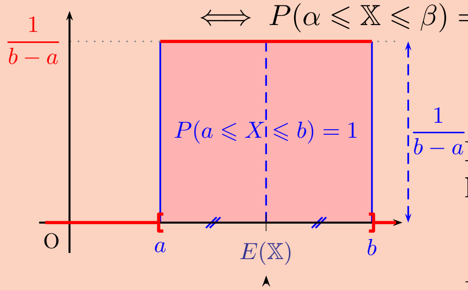
$$P(\overline{a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b}) = 1 - P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b).$$

**Loi uniforme :**

$\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}([a\,;b]) \iff$ sa densité est constante sur $[a, b]$ et égale à $\dfrac{1}{b-a}$.

$\iff P(\alpha \leqslant \mathbb{X} \leqslant \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$

$\forall \alpha, \beta \in [a\,;b]$.



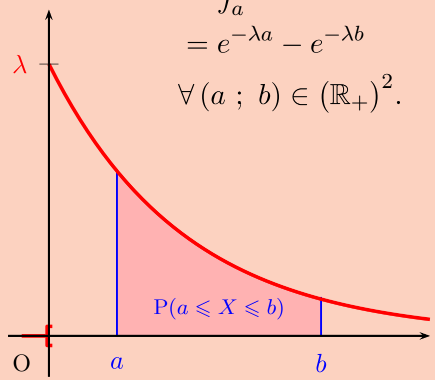

La probabilité ne dépend que de la longueur de l'intervalle.

$$E(\mathbb{X}) = \frac{a+b}{2} \qquad V(\mathbb{X}) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

**Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ :** $P(\mathbb{X} \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

$$\begin{aligned} P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) &= \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \end{aligned}$$

$\forall\,(a\ ;\ b) \in (\mathbb{R}_+)^2$.




$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement :

$$P_{(\mathbb{X} \geqslant t)}(\mathbb{X} \geqslant t + s) = P(\mathbb{X} \geqslant s).$$

En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps $t$ ne change rien à son espérance de vie à partir du temps $t$.

# Intégration (Liban 2014)

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal.

**Partie A**

**1/** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$.
Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

**2/** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

**Partie B**

Soit $\mathcal{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathcal{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

**1/** Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.

**2/** On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathcal{A}$ ?

**3/** On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel $\alpha$ tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

(a) Démontrer que l'équation $\mathcal{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

(b) Sur le graphique fourni en **annexe (*à rendre avec la copie*)** sont tracées la courbe $\mathcal{C}$, ainsi que la courbe $\Gamma$ représentant la fonction $\mathcal{A}$.
Sur le graphique de l'**annexe**, identifier les courbes $\mathcal{C}$ et $\Gamma$, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel $\alpha$. Hachurer le domaine correspondant à $\mathcal{A}(\alpha)$.

**4/** On définit la fonction $g$ sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ par $g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

(a) On note $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$.
Pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0;\ +\infty[$, calculer $g'(x)$.

(b) En déduire, pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0;\ +\infty[$, une expression de $\mathcal{A}(t)$.

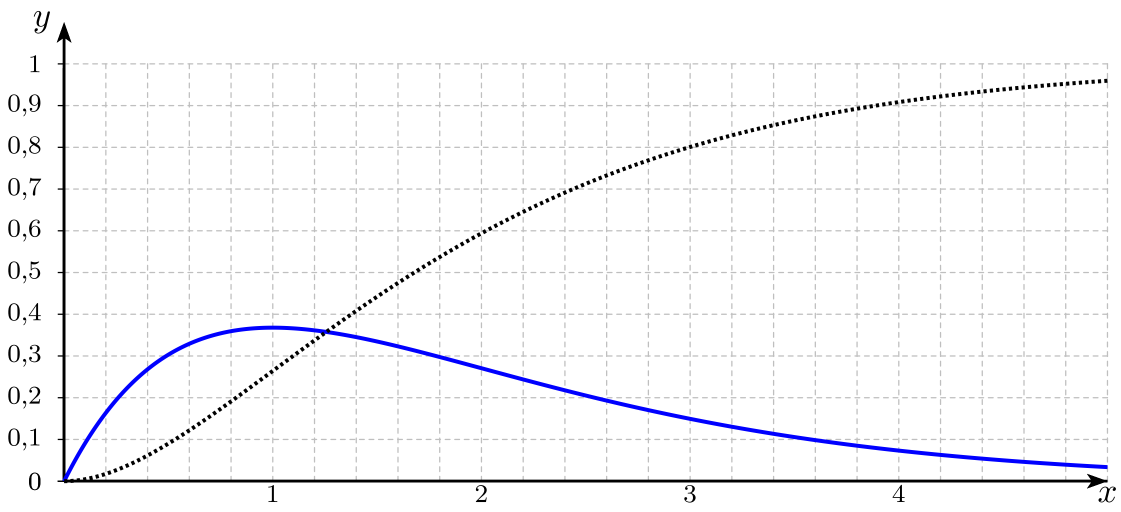
(c) Calculer une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $\mathcal{A}(6)$.

**Annexe 1**

***À rendre avec la copie***

**Exercice 3**

**Représentations graphiques des fonctions $f$ et $\mathcal{A}$**



# Intégration (Sujets de bac)

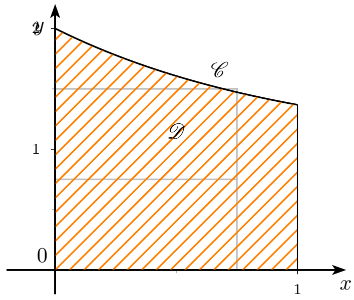
1

**Exercice (Centres étrangers 2013)** On considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0~;~1]$, $g(x) > 0$.

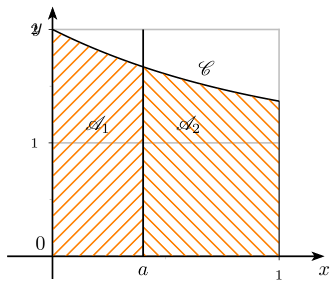
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.




Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

**Partie A**

Soit $a$ un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe $(Ox)$,les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ , puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, $(Ox)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.




**1/** (a) Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$.

(b) Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de $a$.

**2/** Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0~;~1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

(b) Démontrer que la fonction $f$ s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0~;~1]$. en un réel $\alpha$. Donner la valeur de $\alpha$ arrondie au centième.

**3/** En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel $a$ pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

**Partie B**

Soit $b$ un réel positif.

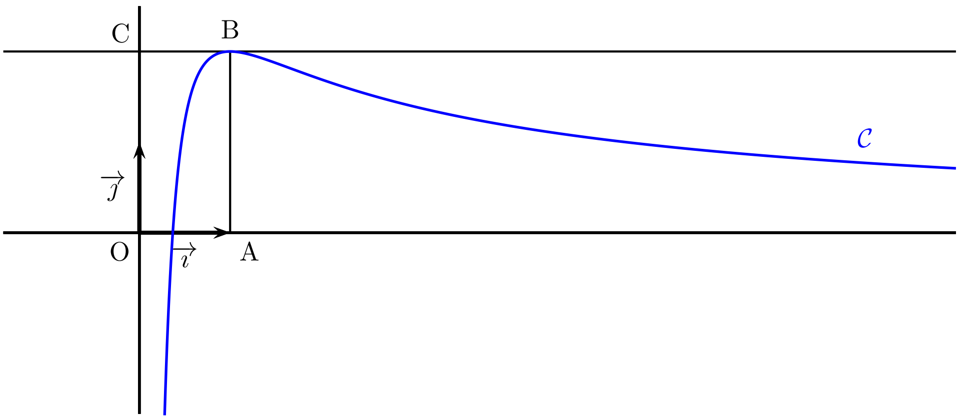
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel $b$ positif solution.

**1/** Justifier l'inégalité $b < 1 + \frac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.

**2/** Déterminer la valeur exacte du réel $b$.

**2**

**Exercice (Métropole juin 2013)** Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.




On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,0)$, $(1\,;\,2)$, $(0\,;\,2)$ ;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs $a$ et $b$ tels que pour tout réel strictement positif $x$,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

**1/** (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

(b) Vérifier que pour tout réel strictement positif $x$, $f'(x) = \frac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

(c) En déduire les réels $a$ et $b$.

**2/** (a) Justifier que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

(b) Déterminer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel $x$ strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2\,\frac{\ln x}{x}$.

(c) En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.

**3/** (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

(b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel $\beta$ de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier $n$ tel que $n < \beta < n+1$.

**4/** On donne l'algorithme ci-dessous.

| | |
|---|---|
| Variables : | $a, b$ et $m$ sont des nombres réels. |
| Initialisation : | Affecter à $a$ la valeur 0. |
| | Affecter à $b$ la valeur 1. |
| Traitement : | Tant que $b - a > 0,1$ |
| | Affecter à $m$ la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$. |
| | Si $f(m) < 1$ alors Affecter à $a$ la valeur $m$. |
| | Sinon Affecter à $b$ la valeur $m$. |
| | Fin de Si. |
| | Fin de Tant que. |
| Sortie : | Afficher $a$. |
| | Afficher $b$. |

(a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

| | étape 1 | étape 2 | étape 3 | étape 4 | étape 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | | | | |
| $b$ | 1 | | | | |
| $b-a$ | | | | | |
| $m$ | | | | | |

(b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

(c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de $\beta$ d'amplitude $10^{-1}$.

**5/** Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

(a) Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Chapitre 13

# Les Nombres Complexes I

Les nombres complexes sont nés d'une longue série de défis et d'une envie : Résoudre n'importe quelle équation polynomiale (*ie*) toute équation de la forme :

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0}, \quad \text{où } a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1 \text{ et } a_0 \text{ dont des réels.}$$

Remontons dans le temps :

- Dans $\mathbb{N}$ l'équation $x+7=6$ n'a pas de solution. On construit alors l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et qui le contient :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$
- Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x=1$ n'a pas de solution. On construit alors l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$ et qui le contient :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$
- Dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2=2$ n'a pas de solution. On construit alors l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Q}$ et qui le contient :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$
- Dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+1=0 \iff x^2=-1$ n'a pas de solution. On construit alors l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes dont l'élément principal ajouté est le nombre $i$ tel que $i^2=-1$ solution de l'équation précédente, compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ et qui le contient :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Démontré au début du XIXe siècle, le théorème de D'Alembert-Gauss énonce :

**Théorème 1** (D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe.

Fin de l'histoire !

Sommaire



# I L'ensemble des nombres complexes

## I.1 Construction de $\mathbb{C}$

**Définition 1**

On appelle ensemble des **nombre complexes**, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres $z$ de la forme :

$$z = a + ib, \qquad \text{avec } (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1.$$

- Le nombre réel $a$ s'appelle la **partie réelle** de $z$ notée $\mathrm{Re}\,(z)$.
- Le nombre réel $b$ s'appelle la **partie imaginaire** de $z$ notée $\mathrm{Im}\,(z)$.
- L'écriture $z = a + ib$ est appelée la **forme algébrique** de $z$.

**Remarques:**

- $\mathrm{Im}\,(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ alors $z$ est dit **imaginaire pur**.

[Application 1 page 233
Application 2 page 239 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Proposition 1**

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.
On peut munir l'ensemble $\mathbb{C}$ de trois opérations :

- L'addition $(+)$ : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.
- La multiplication $(\times)$ : $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.
- La loi externe (ou multiplication par une constante) : $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$.

Munis de ces trois lois, l'ensemble $\mathbb{C}$ est alors une $\mathbb{C}$-algèbre qui contient $\mathbb{R}$ et dont les opérations prolongent celles de ce dernier.

Globalement, comprenez que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, que les opérations possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$ à la différence près que l'on remplacera $i^2$ par $-1$ et que l'on regroupera les réels et les réels facteurs de $i$ pour obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

**Exemples 1:**

- $z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i$.
- $z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i$.
- $z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i + (3i)^2 = 7 - 24i$.

1

**Exercice** Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous la forme algébrique les nombres suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1/** $z + z'$ | ***Rep :*** $-3 + 4i$ | **4/** $zz'$ | ***Rep :*** $-13 - 13i$ |
| **2/** $z - z'$ | ***Rep :*** $7 + 2i$ | **5/** $z^2$ | ***Rep :*** $-5 + 12i$ |
| **3/** $2z - 3z'$ | ***Rep :*** $19 + 3i$ | | |

[ Application 1 page 235 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

Et d'une manière générale :

**Proposition 2** (Identités remarquables dans $\mathbb{C}$)

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- $(a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2$.
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2abi - b^2$.
- $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$.

**Preuve:** Seules, les dernières égalités sont nouvelles :

$$(a \pm ib)^2 = a^2 \pm 2abi + (ib)^2 = a^2 \pm 2abi - b^2,$$

et

$$(a - ib)(a + ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

Vous pourrez enfin factoriser [1] une somme de deux carrés.

**Théorème 11** (ℂ est un corps)

- Un nombre complexe est nul si, et seulement si sa partie réelle **et** imaginaire sont nulles.

$$\underset{(=a+ib)}{z = 0} \iff a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

  En particulier, deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si leur parties réelle et imaginaire sont égales.

- Tout nombre complexe $z = a + ib$ non nul admet un inverse pour la multiplication noté $\dfrac{1}{z}$ et tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

**Preuve:** Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- Si $a = b = 0$, il est clair que $z = 0$.

  Réciproquement, si $a + ib = 0$ alors $a = -ib$, égalité entre un réel et un imaginaire pur qui n'est vraie que si $a = b = 0$.

- D'après l'assertion précédente, $z \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$ puisque $a$ et $b$ ne peuvent être nuls ensemble. Il suffit alors de calculer :

$$\begin{aligned}(a + ib) \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}\right) &= \frac{1}{a^2 + b^2} \times \left(a^2 - \cancel{iab} + \cancel{iab} - i^2b^2\right)\\ &= \frac{1}{\cancel{a^2 + b^2}} \times \cancel{(a^2 + b^2)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

  On verra une forme plus agréable un peu plus loin.

[ Démonstration page 246 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

On dit alors que ℂ est une *extension algébrique* de ℝ que vous verrez plus tard comme étant $\mathbb{R}[i]$.

**Exemple 2:**

1. Dans ℂ !

**1/** Trouver la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{2-i}{3+2i}$.

L'idée est de faire disparaître les nombres imaginaires du dénominateur. On utilise la même idée qu'avec les « $\sqrt{}$ » sachant que $i^2 = -1$.

D'après la **proposition** (2), $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par $3 - 2i$ [2] :

$$z = \frac{(2-i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - i\frac{7}{13}.$$

**2/** Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z = (2-i)z + 3$.

$$\begin{aligned} z &= (2-i)z + 3 \\ z - (2-i)z &= 3 \\ z(1-2+i) &= 3 \\ z &= \frac{3}{-1+i} = -\frac{3}{1-i}. \end{aligned}$$

On préférera donner la solution sous sa forme algébrique :

$$z = -\frac{3}{1-i} = -\frac{3(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{3}{2} - i\frac{3}{2}.$$

Donc $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{2} - i\frac{3}{2}\right\}$.

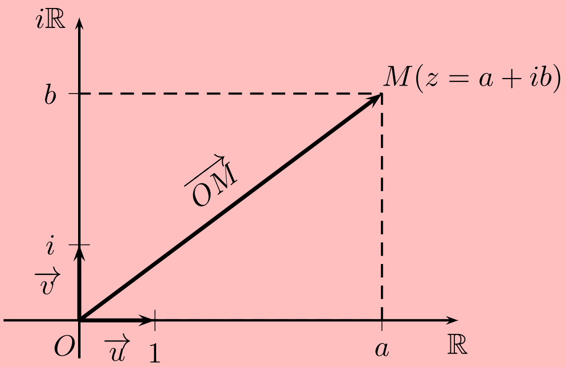
**2** **Exercice** Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2iz - 1 - i = z + 2i$. ***Rep :*** $z = 1 - i$.

Applications 2 et 3 page 233
Applications 2 et 3 page 235
, **Maths Repère**, *Hachette*

## I.2 Représentation des nombres complexes

**Théorème III**

- À tout nombre $z = a+ib$ on peut faire correspondre, de manière unique, un point $M\,(a\ ;\ b)$ d'un plan orthonormal $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$.
- Réciproquement, tout point $M(a,b)$ d'un plan orthonormal $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + ib$.




Le nombre $z$ est alors appelé l'**affixe** du point $M$ ou encore du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le plan $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ est alors appelé **plan complexe**.

2. Appelée plus tard « partie conjuguée » de $3 + 2i$. Vous verrez pourquoi.

Le côté bijectif de cette représentation vient du **théorème** (II). En effet, deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si leur partie réelle et imaginaire sont égales.

**Remarques:** L'axe des abscisses est alors naturellement appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées celui des imaginaire purs.

**Exemple 3:** Placer dans le plan complexe les points $M_i$ d'affixes $z_i$ :

**1/** $z_1 = 2 + 3i$

**2/** $z_2 = 3 + i$

**3/** $z_3 = -1 + 2i$

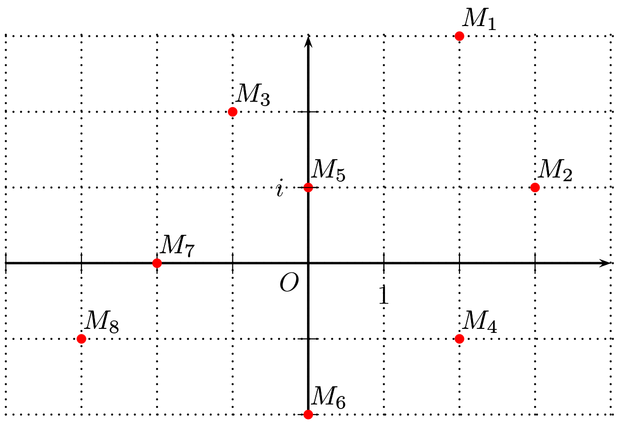
**4/** $z_4 = 2 - i$

**5/** $z_5 = i$

**6/** $z_6 = -2i$

**7/** $z_7 = -2$

**8/** $z_8 = -i - 3$




**3** **Exercice** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des point $M$ dont l'affixe $z$ vérifie l'égalité proposée :

- $\text{Re}(z) = -2$,
- $\text{Im}(z) = 1$.

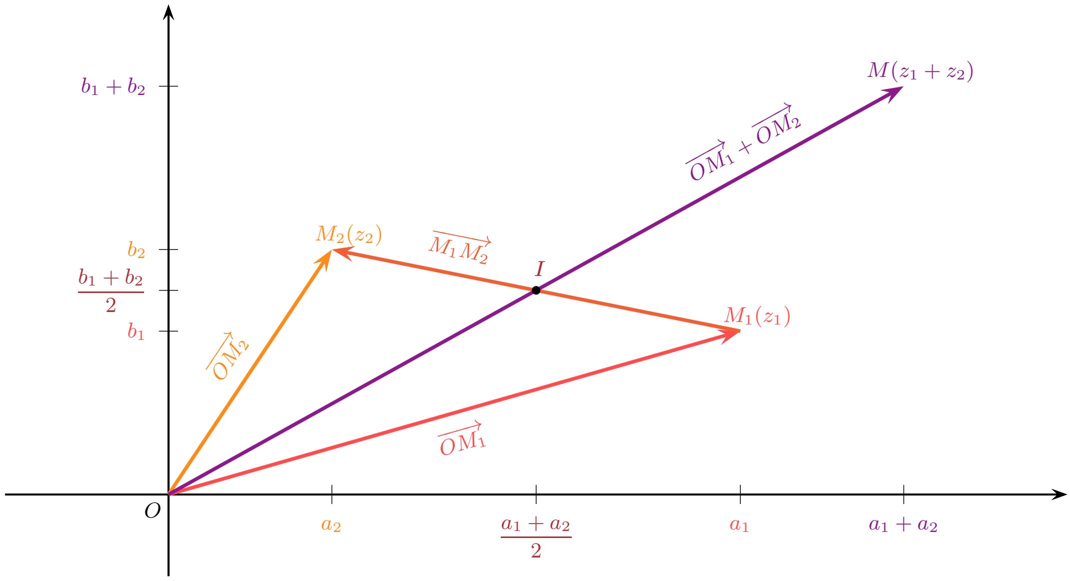
[ Exercice 142 page 267 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Proposition 3**

Soient $M_1$ et $M_2$ deux points du plan complexe d'affixes respectives $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

- Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour affixe $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1)$
- $||\overrightarrow{OM_1}|| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$
- $||\overrightarrow{M_1M_2}|| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$
- Le milieu $I$ de $[M_1M_2]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

**Preuve:** $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$. Le reste en découle simplement...




[ Application 1 page 239
Démonstration page 247 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice 125 page 265 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

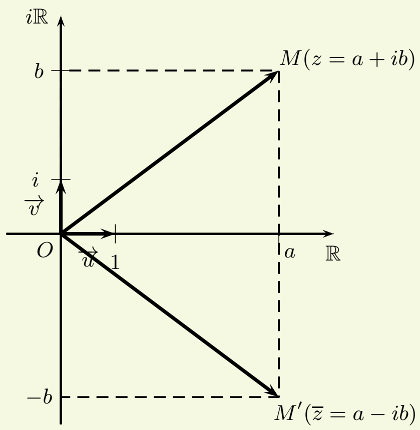
# II De la forme trigonométrique

## II.1 Conjugué d'un nombre complexe

**Définition 2**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $M(z)$ un point du plan complexe $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ d'affixe $z$.

- On appelle **conjugué** de $z$, noté $\overline{z}$, le nombre $z = a - ib$.




- Le point $M'$ d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe des abscisses.

4 **Exercice** Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$, calculer :

**1/** $z + z'$ ***Rep :*** $1 + 8i$

$z \times z'$ ***Rep :*** $-21 - i$

**2/** $\overline{z}$ ***Rep :*** $3 - 5i$

$\overline{z'}$ ***Rep :*** $-2 - 3i$

**3/** $\overline{z} + \overline{z'}$ ***Rep :*** $1 - 8i$

$\overline{z + z'}$

**4/** $\overline{z} \times \overline{z'}$ ***Rep :*** $-21 + i$

$\overline{z \times z'}$

**Théorème IV** (Fondamental)

Soit $z$ un nombre complexe, alors :

- $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.
- $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.
- $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

**Preuve:** On a $z + \overline{z} = a + \cancel{ib} + a - \cancel{ib} = 2a = 2\mathrm{Re}\,(z)$ et $z - \overline{z} = \cancel{a} + ib - \cancel{a} + ib = 2ib = 2i\mathrm{Im}\,(z)$.
Le reste est trivial. Par exemple :

$$z = \overline{z} \iff \mathrm{Re}\,(z) = z \iff z \in \mathbb{R}.$$

Enfin, si $z = a + ib$ sous sa forme algébrique, alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$. On verra une forme plus agréable un peu plus loin.

On retiendra qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si il est égal à son conjugué ou encore si, et seulement si le point d'affixe $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses.

5 **Exercice** Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

**1/** $(1 + i)\overline{z} - 2i = 0$ ***Rep :*** $z = -1 + i$.

**2/** $(1 + i)\overline{z} + 2iz = 1 - i$ ***Rep :*** $z = -1 - 2i$.

[ Application 4 page 235 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Proposition 4** (Propriétés du conjugué)

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes, alors :

**1/** $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

**2/** $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

**3/** $\overline{\overline{z}} = z$

**4/** $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

**5/** $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n.}$

[ Démonstration page 247 , **Maths Repère**, *Hachette*]

Remarquez, une fois n'est pas coutume, que l'opération « passer au conjugué » est compatible avec l'addition **et** la multiplication. Fait exceptionnel !

**Preuve:** Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes écrits sous leur forme algébrique.

**1/** La première assertion est triviale.

**2/** Calculons et comparons :

$$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

et

$$\overline{z \times z'} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = aa' - bb' - i(ab' + a'b).$$

Donc $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

**3/** Easy.

**4/** Modifions tout d'abord l'expression de $\dfrac{1}{z}$ :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{a^2+b^2} \times (a - ib).$$

De la même manière $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{a^2+b^2} \times (a+ib)$.

Comme $\dfrac{1}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$, il est alors clair que
$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\frac{1}{a^2+b^2} \times (a-ib)} = \frac{1}{a^2+b^2} \times \overline{(a-ib)}.\\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \times (a+ib) = \frac{1}{\overline{z}}\end{aligned}$$

**5/** $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \dfrac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

6

**Exercice** Dans le plan complexe, $M$ est point d'affixe $z = x + iy$, $x$ et $y$ réels. À tout complexe $z$, $z \neq 1$, on associe : $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$.

**1/** Exprimer $Z+\overline{Z}$ en fonction de $z$ et $\overline{z}$.

***Rep :*** $Z+\overline{Z}=\dfrac{10z\overline{z}-7(z+\overline{z})+4}{(z-1)(\overline{z}-1)}$.

**2/** En déduire que $Z$ est un imaginaire pur si, et seulement si $M$ est un point d'un cercle privé d'un point.

***Rep :*** $\left(x-\dfrac{7}{10}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$.

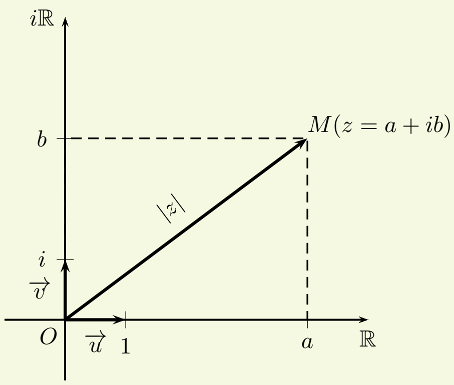
## II.2 Module d'un nombre complexe

**Définition 3**

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe et $M(z)$ un point du plan complexe $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ d'affixe $z$.

On appelle **module** de $z$, noté $|z|$, la distance $OM$ (*ie*) le réel positif tel que :

$$|z|=\left\|\overrightarrow{OM}\right\| \\ =\sqrt{a^2+b^2}.$$




**Remarque:** Si $a$ est un réel, $|a|=\sqrt{a\ \overline{a}}=\sqrt{aa}=\sqrt{a^2}$ car $\overline{a}=a$. La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

**7** **Exercice** Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

**1/** $|3+4i|$ ***Rep :*** $5$

**2/** $|1-i|$ ***Rep :*** $\sqrt{2}$

**3/** $|-5-2i|$ ***Rep :*** $\sqrt{29}$

**4/** $|-5|$ ***Rep :*** $5$

**5/** $|9i|$ ***Rep :*** $9$

**Proposition 5**

Soient $z = a + ib$ et $z'$ deux nombres complexes.

- $$z\overline{z} = |z|^2 \quad . \\ = a^2 + b^2.$$

  En particulier, si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

- $|z| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0$

- $|-z| = |\overline{z}| = |z|$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, avec $z \neq 0$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, avec $z' \neq 0$.

En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{|z^n| = |z|^n.}$

**Preuve:**

- Il suffit de calculer : $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

  La forme de $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ est tout de même plus sympathique que celle du **théorème** (II) !

- $|z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0$.

  Observez surtout que l'on a une équivalence entre un zéro complexe ($z = 0_{\mathbb{C}}$) et un zéro réel ($|z| = 0_{\mathbb{R}}$) !

- $a^2 + b^2 = |-z| = |\overline{z}| = |z|$

- $|z \times z'|^2 = (zz') \times \overline{(zz')} = z \times z'\overline{z} \times \overline{z'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$.

  Comme les nombres ci-dessus sont des réels positifs, l'égalité précédente est équivalente à $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

- Enfin, on utilise la **proposition** (4) :

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^2.$$

  On en déduit de même que $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

**Méthode 1** (Forme algébrique d'un quotient)

Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient de nombres complexes, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de ce dernier appelée « partie conjuguée ».

8

**Exercice** Écrire les nombres suivants sous leur forme algébrique :

1/ $\dfrac{1}{1+i}$ **Rep :** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

2/ $\dfrac{1}{2-3i}$ **Rep :** $\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i$.

3/ $\dfrac{1}{-3+i}$ **Rep :** $-\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{10}i$.

4/ $\dfrac{2}{i}$ **Rep :** $-2i$.

5/ $\dfrac{2+i}{-3+i}$ **Rep :** $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

9

**Exercice** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des point $M$ dont l'affixe $z$ vérifie l'égalité proposée.

- $|z|=3$.
- $|z-i|=1$.
- $|z-1+i|=|z-i|$.

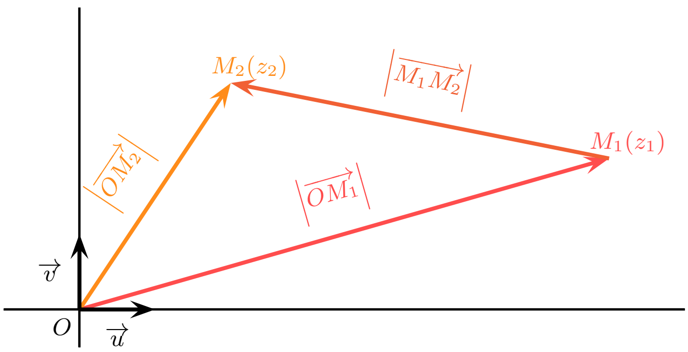
[ Exercice résolu 2 (question 1) page 251 , **Maths Repère**, *Hachette*]

D'un point de vue géométrique, la **proposition** (3) se réécrit :

**Proposition 6** (Norme d'un vecteur)

Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

- $||\overrightarrow{OM_1}||=|z_1|$.
- $||\overrightarrow{M_1M_2}||=|z_2-z_1|$.




**ATTENTION** Si le conjugué se comporte bien avec l'addition, il n'en est rien avec le module qui est d'une nature multiplicative.

Comme en sixième, on retrouve seulement l'**inégalité dite triangulaire** :

$$|z_2-z_1|\leqslant|z_2|+|z_1|.$$

Dans le triangle $OM_1M_2$, la longueur du côté $M_1M_2$ est inférieure à la somme des deux autres $OM_1$ et $OM_2$.

[ Exercices 109 et 110 page 264 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## II.3 Argument d'un nombre complexe

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, la donnée de deux réels $a$ et $b$ permet de définir un unique point $M$ de coordonnées $(a\ ;\ b)$.

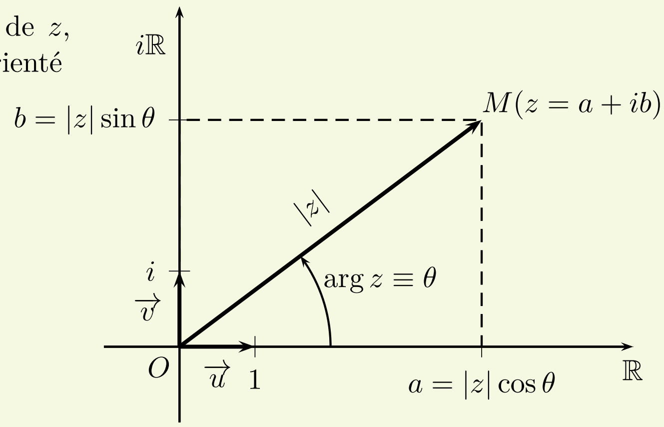
On peut tout aussi bien définir cet unique point par la donnée d'un réel positif $r$, la distance $OM$, et d'un angle $\theta = \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.

**Définition 4** (Forme trigonométrique)

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et $M(z)$ un point du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'affixe $z$.

Pour $z \neq 0$, on appelle **argument** de $z$, noté $\arg z$, toute mesure de l'angle orienté

$$\theta \equiv \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi].$$




En particulier, on a :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$

Tout nombre complexe non nul $z$ peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{où} \quad \begin{cases} r = |z| \in \mathbb{R}_+^* \\ \theta \equiv \arg z\ [2\pi]. \end{cases}$$

Cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de $z$.

Un nombre complexe non nul a une infinité d'argument, si $\theta$ est un argument de $z$ alors $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de $z$.

**ATTENTION** Le réel $r$ correspond au module, on verra donc toujours bien attention à ce qu'il soit un nombre réel **positif**.

**Exemple 4:** Trouver un argument des nombres complexes $z_i$ suivants :

**1/** $z_1 = -2 + 2i$ : $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{2}{|-2+2i|} = -\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{|2+2i|} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \theta \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi].$

Donc $\arg(-2 + 2i) = \dfrac{3\pi}{4}$.

**2/** $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{|1 - i\sqrt{3}|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{|1 - i\sqrt{3}|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi].$

Donc $\arg\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Connaissant la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc obtenir son module et son argument à partir de ses parties réelles et imaginaires.

On obtiendra alors une mesure exacte de $\theta$ si $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des valeurs connues comme $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, .... Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

10 **Exercice** Déterminer le module et **un** argument des nombres complexes suivants :

- $z_1 = 1 + i$,
- $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$,
- $z_3 = -4 + 3i$.

[ Application 1 page 241 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemples 5:**

- Quelle est la forme trigonométrique de $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ?

  **1/** Tout d'abord, on calcule $|z_1| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$

  **2/** Puis, on factorise l'expression de $z_1$ par $|z_1|$ :
$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

  **3/** On cherche, sur le cercle trigonométrique quel est l'angle qui a pour cosinus $\frac{1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est $\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

  D'où $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

- Quelle est la forme algébrique de $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ ?

  Il suffit de développer :
$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

  Donc $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$.

**Méthode 2** (Trouver la forme trigonométrique d'un nombre complexe)

Pour mettre un nombre complexe sous sa forme trigonométrique, on calcule tout d'abord le module puis on reconnaît la valeur de l'argument en cherchant dans son tableau de correspondance « sin / cos $\longleftrightarrow$ radian ».

[ Application 2 page 241 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemple 6:** Déterminer la forme trigonométrique des nombres suivants :

- $z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1-i| &= \sqrt{2} \\ \cos\theta &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

  D'où $r = \sqrt{2}$, $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$
  $= \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right].$

- $z_2 = -\sqrt{3} + i : \begin{cases} \left|-\sqrt{3}+i\right| &= 2 \\ \cos\theta &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$

  D'où $r = 2$, $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{6}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$
  $= 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right].$

**Remarque:** Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se « voit » :

- $1 = \cos 0 + i\sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$
- $i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

Avant d'aller plus avant, un théorème simple mais qui sera d'importance en géométrie :

**Théorème V**

Soit $z$ un nombre complexe non nul.

- $\arg z \equiv 0\ [\pi] \iff z \in \mathbb{R}.$
- $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}.$

[ Exercice résolu 4 pages 254-255 , **Maths Repère**, *Hachette*]

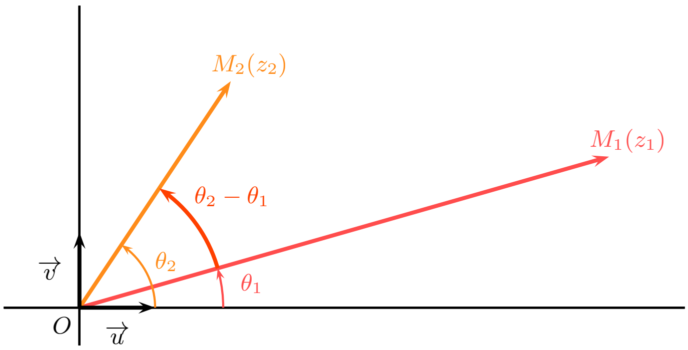
Complétons enfin la **proposition** (3) et la **proposition** (6) :

**Proposition 7** (Angle de deux vecteurs)

Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

- $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right) \equiv \arg z_1\ [2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{M_1M_2}\right) \equiv \arg\left(z_2 - z_1\right)\ [2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right) \equiv \arg \dfrac{z_2}{z_1}$
  $\equiv \arg z_2 - \arg z_1.\ [2\pi]$

**Preuve:**




$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right) - \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right)\\ &\equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \arg \frac{z_2}{z_1}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Enfin, pour la dernière assertion, il existe un unique point $M$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (*ie*) $z_M = z_2 - z_1$. On applique alors les résultats précédents :

$$\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{M_1M_2}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) \equiv \arg\left(z_2 - z_1\right)\ [2\pi].$$

**Corollaire 1**

Dans le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ deux à deux distincts et d'affixes respectivement $z_A$, $z_B$,$z_C$ et $z_D$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi].$$

**Preuve:** La démonstration est identique à la précédente :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)\\ &\equiv \arg\left(z_D - z_C\right) - \arg\left(z_B - z_A\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi].\end{aligned}$$

[ Application 2 page 243
Démonstration page 248
Exercice résolu 2 (question 2) page 251 , **Maths Repère**, *Hachette*
Exercice 90 page 262
Exercice 209 page 275 ]

[ Exercice 144 page 268 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## III Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

**Théorème VI**

Soit l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, $b$ et $c$ des réels.
Cette équation admet toujours des solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Avec $\Delta = b^2 - 4ac$, on a :

- Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes **conjuguées** $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

**Preuve:** La démonstration est identique à celle de première si ce n'est que l'on n'est plus gêné par la cas où le discriminant est négatif.

La forme canonique s'écrit :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- Pour les deux premiers cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$ ont retrouve les cas vus en première.
- si $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$ d'où $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$.
  On factorise à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned}\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\\ &= \left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).\end{aligned}$$

On en déduit les deux solutions de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ dans ce cas.

**Exemple 7:** Soit l'équation $z^2 - z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$.

Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Et, on, la forme factorisée :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

[ Application 1 page 237 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**11**

**Exercice** Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0. \tag{E}$$

**1/** Montrer que $i$ est solution de l'équation.

**2/** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c).$$

***Rep :*** $(z-i)(z^2 - 4z + 13)$.

**3/** Résoudre alors l'équation (E).

***Rep :*** $\mathscr{S} = \{i;\, 2-3i;\, 2+3i\}$.

[ Application page 237
Exercice résolu 6 page 257
Exercices 83 et 84 pages 261-262 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

[ Exercice 216 page 277
Exercice III page 279 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# Géométrie - Probabilités

**1**

**Exercice (Polynésie 2014)** Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points :

$$\mathrm{A}(5\ ;\ -5\ ;\ 2), \mathrm{B}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0), \mathrm{C}(0\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et } \mathrm{D}(6\ ;\ 6\ ;\ -1).$$

**1/** Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

**2/** (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD).

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

**3/** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

**4/** Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

**5/** Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

**6/** On admet que $\mathrm{AB} = \sqrt{76}$ et $\mathrm{AC} = \sqrt{61}$.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

**2**

**Exercice (Antilles-Guyane septembre 2014)** Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que :

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note :

- $N$ l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- $A$ l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

**Partie A**

**1/** Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.

**2/** Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est $0,8763$.

**3/** Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

**Partie B**

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage,...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée $D$, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

**1/** On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.

Calculer la valeur exacte de $\lambda$.

**2/** On prendra ici $\lambda = 0,1733$.

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Chapitre

14

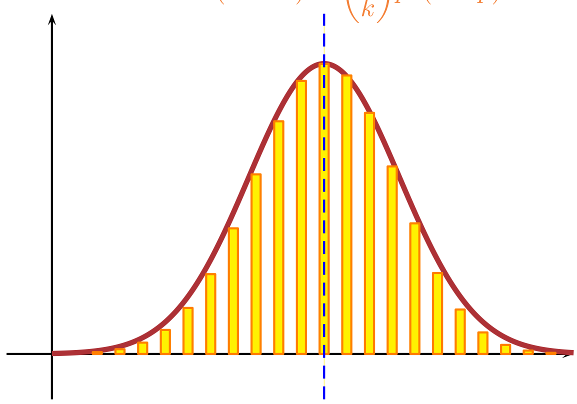
# Loi normale

De l'intérêt d'une loi continue :

**Rappels 1** (Loi de Bernoulli et loi binomiale)

Lorsqu'on répète $n$ fois, de façon indépendante, une même expérience aléatoire suivant une loi de **Bernoulli** donnant lieu à deux issues appelés « succès » de probabilité $p$ et « échec » de probabilité $1-p$, la variable aléatoire $\mathbb{X}$ qui, à cette série de $n$ expériences, associe le nombre de succès, suit la loi **binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n$ et $p$.
Son espérance est $E(\mathbb{X}) = np$ et son écart-type $\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{np(1-p)}$.

Si l'on trace le diagramme en bâtons de la loi de probabilité d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ il apparaît, lorsque $n$ devient « grand » et que $p$ n'est pas trop « petit » que l'enveloppe des probabilités épouse une courbe qui ferait un bon candidat pour une densité de probabilité.
Les calculs, à l'aide d'une intégrale, seraient alors grandement simplifiés.




Posant $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, des mathématiciens du nom de Moivre, Gauss et Laplace [1] furent les premiers à proposer la fonction $f_{\mu,\sigma}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

comme densité de probabilité. La loi normale était née !

1. entre autres.

## Sommaire



# I La Loi normale

## I.1 Généralités

**Définition 1**

Soient $\mu$ et $\sigma$ deux réels tels que $\sigma > 0$.
On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la **loi normale** de paramètre $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\sigma}$, si pour tous réels $a$ et $b$, on a :

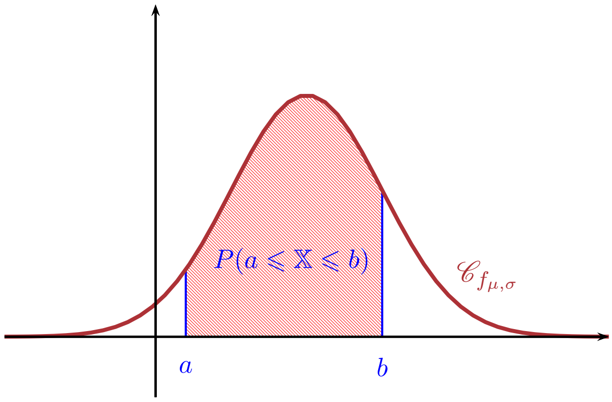
$$P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) = \int_a^b f_{\mu,\sigma}(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad f_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On note alors $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ [2].

[3]

La fonction $f_{\mu,\sigma}$ est appelée **densité de la loi normale de paramètre** $\mu$ **et** $\sigma$ ou encore densité de Laplace-Gauss.

3. Cette notation est plutôt réservée à la terminale, ensuite, on la note plutôt $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma)$. De là, à savoir pourquoi ?...




Avant d'aller plus loin, étudions donc cette fonction $f_{\mu,\sigma}$ :

## I.2 Fonction de Gauss

Soient $\mu$ et $\sigma$ deux réels tels que $\sigma > 0$ et $f_{\mu,\sigma}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

Alors :

**1/** $f_{\mu,\sigma}$ est clairement définie sur $\mathbb{R}$.

En posant $u = -\dfrac{1}{2}(\dfrac{x-\mu}{\sigma})^2 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$, on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_{\mu,\sigma} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0.$$

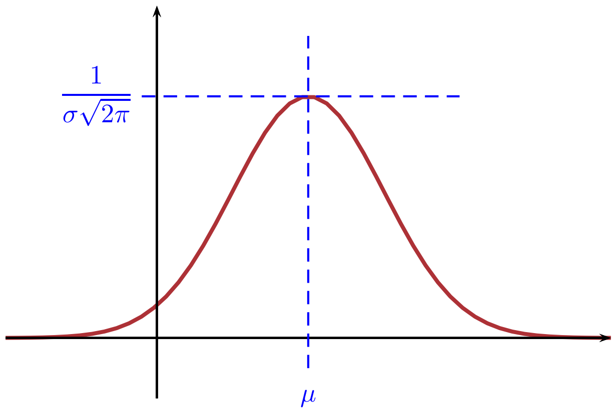
L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe en $\pm\infty$.

**2/** $f_{\mu,\sigma}$ est une composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'_{\mu,\sigma}(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

$f'_{\mu,\sigma}(x)$ est donc du signe de $\mu - x$ sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations et la courbe représentative :

| $x$ | $-\infty$ | | $\mu$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_{\mu,\sigma}(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_{\mu,\sigma}$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ | $\searrow$ | $0$ |

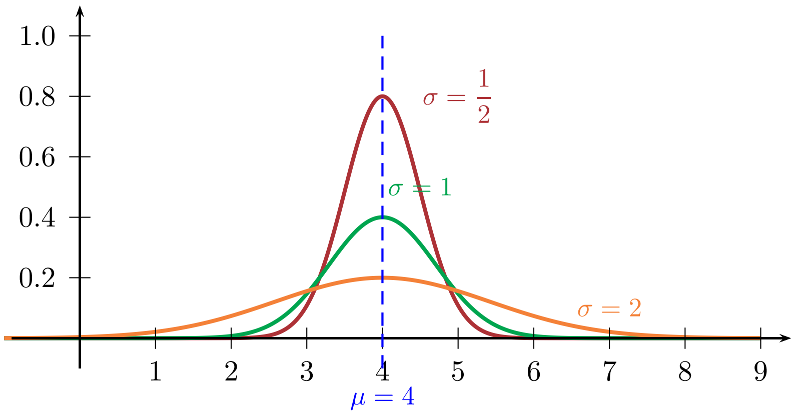


**3/** En particulier, $f_{\mu,\sigma}$ admet un maximum égal à $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ atteint pour $x=\mu$.

**4/** La courbe représentative de $f_{\mu,\sigma}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$.

En effet $f_{\mu,\sigma}(2\mu-x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\mu-x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)^2} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = f_{\mu,\sigma}(x)$.[4]

Cette courbe est connue sous le nom de « gaussienne » ou, du fait de sa forme caractéristique, de « courbe en cloche ».




**Remarque:** On remarquera que plus $\sigma$ est grand, plus le maximum est petit et la courbe s'étale autour de $\mu$.

**5/** En particulier, $f_{\mu,\sigma}$, continue et positive sur $\mathbb{R}$, définit une densité de probabilité.

On admettra que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_{\mu,\sigma}(t)\,dt = 1$. Intégrale que vous calculerez sûrement maintes fois dans les prochaines années par différentes méthodes pas encore à notre disposition.

**Remarque:** La fonction $f_{\mu,\sigma}$ n'admet pas de primitives s'exprimant à l'aide de fonctions élémentaires.

Lorsque $\sigma = 1$ et $\mu = 0$, la fonction définie par $f_{0,1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Rappels 2** (Influence d'une combinaison affine)

Soient $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire et $a$ et $b$ deux réels donnés. Alors :

- $E(a\mathbb{X}+b) = aE(\mathbb{X})+b$.
- $V(a\mathbb{X}+b) = a^2V(\mathbb{X})$.
- $\sigma(a\mathbb{X}+b) = |a|\,\sigma(\mathbb{X})$.

## Quelques commentaires :

- Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire donnée, d'espérance $E(\mathbb{X})=\mu$. Alors la variable aléatoire définie par $\mathbb{X}-\mu$, a une espérance nulle $E(\mathbb{X}-\mu)=E(\mathbb{X})-\mu=0$.

  On dit que $\mathbb{X}-\mu$ est la variable aléatoire **centrée** associée à $\mathbb{X}$.

4. *cf.* les cours de seconde.

- D'autre part, si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire donnée, de variance $V(\mathbb{X}) = \sigma^2$, alors la variable aléatoire définie par $\dfrac{\mathbb{X}}{\sigma}$ a une variance $V\left(\dfrac{\mathbb{X}}{\sigma}\right) = \dfrac{V(\mathbb{X})}{\sigma^2} = 1$.

  On dit que $\dfrac{\mathbb{X}}{\sigma}$ est la variable aléatoire **réduite** associée à $\mathbb{X}$.

Fort de ces commentaires, une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ donnée, germe alors l'idée de considérer la variable aléatoire $\dfrac{\mathbb{X}-\mu}{\sigma}$ réduite et centrée (en 0) pour calculer nos probabilités quitte à se ramener ensuite à celles définies par $\mathbb{X}$.

On parle alors de **Loi normale centrée réduite**... Beaucoup plus simple à étudier.

# II Loi normale centrée réduite

## II.1 Fonction de répartition et probabilités

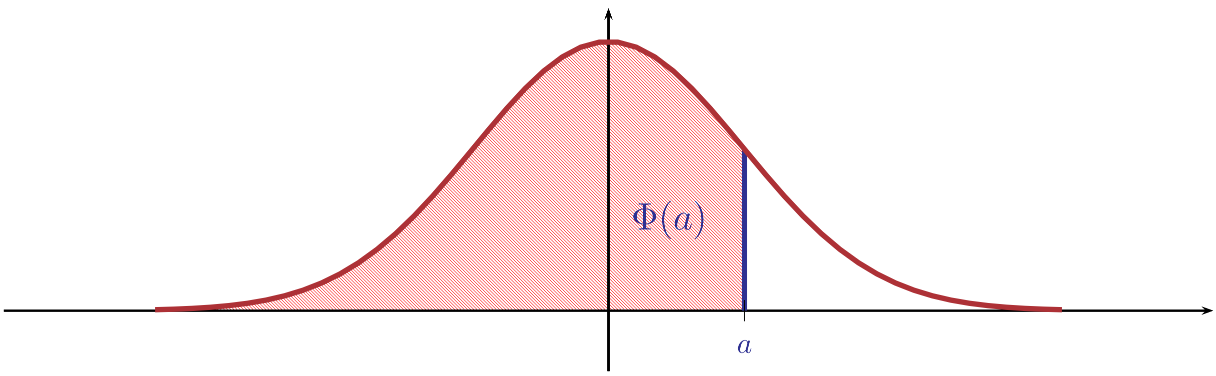
**Définition 2**

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité de probabilité est égale à la fonction $f_{0,1}$.
Sa fonction de répartition $\Phi$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = P(\mathbb{X} \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est à prendre avec les conventions d'usage en terminale :

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$




**Quelques commentaires :**

- Le nombre $\Phi(a)$ représente, par définition, l'aire du domaine délimité par la courbe de $f_{0,1}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$.

- Comme la fonction $f_{0,1}$ est paire, on a alors :

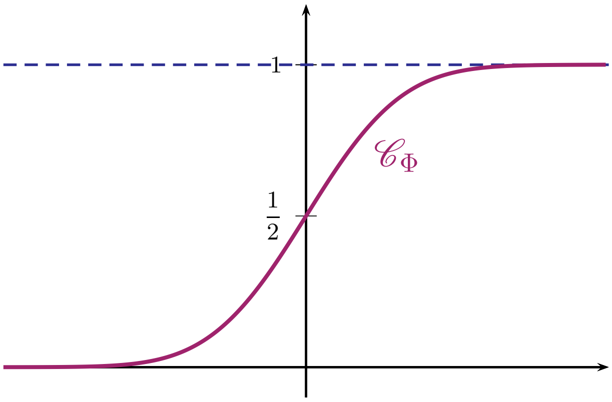
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

La fonction $\Phi$ est donc la primitive de $f_{0,1}$ qui vérifie $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

- Par définition, $\Phi'(x) = f_{0,1}(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0$. La fonction $\Phi$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1$, on obtient le tableau de variation ci-dessous et la courbe représentative.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_{0,1}(x)$ | | $+$ | |
| $\Phi$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |




### II.2 Calcul de probabilités

**Théorème 1**

Si une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi normale centrée réduite alors pour tous réels $a$ et $b$ tels que $a \leqslant b$, on a :

$$P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$
$$P(\mathbb{X} \geqslant a) = 1 - \Phi(a)$$

Et, pour tout réel $a$ positif : $P(\mathbb{X} \leqslant -a) = 1 - \Phi(a)$.

**Remarque:** La dernière assertion peut aussi s'écrire $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ (*ie*) la courbe $\mathscr{C}_\Phi$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

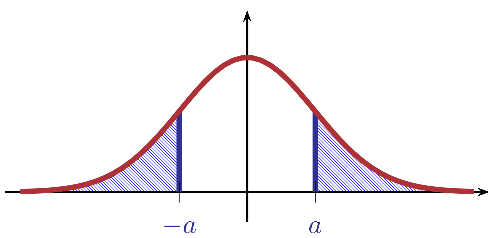
**Preuve:** Tout découle de la **définition** (2) et de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\Phi(b) - \Phi(a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{a}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b).
\end{aligned}$$

Ensuite, $P(\mathbb{X} \geqslant a) = P\left(\overline{\mathbb{X} < a}\right) = 1 - P(\mathbb{X} \leqslant a) = 1 - \Phi(a)$.

Et enfin, par symétrie de la courbe :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-a} f_{0,1}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{a}^{+\infty} f_{0,1}(t)\,\mathrm{d}t \\
P(\mathbb{X} \leqslant -a) &= P(\mathbb{X} \geqslant a) \\
P(\mathbb{X} \leqslant -a) &= 1 - \Phi(a).
\end{aligned}$$



**Méthode 1** (Avec la calculatrice)

Les syntaxes, avec les calculatrices sont les suivantes :

**Casio 35 :** $P(a \leqslant X \leqslant b) = \texttt{NormCD}(a, b, \sigma, \mu)$.

**TI 82 :** $P(a \leqslant X \leqslant b) = \texttt{normalFrep}(a, b, \mu, \sigma)$

Lorsqu'on voudra calculer des probabilités du genre $P(X \leqslant a)$ ou $P(X \geqslant a)$, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ tendant très rapidement vers 0 en $\pm\infty$, on pourra utiliser la syntaxe précédente en prenant, pour les bornes « disparues », des valeurs très grandes :

- $P(X \leqslant a) \simeq P(-10^{99} \leqslant \mathbb{X} \leqslant a)$.
- $P(X \geqslant a) \simeq P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant 10^{99})$.

[ Application page 375 , **Maths Repère**, *Hachette*]

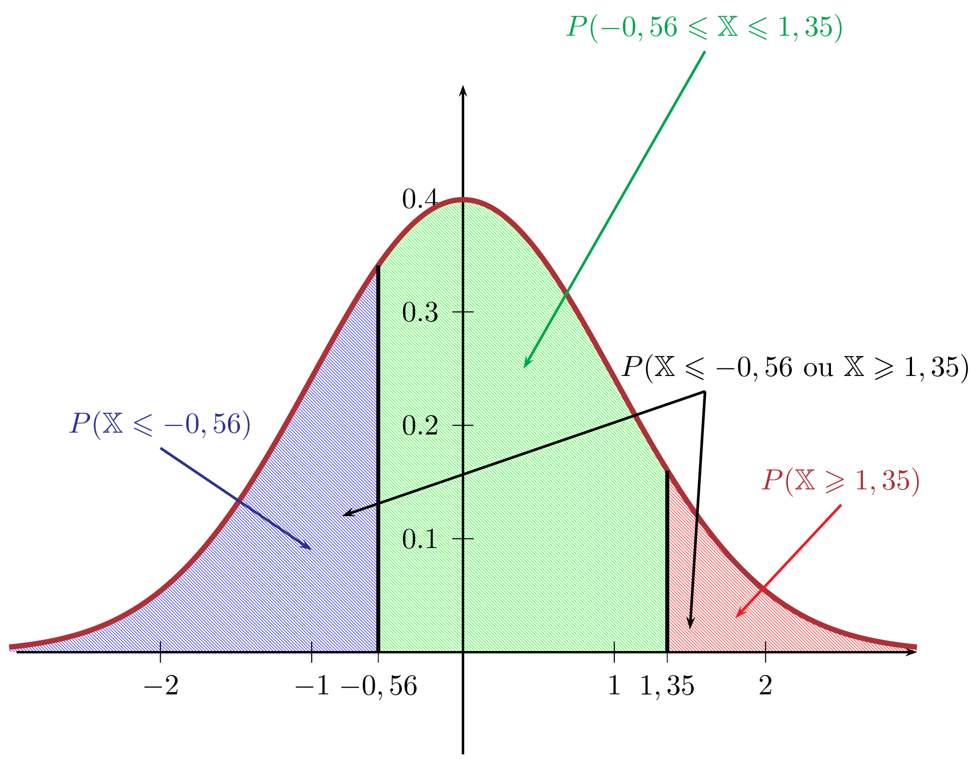
**Exemple 1:** Une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi normale centrée réduite. A l'aide d'une table des valeurs de $\Phi$[5] ou de la calculatrice, on trouve :

$$\Phi(0,56) \simeq 0,7123 \quad \text{et} \quad \Phi(1,35) \simeq 0,9115.$$

D'après le **théorème** (I), on peut alors déterminer les probabilités suivantes :

- $P(\mathbb{X} \geqslant 1,35) = 1 - \Phi(1,35) \simeq 0,0885$.
- $P(\mathbb{X} \leqslant -0,56) = \Phi(-0,56) = 1 - \Phi(0,56) \simeq 0,2877$.
- $P(-0,56 \leqslant \mathbb{X} \leqslant 1,35) = \Phi(1,35) - \Phi(-0,56) \simeq 0,7123 - 0,2877 = 0,6238$.
- $P(\mathbb{X} \leqslant -0,56 \text{ ou } \mathbb{X} \geqslant 1,35) = P(\mathbb{X} \leqslant -0,56) + P(\mathbb{X} \geqslant 1,35)$
  $\simeq 0,2877 + 0,0885 = 0,3762$.
  Les événements $(\mathbb{X} \leqslant -0,56)$ et $(\mathbb{X} \geqslant 1,35)$ étant incompatibles.

5. Comme grand-papy !




**Remarque:** Certaines valeurs interviennent souvent, il est bon de les mémoriser.

$$\boxed{\begin{array}{l} P(-1 \leqslant \mathbb{X} \leqslant 1) \simeq 0,683 \\ P(-2 \leqslant \mathbb{X} \leqslant 2) \simeq 0,954 \\ P(-3 \leqslant \mathbb{X} \leqslant 3) \simeq 0,997. \end{array}}$$

### II.3 Espérance et variance

**Théorème 11**

Si une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi normale centrée réduite alors son espérance est nulle et son écart-type est égal à 1.

$$E(\mathbb{X}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sigma(\mathbb{X}) = 1.$$

On rappelle[6] que c'est pour cette raison que cette loi normale est dite centrée ($E(\mathbb{X}) = 0$) et réduite ($\sigma(\mathbb{X}) = 1$).

6. *cf.* commentaires précédents

**Preuve:** Il suffit de remarquer qu'une primitive de $te^{-\frac{t^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$ est $-e^{-\frac{t^2}{2}}$, la suite des calculs est simple :

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{X}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{x_0} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\lim_{X\to-\infty}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_X^{x_0} + \lim_{Y\to+\infty}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{x_0}^{Y}\right)\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\cancel{e^{-\frac{x_0^2}{2}}} + \lim_{X\to-\infty} e^{-\frac{X^2}{2}} - \lim_{Y\to+\infty} e^{-\frac{Y^2}{2}} + \cancel{e^{-\frac{x_0^2}{2}}}\right) \qquad \text{avec } \lim_{u\to\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} = 0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le calcul de la variance et de l'écart-type est hors de notre portée et sera malheureusement admis.

[ Démonstration page 382 , **Maths Repère**, *Hachette*]

## II.4 Probabilité d'intervalles centrés en 0

C'est le problème réciproque : Un réel $\alpha \in ]0\,;1[$ donné, peut-on déterminer un intervalle $I$ tel que la probabilité du succès $P(\mathbb{X} \in I)$ soit égale à $1-\alpha$ ?

Par exemple, pour $\alpha = 0,01 = 1\%$, peut-on trouver un intervalle $I$ qui réalise $P(\mathbb{X} \in I) = 99\%$ ? On dit aussi au risque d'erreur de 1%.

Les intervalles $I$ répondant à cette question sont en nombre infini mais, comme on va le voir, la réponse existe et est unique dans le cas des intervalles centrés en 0 (*ie*) de la forme $]-a\,;a[$ où $a$ est un réel positif.

**Théorème III**

Soient $\mathbb{X}$ une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite et $\alpha$ un réel de l'intervalle $]0\,;1[$.
Il existe un unique réel strictement positif $u_\alpha$ tel que :

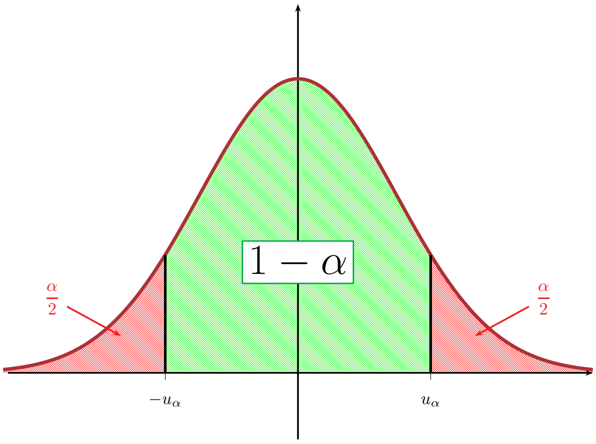
$$P(-u_\alpha \leqslant \mathbb{X} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha.$$

**Preuve:** L'équation à résoudre revient à chercher un réel $x$ strictement positif tel que :

$$\begin{aligned}
P(-x \leqslant \mathbb{X} \leqslant x) &= 1-\alpha\\
\Phi(x) - \Phi(-x) &= 1-\alpha\\
\Phi(x) - 1 + \Phi(x) &= 1-\alpha\\
2\Phi(x) &= 2-\alpha\\
\Phi(x) &= 1-\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Or, la fonction $\Phi$ est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty\,[$. Elle établit donc une bijection de $[0\,;+\infty\,[$ sur son intervalle image $[\Phi(0)\,;\lim\limits_{x\to+\infty}[= \left[\frac{1}{2}\,;1\right[$.

Comme $0<\alpha<1$ alors $\frac{1}{2}<1-\frac{\alpha}{2}<1$ (*ie*) $\alpha$ appartient à l'intervalle image de $[0\,;+\infty\,[$ par $\Phi$.




D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotone, il existe donc un unique élément $u_\alpha$ de l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$ tel que $\Phi(x)=1-\frac{\alpha}{2}$. C'est le réel strictement positif cherché.

[Démonstration pages 382-383 / Exercice résolu 1 page 387, **Maths Repère**, *Hachette*]

En pratique, on ira souvent cherché les valeurs de $u_\alpha$ telles que $P(-u_\alpha \leqslant \mathbb{X} \leqslant u_\alpha)=95\%$ ou $P(-u_\alpha \leqslant \mathbb{X} \leqslant u_\alpha)=99\%$ (*ie*) les valeurs de $u_{0,05}$ et $u_{0,01}$. On trouve :

$$\boxed{\begin{array}{l} P(-1,96 \leqslant \mathbb{X} \leqslant 1,96)=0,95 \\ P(-2,58 \leqslant \mathbb{X} \leqslant 2,58)=0,99. \end{array}}$$

Valeurs souvent nécessaires pour connaître une part représentative de 95 ou 99% d'une population...

**Méthode 2** (Avec la calculatrice)

Les syntaxes, avec les calculatrices sont les suivantes :

**Casio 35 :** STAT ▶ DIST ▶ NORM ▶ F3 `invN`

**TI 82 :** 2nd DISTR ▶ `FracNormale`$(1-\alpha,\mu,\sigma)$

**1**

**Exercice** $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Déterminer l'intervalle $I$ centré en 0 tel que $P(\mathbb{X}\in I)=0,8$.

On donnera les bornes de l'intervalle avec une précision de $10^{-2}$.

***Rep :*** $u_\alpha \simeq 1,28$ et $I=[-1,28\,;1,28\,]$.

L'étude de la loi normale centrée réduite ainsi faite, il est temps de s'occuper des lois normales générales $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma\,)$. L'étude précédente comprise, ce sera rapide.

## III Lois normales

Résumons les commentaires et réflexions faits en page 316 par un théorème :

**Théorème IV**

Une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$ notée $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ si, et seulement si la variable aléatoire $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{X}-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

[ Démonstration page 383 , **Maths Repère**, *Hachette*]

Ce théorème est fort et important. Il permet de ramener l'étude de toutes les lois normales à celle de la loi normale centrée réduite par une translation [7] et une homothétie [8] Tout le travail sera donc déjà fait.

**Proposition I**

Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ alors son espérance vaut $\mu$ et son écart-type est $\sigma$.

$$E(\mathbb{X}) = \mu \qquad \text{et} \qquad \sigma(\mathbb{X}) = \sigma.$$

**Preuve:** De la linéarité de l'espérance, comme $\mathbb{Z}$ suit la loi normale centrée réduite, on en déduit :

$$0 = E(\mathbb{Z}) = E\left(\frac{\mathbb{X}-\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(\mathbb{X})-\mu}{\sigma} \iff E(\mathbb{X}) = \mu.$$

De plus, comme $\forall (a\,;b \in \mathbb{R}^2,\ V(a\mathbb{X}+b) = a^2V(\mathbb{X})$, on a :

$$1 = V(\mathbb{Z}) = V\left(\frac{\mathbb{X}-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(\mathbb{X}) \iff V(\mathbb{X}) = \sigma^2 \iff \sigma(\mathbb{X}) = \sigma.$$

Une loi normale est donc correctement définie par la seule donnée de son espérance et de son écart-type.

**Exemple 2 (Classique):** Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.

Une pièce est conforme lorsque sa longueur (en millimètres) appartient à l'intervalle $[74,4\,;75,6]$.

On note $\mathbb{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard, associe sa longueur. On suppose que $\mathbb{L}$ suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0, 25. [9]

Quelle est la probabilité qu'une pièce soit conforme ?

On calcule $P(74,4 \leqslant \mathbb{L} \leqslant 75,6) = 0,98$.

La pièce est donc conforme dans 98% des cas. Ce n'est pas plus dur !

7. La différence $\mathbb{X}-\mu$.
8. Le quotient par $\sigma$.

[ Application 1 page 377
Exercice 57 page 397 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Exemple 3:** Les températures de l'eau du mois de juillet, autour du lac Léman, suivent la loi normale d'espérance 18,2°C et d'écart-type 3,6 °C.

Une personne part camper en juillet sur le pourtour du lac Léman. Que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau des plages dans les cas suivants :

**1/** Températures inférieures à 16 °C.

**2/** Températures comprises entre 20°C et 24,5°C.

**3/** Températures supérieures à 21°C.

On appelle $\mathbb{T}$ la variable aléatoire associée aux températures et $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{T} - 18,2}{3,6}$ la variable aléatoire associée à la loi normale centrée réduite.

Il y a deux façons d'obtenir les résultats, soit on utilise directement la calculatrice avec la loi normale de l'énoncé, soit on se ramène à la loi normale centrée réduite.

**1/** Calculons $P(\mathbb{T} \leqslant 16)$ :
La calculatrice donne directement $P(\mathbb{T} \leqslant 16) = 0,271$.
Sinon, pour revenir à la loi $\mathbb{Z}$, on manipule d'abord quelques inéquations élémentaires :

$$\mathbb{T} \leqslant 16 \iff \frac{\mathbb{T} - 18,6}{3,6} \leqslant \frac{16 - 18,2}{3,6} \iff \mathbb{Z} \leqslant -0,611.$$

Une table de loi normale centrée réduite ou encore la calculatrice redonne :

$$P(\mathbb{Z} \leqslant -0,611) = \Phi(-0,611) = 1 - \Phi(0,611) = 1 - 0,72 = 0,271.$$

**2/** le raisonnement est identique [10]

**A la calculatrice :** $P(20 \leqslant \mathbb{T} \leqslant 24,5) = 0,268$.
**Avec la loi centrée :** $P(20 \leqslant \mathbb{T} \leqslant 24,5) = P(0,5 \leqslant \mathbb{Z} \leqslant 1,75) = \Phi(1,75) - \Phi(0,5)$
$= 0,960 - 0,692 = 0,268$.

**3/** [**A la calculatrice :** $P(\mathbb{T} \geqslant 21) = 0,218$.
**Avec la loi centrée :** $P(\mathbb{T} \geqslant 21) = P(\mathbb{Z} \geqslant 0,78) = 1 - \Phi(0,78)$
$= 1 - 0,782 = 0,218$.

**Moralité :** Il faut venir se baigner à Wallis.

[ Application 2 page 377 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

### III.1 Intervalles en fonction de $\sigma$

Toutes les remarques de la parties (I.2) sur la fonction de densité restent valables. On retiendra particulièrement que la courbe « en cloche » est symétrique par rapport à son espérance $\mu$ et que son maximum ainsi que son inflexion dépendent de l'écart-type $\sigma$.

9. $\mathbb{L} \rightsquigarrow \mathcal{N}(75\,;0,25)$
10. Entraînez-vous !

On s'intéresse ici à certains intervalles caractéristiques et pratiques, non plus centrés en 0 mais en $\mu$.

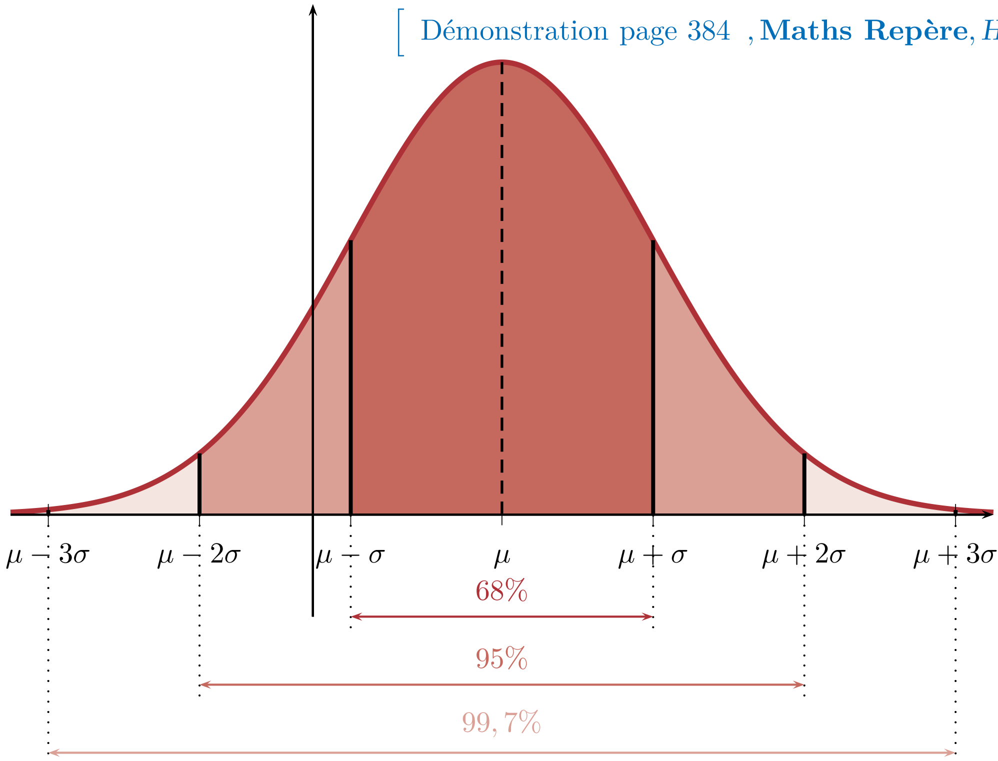
Certaines valeurs sont à retenir quant à la répartition des données autour de l'espérance en fonction de l'écart-type :

**Proposition 2**

Si $\mathbb{X}$ suit la loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$, alors

$$\boxed{\begin{array}{r} P(\mu-\sigma \leqslant \mathbb{X} \leqslant \mu+\sigma) \simeq 0,68. \\ P(\mu-2\sigma \leqslant \mathbb{X} \leqslant \mu+2\sigma) \simeq 0,95. \\ P(\mu-3\sigma \leqslant \mathbb{X} \leqslant \mu+3\sigma) \simeq 0,997. \end{array}}$$

[ Démonstration page 384 , **Maths Repère**, *Hachette* ]




**Exemple 4:** On reprend l'**exemple** (2).

Quelle valeur doit-on donner à $h$ pour avoir l'égalité :

$$P(75-h \leqslant \mathbb{L} \leqslant 75+h) = 0,997.$$

On sait que $P(\mu-3\sigma \leqslant \mathbb{L} \leqslant \mu+3\sigma) \simeq 0,997$. La question revient donc à résoudre la petite équation $75-h = 75-3\times 0,25$.

On trouve $h = 3\times 0,25 = 0,75$ mm.

**Remarque:** Comme $P(74,25 \leqslant \mathbb{L} \leqslant 75,75) \simeq 0,997$, on pourra donc dire que quasiment toutes les pièces ($99,7\%$ quand même !) ont théoriquement une largeur comprise entre 74,25 mm et 75,75 mm.

[ Exercice résolu 2 page 388
Exercice 77 page 400 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

2

**Exercice** Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité $\mathbb{X}$ (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles contenant moins d'un litre.

**1/** À quelle valeur moyenne $\mu$ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?

***Rep :*** $\mu \simeq 106,18$.

**2/** La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?

***Rep :*** $\simeq 0,028$.

**3/** Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne pas suivre la législation.

(a) Quelle est alors la nouvelle valeur de $\mu$ ?

***Rep :*** $\mu \simeq 105,34$.

(b) Quelle est alors, dans les conditions de la question précédente, la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?

***Rep :*** $\simeq 0,0038$.

(c) La législation n'étant plus respectée, déterminer $\mu$ et $\sigma$ afin qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles de moins d'un litre et moins de 1% de bouteilles qui débordent.

***Idée :*** $\mu$ et $\sigma$ sont solutions d'un système d'inéquations...

[ Exercice 82 page 402 , **Maths Repère**, *Hachette*]

Venons-en au but de notre chapitre :

## IV Approximation normale d'une loi binomiale

Tout d'abord le gros théorème :

**Théorème V** (Moivre-Laplace (Admis))

Soit $\mathbb{X}_n$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.
Si $\mathbb{Z}_n$ est la variable aléatoire définie par $\mathbb{Z}_n = \dfrac{\mathbb{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ alors, pour tous réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant \mathbb{Z}_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Ce théorème justifie que sous certaines conditions sur les paramètres $n$ et $p$, la probabilité d'un événement aléatoire associé à une loi binomiale peut être approché par une probabilité d'un événement aléatoire associé à une loi normale centrée réduite.

On dit qu'il s'agit d'une **approximation d'une loi binomiale par une loi normale**.

Vous reconnaîtrez que c'est alors beaucoup plus simple ! Sinon, comparez les deux calculs ci-dessous !

$$P(m \leqslant \mathbb{X} \leqslant n) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{et} \quad P(a \leqslant \mathbb{Z} \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$
$$= \Phi(b) - \Phi(a).$$

L'un est une somme dont chaque terme est lourd à calculer et sensibles aux erreurs d'arrondies, l'autre est une simple différence entre deux images par une fonction.

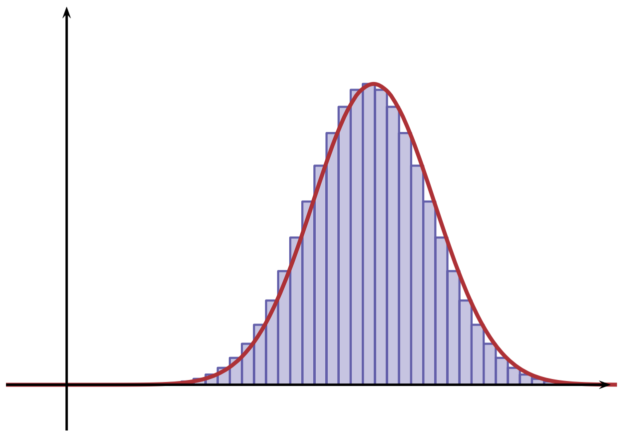
Le graphique ci-contre représente l'approximation d'une loi $\mathcal{B}(20\,;0,5\,)$ par la densité de la loi normale correspondante :

$$\mu = 20 \times 0,5 = 10 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{20 \times 0,5^2} = \sqrt{5}.$$

Les deux dernières conditions sont respectées :

$$np = 10 \geqslant 5,$$

$$n(1-p) = 10 \geqslant 5.$$



En pratique, on fera cette approximation dès que les conditions de la **proposition** (3) seront remplies [11]

**Proposition 3**

La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ dès que :

$$n \geqslant 30, \qquad np \geqslant 5 \qquad \textbf{et} \qquad n(1-p) \geqslant 5.$$

[ Application 1 page 379
Exercice résolu 3 page 389
Exercice 85 page 402
Exercice 124 page 411 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Exemple 5:** Un revendeur de matériel photographique désire s'implanter dans une galerie marchande. Il estime qu'il pourra vendre 40 appareils photo par jour et les ventes sont deux à deux indépendantes. Une étude lui a montré que, parmi les différentes marques disponibles, la marque A réalise 38,6 % du marché.
On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui, un jour donné, associe le nombre d'appareils de marque A vendus ce jour-là.

- On peut assimiler ces 40 ventes indépendantes à un schéma de Bernoulli où le succès est l'événement « l'appareil de marque A est vendu ». Alors, la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la loi binomiale de paramètres : $n = 40$ et $p = 0,386$.

11. En terminale S, ce sera presque toujours le cas mais il faudra le dire avant toute approximation !

- La probabilité que, sur 40 appareils vendus ce jour, 10 soient de la marque A vaut :

$$P(\mathbb{X}=10)=\binom{40}{10}\times 0,386^{10}\times 0,614^{30}\simeq 0,03.$$

- On a aussi $E(\mathbb{X})=np=40\times 0,386=15,44$ et $\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{40\times 0,386\times 0,614}\simeq 3,08$.
- Les conditions de la **proposition** (3) sont remplies. On peut donc approcher $\mathbb{X}$ par la loi normale $\mathbb{Y}$ de paramètres $\mu=15,44$ et $\sigma=3,08$.
- La probabilité de l'événement : « un jour donné, le nombre d'appareils de marque A vendus est compris entre 15 et 25 » vaut alors :

$$P(15\leqslant \mathbb{Y}\leqslant 25)\simeq 0,56.$$

**Exemple 6:** On lance 180 fois un dé à jouer et on note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui représente le nombre d'apparition du 6. En utilisant l'approximation normale calculer au millième les probabilités suivantes :

**1/** $P(\mathbb{X}\leqslant 20)$. **2/** $P(\mathbb{X}>40)$. **3/** $P(X\leqslant 20 \text{ ou } \mathbb{X}>40)$.

Il faut d'abord calculer les paramètres de la loi normale correspondante à la loi binomiale $\mathcal{B}\left(180\ ;\ \frac{1}{6}\right)$ :

$$E(\mathbb{X})=np=180\times\frac{1}{6}=30\quad\text{et}\quad\sigma(\mathbb{X})=\sqrt{180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=5.$$

Et s'assurer que les conditions de la **proposition** (3) sont vérifiées :

$$np=30\geqslant 5\quad\text{et}\quad n(1-p)=150\geqslant 5.$$

A l'aide d'une calculatrice, on trouve alors :

**1/** $P(\mathbb{X}\leqslant 20)\simeq 0,029$.

**2/** $P(\mathbb{X}>40)\simeq 0,018$.

**3/** $P(X\leqslant 20 \text{ ou } \mathbb{X}>40)=P(X\leqslant 20)+P(\mathbb{X}>40)\simeq 0,047$.

Si on souhaite utiliser une table, on considère alors la loi normale centrée réduite $\mathbb{Z}=\dfrac{\mathbb{X}-30}{5}$ et on obtient de même :

**1/** $P(\mathbb{X}\leqslant 20)=P(\mathbb{Z}\leqslant -1,9)=\Phi(-1,9)=1-\Phi(1,9)\simeq 0,029$.

**2/** $P(\mathbb{X}>40)=P(\mathbb{Z}\geqslant 2,1)=1-\Phi(2,1)\simeq 0,018$.

**3/** $P(X\leqslant 20 \text{ ou } \mathbb{X}>40)=$ la somme des deux précédentes…

[Exercice 90 page 403
Exercice 96 page 404 , **Maths Repère**, *Hachette*]

# V Un peu d'histoire et de culture

## V.1 Généralités mathématiques

La loi normale est une loi théorique : c'est une idéalisation mathématique qui ne se rencontre jamais exactement dans la nature (pas plus qu'un cercle…). Néanmoins, de nombreuses distributions réellement observées s'en rapprochent de manière assez flagrante en présentant cette forme typique en « cloche ».

Un théorème très important en statistique et probabilité, le théorème central limite (hors programme au lycée), montre la place prépondérante que cette loi occupe dans la modélisation de phénomènes naturels.

La loi normale est aussi appelée loi de Gauss, ou loi de Laplace, ou encore de Laplace-Gauss. Gauss et Laplace trouvèrent tous les deux cette loi, indépendamment l'un de l'autre, et par des approches bien distinctes et différentes :

- Gauss introduisit la loi normale à propos d'un problème d'estimation de paramètres, pour un problème dans un contexte complètement étranger à celui du calcul des probabilités (il s'intéressait alors au mouvement des corps célestes, et son but était de palier, dans une certaine mesure, à l'imprécision des appareils d'observation et de mesure).
- Laplace , quant à lui, était bien dans le cadre du calcul de probabilités telles qu'elles étaient perçues et développées à son époque.

  Laplace prolongea les travaux de De Moivre sur l'approximation de la loi binomiale. La loi normale est ainsi vue comme une approximation (une limite plus précisément) d'une expérience modélisée par une loi binomiale [12].

## V.2 Historique

Au XVII$^{e}$ siècle, les jeux de hasard, alors très en vogue, ont poussé les mathématiciens à s'intéresser aux calculs de probabilités. La loi normale est une loi de probabilité qui a aussi son origine dans ce contexte.

Chronologiquement, les étapes marquantes de l'essor de la loi normale sont

- Abraham de Moivre (1667-1754) démontre en 1733 que la loi normale est la limite de la loi binomiale pour $n$ infiniment grand et $p = \dfrac{1}{2}$.
- Pierre-Simon de Laplace [13] généralise en 1772 le résultat de De Moivre pour $p \neq \dfrac{1}{2}$ (*ie*) pour toutes les lois binomiales.
- Carl Friederich Gauss [14] parvient au même résultat que De Laplace en s'intéressant à la distribution des erreurs touchant les observations astronomiques.

12. *cf.* le **théorème** (V) de Moivre-Laplace qui, lui, est bien dans les programmes actuels de classe de terminale)
13. Laplace (**1749-1827**) est un mathématicien, astronome et physicien français.
    Laplace est l'un des principaux scientifiques de la période napoléonienne. Il a apporté des contributions fondamentales dans différents champs des mathématiques, de l'astronomie et de la théorie des probabilités. Il a été l'un des scientifiques les plus influents de son temps, notamment par son affirmation du déterminisme. « Sire, je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse ! », répondit-il à Napoléon Bonaparte.
    En 1799 il est nommé ministre de l'Intérieur sous le Consulat. Napoléon 1$^{er}$ lui confère en 1808 le titre de comte de l'Empire. Il est nommé marquis en 1817, après la restauration des Bourbons.
14. Gauss (**1777-1855**) est un mathématicien, astronome et physicien allemand.
    Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

- Adolphe Quételet (1796-1874), astronome belge a été le premier à appliquer cette distribution à des données sociales et biologiques. Pour la petite histoire, il a rassemblé les mesures du tour de poitrine de soldats écossais et du tour de taille de soldats français, et a constaté que les deux ensembles de mesures présentaient une distribution approximativement normale.

  Quételet interprétait la moyenne ces distributions « normales » comme l'idéal à atteindre par la nature, et les observations situées de part et d'autre de cette moyenne comme des erreurs par rapport à cette « normalité ». Cette interprétation ne lui a pas survécu.

- Francis Galton (1822-1911) affirme quant à lui l'omniprésence de la loi normale dans la nature, physique comme biologique. C'est par ailleurs lui qui a donné à la distribution normale un rôle central dans la théorie sur les facultés mentales. Galton (cousin de Darwin) voulait justifier la transmission des capacités intellectuelles par l'hérédité pour permettre l'amélioration de l'espèce humaine (il est par ailleurs considéré comme le fondateur de l'eugénisme) mais là, on s'éloigne des mathématiques.

- Jacques Hadamard (1865-1963) démontre la possibilité et la nécessité, en s'appuyant sur la loi normale, de gérer scientifiquement la qualité de la production industrielle.

  C'est le début de l'étude statistique des systèmes de production.

- Emile Borel [15] donna une généralisation des conditions de réalisation d'une distribution normale : « *Lorsque la réalisation d'une variable quantitative* $\mathbb{X}$ *est sous la dépendance d'une cause prépondérante constante, et d'un ensemble de causes perturbatrices secondaires nombreuses et indépendantes, et dont les effets sont additifs, petits, symétriques et aratoires, la distribution de cette variable tend vers la loi normale et l'approximation est d'autant meilleure que le nombre de causes secondaires est grand.* »

De nos jours, on estime que les variables qui suivent la loi normale sont vraisemblablement beaucoup moins nombreuses que ce que l'enthousiasme de Galton avait pu suggérer.

Les séries statistiques expérimentales qui se rapprochent le plus de la loi normale concernent des variables (poids, dimensions,...) observées dans l'industrie pour les fabrications en grande serie.

En biométrie, un certain nombre de variables quantitatives se distribuent selon la loi normale : taille, poids, rythme cardiaque, périmètre crânien, diamètre des hématies,...

La généralisation de Borel s'applique ici très bien à l'observation des données biologiques ou médicales : la taille, par exemple, dépend de très nombreux facteurs, les uns héréditaires, les autres dus au milieu (alimentation, mode de vie, conditions de chauffage des habitations, ...), chacun de ces facteurs agissant indépendamment et pour une petite part.

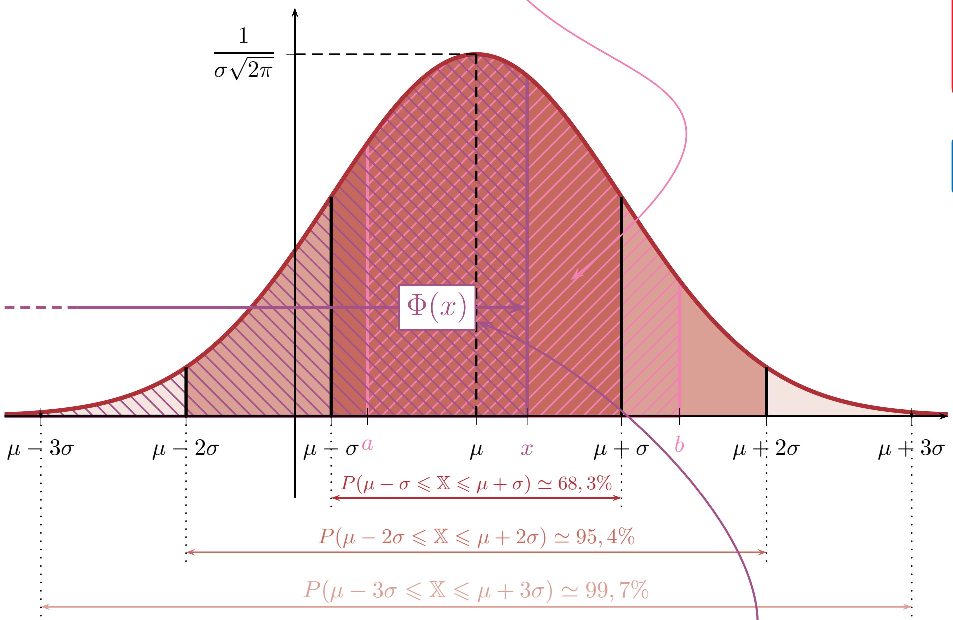
15. Félix Édouard Justin Émile Borel (**1877-1956**) est un mathématicien, professeur à la Faculté des sciences de Paris, spécialiste de la théorie des fonctions et des probabilités, membre de l'Académie des sciences, ainsi qu'un homme politique français, député et ministre. Ses actions pour la Société des Nations et au sein de son Comité fédéral de Coopération européenne font de lui un des précurseurs de l'idée européenne.

Dans une intervention à l'Académie des Sciences, Émile Borel s'en prend au préjugé consistant à croire irrationnel de prendre un billet de loterie. L'achat du billet ne change pas réellement l'existence de celui qui le prend, explique-t-il, tandis que s'il gagne - bien qu'il ait très peu de chance que cela se produise - cette vie en sera changée du tout au tout. Il ne s'agit au fond que d'une sorte de version en modèle réduit du pari de Pascal, mais insistant sur le fait que l'utilité d'un aléa ne se confond pas en général avec son espérance mathématique.

Au cours de la même séance, il montre qu'il est tout aussi rationnel de payer pour acheter du risque (cas du billet de loterie) que de payer pour en éviter (cas de l'assurance).

$$\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right) \iff \forall (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2,$$

$$P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$




**Fonction de répartition :** $\Phi(x) = P(\mathbb{X} \leqslant x)$

$$P(a \leqslant \mathbb{X} \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} P(\mathbb{X} \geqslant a) = 1 - \Phi(a) \\ P(\mathbb{X} \leqslant -a) = 1 - \Phi(a) \end{array}$$

| Loi normale | | Loi normale centrée réduite |
|---|---|---|
| $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ | $\iff$ | $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{X}-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ |
| $E(\mathbb{X}) = \mu$ et $\sigma(\mathbb{X}) = \sigma$ | | $E(\mathbb{Z}) = 0$ et $\sigma(\mathbb{Z}) = 1.$ |
| $\forall \alpha \in ]0\,;1\,[,\ \exists\, u_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : | | |
| $P(\mu - u_\alpha\sigma \leqslant \mathbb{X} \leqslant \mu + u_\alpha\sigma) = 1-\alpha.$ | | $P(-u_\alpha \leqslant \mathbb{Z} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$ |

$$u_{0,05} \simeq 1,96 \text{ et } u_{0,01} \simeq 2,58$$

À remplacer par 1 pour une loi centrée réduite

| x | $-\infty$ | | $\mu$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_{\mu,\sigma}(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_{\mu,\sigma}$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ | $\searrow$ | $0$ |

**Densité de Laplace-Gauss :**

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

**Théorème VI** (Moivre-Laplace (Admis))

Soit $\mathbb{X}_n$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p\,)$.
Si $Z_n$ est la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{\mathbb{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ alors, pour tous réels $a$ et $b$ tels que $a<b$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant \mathbb{Z}_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

**Conditions d'application de Moivre-Laplace :**

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5 \qquad \text{(MV)}$$

# Loi normale - Complexes

1

**Exercice (Polynésie 2013)** *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.*

**1/** Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

**a.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ **b.** $\sqrt{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ **c.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ **d.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

**2/** L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe $z$, admet :

(a) une solution.

(b) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

(c) deux solutions.

(d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

**3/** Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(-1\ ;\ 5\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 0\ ;\ 4)$. La droite parallèle à la droite $(AB)$ passant par le point $C$ a pour représentation paramétrique : $\forall t \in \mathbb{R}$,

(a) $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$

**4/** Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $D(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3\ ;\ -5\ ;\ 1)$, et la droite $\Delta$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) La droite $\Delta$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

(b) La droite $\Delta$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.

(c) La droite $\Delta$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

(d) La droite $\Delta$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

2

**Exercice (Nouvelle-Calédonie 2013)** **Les parties A, B et C sont indépendantes**

**Partie A : (Restitution organisée des connaissances)**

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> *Si $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\ 1[$, il existe un unique réel strictement positif $\chi_\alpha$ tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant \mathbb{X} \leqslant \chi_\alpha\right) = 1 - \alpha$.*

Soit $f$ la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Soit $H$ la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**1/** Que représente la fonction $f$ pour la loi normale centrée réduite ?

**2/** Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**3/** À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif $x$,

$$H(x) = 2\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**4/** En déduire que la dérivée $H'$ de la fonction $H$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de $H$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**5/** Démontrer alors le théorème énoncé.

**Partie B**

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.

60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.

Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

$A$ l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

$B$ l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

$D$ l'évènement : « La pipette a un défaut ».

**1/** La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

**2/** Montrer que $p(B \cap D) = 0,0224$.

**3/** Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

**Partie C**

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.

Soit $\mathbb{X}$ la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).

On admet que $\mathbb{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu$ et écart type $\sigma$ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,0424$.

**1/** Quelle est alors la probabilité, à $10^{-4}$ près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ? On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

| Contenance $x$ (en mL) | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(\mathbb{X} \leqslant x)$ (arrondi à $10^{-5}$) | 0,00000 | 0,00004 | 0,00165 | 0,02506 | 0,16368 |
| Contenance $x$ (en mL) | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 |
| $P(\mathbb{X} \leqslant x)$ (arrondi à $10^{-5}$) | 0,5 | 0,83632 | 0,97494 | 0,99835 | 0,99996 |

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

**2/** On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille $n$, où $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit $Y_n$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille $n$ associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

(a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y_n$ ?

(b) Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

(c) **(Bonus)** Donner en fonction de $n$ l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

Chapitre

15

# Nombres Complexes II

Dernier chapitre de géométrie de l'année. On finit en beauté avec de jolies relations historiques et magiques telles que la relation d'Euler(15.1).

Derniers vestiges de la géométrie qui fut à l'honneur il y a quelques années, les nombres complexes montreront toute leur puissance dans la résolution de problèmes géométriques qui ont hanté les nuits de vos aînés.

## Sommaire

# I Forme exponentielle

## I.1 Introduction

Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

**Remarque:** La fonction $f$ associe donc à tout réel $\theta$ un nombre complexe, donné sous sa forme trigonométrique, de module 1 et d'argument $\theta$ $[2\pi]$.

Comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(0) = 1$.

De plus, si l'on considère deux réels $\theta$ et $\theta'$, on a :

- D'une part, $f(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$
$$= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\Big(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\Big).$$
- D'autre part, $f(\theta)\times f(\theta') = \Big(\cos\theta + i\sin\theta\Big)\times\Big(\cos\theta' + i\sin\theta'\Big)$
$$= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\Big(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\Big).$$

Donc $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$.

La fonction $f$ est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.

Depuis le chapitre sur l'exponentielle, on sait que les seules fonctions vérifiant ces propriétés sont les fonctions du type :

$$f(\theta) = e^{k\theta}.$$

Déterminons le paramètre $k$ en dérivant $f$ : D'une part, on a $f'(\theta) = ke^{k\theta}$ et de l'autre $f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$. Donc $\forall\theta\in\mathbb{R}$ :

$$ke^{k\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta.$$

Pour $\theta = 0$, on obtient $k = i$.

**Conclusion :** $f(\theta) = e^{i\theta}$ $(ie)$ $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.}$

Il en résulte donc une définition/théorème :

**Définition 1**

Tout nombre complexe $z$ de module $r$ et d'argument $\theta$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme :

$$z = re^{i\theta} \quad avec \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \theta\in]-\pi\,;\pi].$$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle** du nombre $z$.

La forme exponentielle permet de lire rapidement le module et l'argument modulo $2\pi$ d'un nombre complexe et est particulièrement bien adaptée aux calculs multiplicatifs et à la géométrie comme nous le verrons.

**Exemples 1:** Quelques exemples classiques à retenir ou à savoir retrouver :

- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1.$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$
- $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1.$
- $2e^{i\dfrac{\pi}{3}} = 2\cos\dfrac{\pi}{3} + i2\sin\dfrac{\pi}{3}$
  $= 1 + i\sqrt{3}.$
- $\sqrt{2}e^{i\dfrac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}$
  $= 1 + i.$
- $2e^{i\dfrac{\pi}{6}} = 2\cos\dfrac{\pi}{6} + i2\sin\dfrac{\pi}{6}$
  $= \sqrt{3} + i.$

[ Application 1 page 245 , **Maths Repère**, *Hachette*]

Une des relations précédentes due à Leonhard Euler (**1707-1783**) est reconnue comme l'une des plus belles équations mathématiques et mérite un cadre bien à elle.

**Théorème 1** (Relation d'Euler)

Pour tout nombre réel $\theta$, on a :

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0.} \tag{15.1}$$

Cette relation relie d'une manière quasi-miraculeuse, les 5 constantes universelles des mathématiques 0, 1, $\pi$, $i$ et $e$ et avec elles, relie, dans l'ordre, l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre et l'analyse.

Un nombre complexe peut donc s'écrire sous trois formes bien distinctes : algébrique, trigonométrique et exponentielle. Chacune d'elles sera à préférer aux autres suivant le type de calculs à effectuer. Pensez-y !

**Exemple 2:** Différentes écritures du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ :

| Forme algébrique | Forme trigonométrique | Forme exponentielle |
|---|---|---|
| $1 + i\sqrt{3}$ | $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ | $2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ |

[ Exercice résolu 1 page 250 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemple 3 (Passage de la forme exponentielle à la forme trigonométrique, puis algébrique):**

$$\begin{aligned}
z &= 4e^{i\frac{3\pi}{4}} && \text{(Forme exponentielle)}\\
&= 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] && \text{(Forme trigonométrique)}\\
&= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. && \text{(Forme algébrique)}
\end{aligned}$$

On a aussi une autre jolie relation attribuée également à Euler qui est l'équivalent exponentiel des relations $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ :

**Proposition 1** (Formule d'Euler)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

**Preuve:** On a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

La somme et la différence des deux expressions précédentes donnent le résultat.

[ Démonstration page 249
Exercice 201 page 273 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## I.2 Règles de calcul en notation exponentielle

**Proposition 2**

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes sous leur forme exponentielle avec $r' \neq 0$ et $n$ un nombre entier :

- **Produit :** $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$.
- **Puissance :** $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$.
- **Conjugué :** $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.
- **Quotient :** $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.
- **Inverse :** $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$.

**Remarque:** Pour les calculs du type « somme » ou « différence », on préférera donc la forme algébrique. La forme exponentielle, quant à elle, sera privilégiée pour les calculs de produits ou de quotients.

**Preuve:** Rien à faire si ce n'est rappeler les propriétés de la fonction exponentielle.

[ Application 2 et 3 page 245 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Exemple 4 (Applications de la forme exponentielle aux calculs de produits et quotients):**

On considère les nombres complexes $z_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= 4\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {z_2}^4 &= \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} \\ &= 144e^{\frac{2i\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Les théorèmes et propriétés qui suivent illustrent bien le potentiel de la forme exponentielle.

**Théorème 11** (Formules de Moivre)

Soient $\theta$ un nombre réel et $n$ un entier.

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

**Preuve:** Magique de simplicité grâce à la notation exponentielle :

$$\begin{aligned} \left(e^{i\theta}\right)^n &= e^{in\theta} \\ \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n &= \cos n\theta + i\sin n\theta. \end{aligned}$$

[ Démonstration page 249 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemple 5 (Applications des formules de Moivre):** Linéarisation de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ :

D'après les formules de Moivre, on a :

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta).$$

Or, $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$.

En identifiant, parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\boxed{\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta}$$

Un élève sérieux et volontaire s'appliquera à linéariser $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ sur la même idée afin de vérifier qu'il a compris l'idée et maîtrise la technique...

### I.3 Application à la trigonométrie

**Proposition 3** (Formule d'addition)

Pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b. \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b.$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b. \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b.$$

**Preuve:** C'est encore une application de la **proposition** (2). Pour tous $a$ et $b$ réels, on a :

$$e^{ia} = \cos a + i\sin a \qquad \text{et} \qquad e^{ib} = \cos b + i\sin b.$$

Or, $e^{ia}\times e^{ib} = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$ mais aussi :

$$\begin{aligned} e^{ia}\times e^{ib} &= \Big(\cos a + i\sin a\Big)\Big(\cos b + i\sin b\Big) \\ &= \cos a\cos b - \sin a\sin b + i\Big(\sin a\cos b + \cos a\sin b\Big). \end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient les deux premières formules. Il suffit alors de remplacer $b$ par $-b$ et d'utliser la parité de cos et l'imparité de sin pour avoir la deuxième série de formules.

1 **Exercice** A l'aide de la **proposition** (3), redémontrer les formules de l'**exemple** (5).

L'analogie avec la fonction exponentielle et l'idée géniale de remarquer qu'un nombre complexe puisse se mettre sous une forme exponentielle permet d'obtenir rapidement et simplement grâce à la **proposition** (2) des propriétés sur les modules [1] et les arguments. Concentrons-nous donc sur ces derniers.

### I.4 Propriétés algébriques des arguments

**Proposition 4**

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi]$

En particulier, $\forall\, n\in\mathbb{Z}$, $\boxed{\arg\left(z^n\right) = n\arg z.}$

**ATTENTION** $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z \ [2\pi]$.

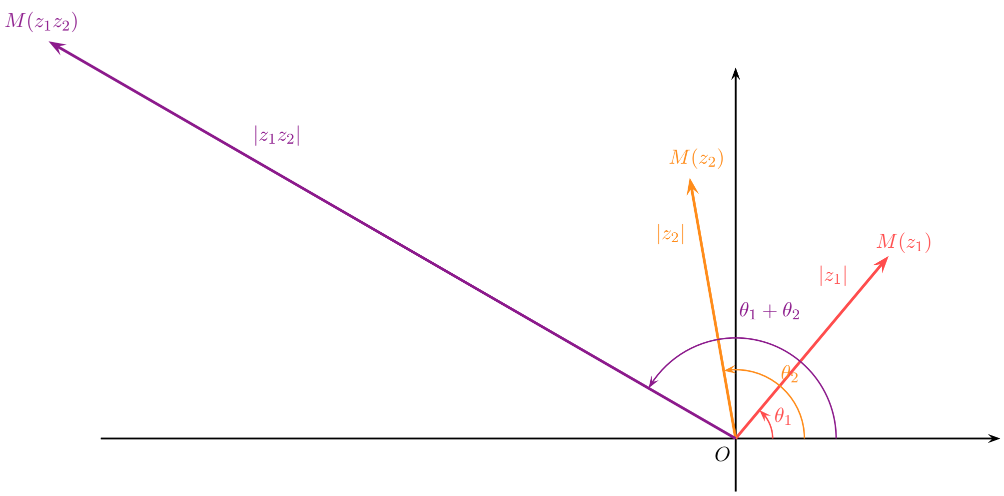
1. *cf.* Chapitre précédents

**Preuve:** La **proposition** (4) n'est qu'un cas particulier de la **proposition** (2) en ne considérant que les arguments. On considère donc deux nombres complexes $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ écrits sous leur forme exponentielle d'après la **définition** (1).

- $zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$. Donc $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$.[2]
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ et si $z \neq 0 \iff r \neq 0$, $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$. En ne regardant que les arguments, on obtient $\arg\left(\overline{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi]$.[3]
- Pour l'argument du quotient, soit on écrit que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) \equiv \arg z + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$ en transformant le quotient en produit et on utilise les formules précédentes, soit on préfère la forme exponentielle :

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \implies \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi].$$ [4]

- La dernière assertion est une conséquence de $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$.[5]




*Dans la multiplication de deux nombres complexes, les modules se **multiplient** et les arguments s'**ajoutent**.*

**Moralité :**

- Les formes trigonométriques et exponentielles sont adaptés aux produits de complexes.
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

[ Exercice résolu 1 page 250 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

5. Sur les modules, on obtiendrait $|zz'| = |z| \times |z'|$.
5. Sur les modules, on obtiendrait $|\overline{z}| = |z|$ et $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
5. Sur les modules, on obtiendrait $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
5. Sur les modules, on obtiendrait $|z^n| = |z|^n$.

**Exemple 6:** En reprenant les notations de l'**exemple** (4), on obtient, **sans calculs** :

- $\arg(z_1z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg z_1 \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg z_2 - \arg z_1 \equiv \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

[ Application 1 page 243
Exercice 108 page 264
Exercices 111 et 112 page 264 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

# II Applications en géométrie

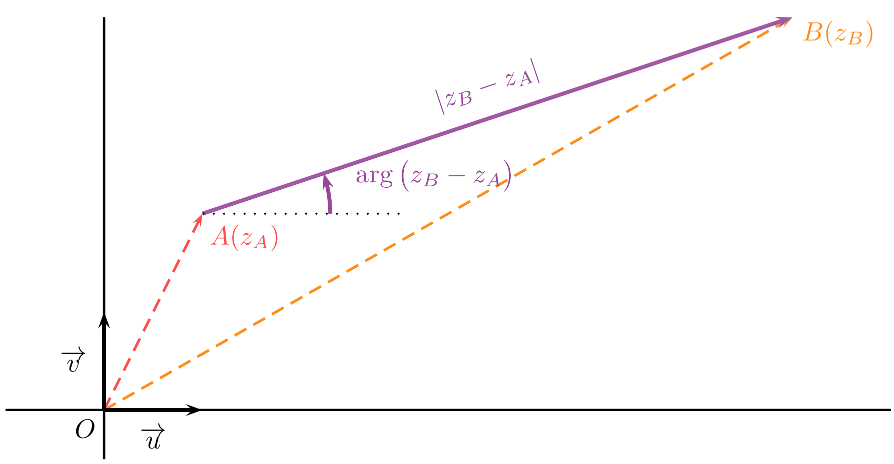
## II.1 Affixe d'un vecteur

**Rappels 1** (Nombres complexes et Géométrie)

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe $(O;\ \overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v})$ d'affixe respective $z_A$ et $z_B$. alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A|$.
- $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(z_B - z_A\right)\ [2\pi]$

[ Démonstration page 248 , **Maths Repère**, *Hachette* ]



**Exemple 7:** On donne $A(2+i)$ et $B(-1-2i)$. Déterminer les coordonnées du $\overrightarrow{AB}$, la distance $AB$ et l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$.

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1-2i-2-i = -3-3i$. Donc $\overrightarrow{AB}\,(-3\ ;\ -3)$.
- $AB = |z_B - z_A| = |-3-3i| = 3\sqrt{2}$.
- $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \implies \theta \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. Donc $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

2 **Exercice** On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$.

**1/** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$. On appellera $z_1$ et $z_2$ les deux solutions obtenues.

**2/** On appelle $A$ le point d'affixe $z_A = 1$, et $B$ et $C$ les points d'affixes $z_1$ et $z_2$.

(a) Calculer $AB$, $AC$ et $BC$.

(b) En déduire la nature du triangle $ABC$.

[ Exercice 154 page 269 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

## II.2 Ensemble de points

Il s'agit de déterminer un ensemble $(\mathscr{E})$ de points $M$ du plan complexe dont les affixes $z$ vérifient une certaine propriété.

On en connaît déjà quelques-uns qui découlent des définitions :

### À partir du module

- $(\mathscr{E}) : |z - z_A| = r$ avec $r > 0 \iff (\mathscr{E}) : AM = r$.

  $(\mathscr{E})$ est le cercle de centre $A$ et de rayon $r$.

- $(\mathscr{E}) : |z - z_A| = |z - z_B| \iff (\mathscr{E}) : AM = BM$.

  $(\mathscr{E})$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

### À partir de l'argument

**Rappels 2** (Angle orienté de deux vecteurs)

Dans le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixes respectives $z_A$, $z_B$,$z_C$ et $z_D$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi].$$

[ Démonstration page 248 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

À partir de cette relation, on peut alors chercher des ensembles de points dont les relations sont basées sur l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (*ie*) des problèmes de colinéarité, d'alignement ou d'orthogonalité.

**Proposition 5** (Colinéarité et orthogonalité)

Dans le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v})$, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et d'affixes respectives $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$, $B$ et $C$ sont distincts et alignés | $\iff$ | $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires non nuls | $\iff$ | $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$. |
| $(AB) \,/\!/\, (CD)$ | $\iff$ | $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires non nuls | $\iff$ | $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$. |
| $(AB) \perp (CD)$ | $\iff$ | $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ | $\iff$ | $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$. |

**Preuve:** Simplement se rappeler que :

- $\arg z \equiv 0\ [\pi] \iff z \in \mathbb{R}$.
- $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$.

Le reste n'est qu'affaire de traduction.

**Remarque:** $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$.

La première assertion signifie donc simplement que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si leur affixe $z_B - z_A$ et $z_C - z_A$ sont proportionnelles dans $\mathbb{R}$.

On retrouve ainsi un résultat déjà vrai pour les coordonnées des vecteurs.

### Nature d'un triangle

Un exemple classique est un exercice où l'on vous demande la nature d'une certain triangle $ABC$.

- $ABC$ est isocèle en $A$ si, et seulement si $AB = AC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.
- $ABC$ est équilatéral si, et seulement si $AB = AC = BC$,

$$\text{ou si, et seulement si } AB = AC \text{ et } \left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$
$$\text{si, et seulement si } |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

- $ABC$ est rectangle en $A$ si, et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.
- $ABC$ est rectangle isocèle en $A$ si, et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $AB = AC$

$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i.$$

**Preuve:** On sait déjà que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ $(ie)$ $\exists r \in \mathbb{R}+$ tel que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = re^{\pm i\frac{\pi}{2}}.$$

Comme $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$, on obtient :

$$r = \left|re^{i\frac{\pi}{2}}\right| = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \iff r = 1.$$

Conclusion : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i.$

[ Exercices résolus 2 à 3 pages 251 à 255 , **Maths Repère**, *Hachette*]

3

**Exercice (Classique)** On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

**1/** Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E}_1)$ des points $M$ d'affixes $z$ vérifiant l'égalité :

$$|z - 3 + 2i| = 5.$$

**2/** Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E}_2)$ des points $M$ d'affixes $z$ vérifiant l'égalité :

$$|z - 3 + 2i| = |z + 1 - i|.$$

**3/** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points d'affixes $z_A = 3 - 2i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = 6 + 2i$.

(a) Calculer le module et l'argument de $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

(b) En déduire la nature du triangle $ABC$.

4

**Exercice (Asie 2015)** Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

**Partie A : propriétés du nombre** $j$

**1/** (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

(b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

**2/** Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

**3/** Démontrer les égalités suivantes :

(a) $\mathrm{j}^3 = 1$ ; (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

**4/** On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes $1, \mathrm{j}$ et $\mathrm{j}^2$ dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

**Partie B**

Soit $a$, $b$, $c$ trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres $a$, $b$, $c$ dans le plan.

**1/** En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.

**2/** En déduire que AC = BC .

**3/** Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.

**4/** En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

5

## Exercice (Métropole 2015)

**1/** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue $z$ :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

**2/** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.

(a) Calculer le module et un argument du nombre $a$.

(b) Donner la forme exponentielle des nombres $a$ et $b$.

(c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.

(d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

**3/** On considère les points $A'$, $B'$ et $C'$ d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

(a) Montrer que $b' = 8$.

(b) Calculer le module et un argument du nombre $a'$.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

**4/** On admet que si $M$ et $N$ sont deux points du plan d'affixes respectives $m$ et $n$ alors le milieu $I$ du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur $MN$ est égale à $|n - m|$.

(a) On note $r$, $s$ et $t$ les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].

Calculer $r$ et $s$. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

(b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

6

## Exercice (Antilles-Guyane 2015)

**Partie A**

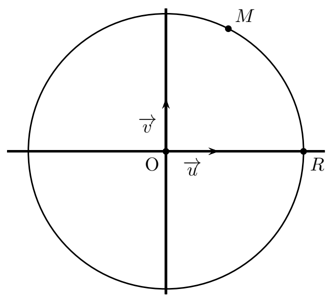
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on a placé un point $M$ d'affixe $z$ appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point $R$ intersection du cercle de centre O passant par $M$ et du demi-axe $[\mathrm{O}\ ;\ \vec{u})$.

**1/** Exprimer l'affixe du point $R$ en fonction de $z$.

**2/** Soit le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point $M'$.




**Partie B**

On définit la suite de nombres complexes $(z_n)$ par un premier terme $z_0$ appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel $n$, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de $z_0$.

**1/** Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand $z_0$ est un nombre réel négatif ?

**2/** Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand $z_0$ est un nombre réel positif ?

**3/** On suppose désormais que $z_0$n'est pas un nombre réel.

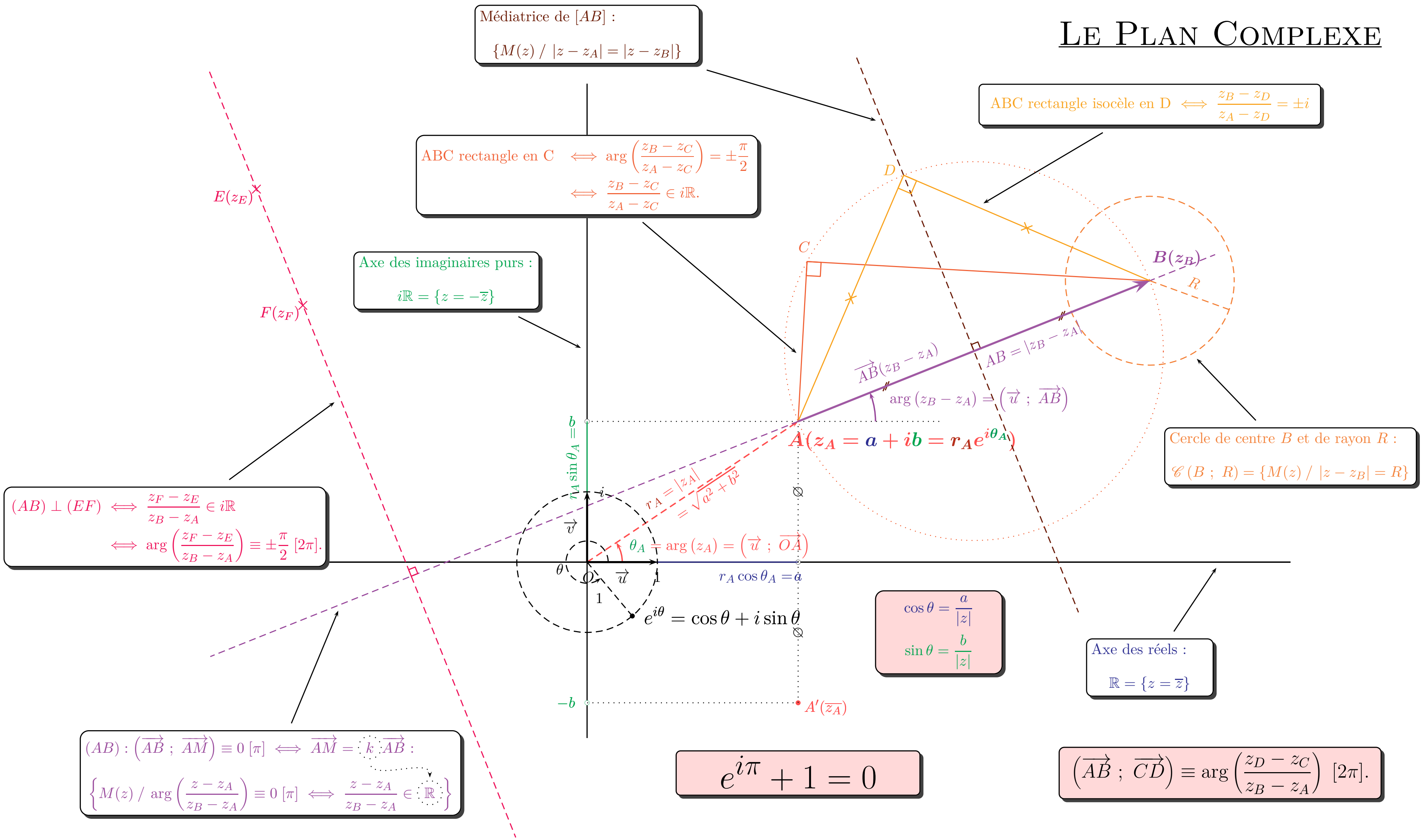
(a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ ?

(b) Démontrer cette conjecture, puis conclure.

[Exercice 144 page 268
Exercices 170 à 176 page 270
Exercices 206 à 209 pages 274-275 , **Maths Repère**, *Hachette*]

[Exercices 216 page 277
Exercices I à IV page 279 , **Maths Repère**, *Hachette*]

# Le Plan Complexe



$$\begin{aligned}\mathbb{C} &= \left\{z = a+ib \text{ avec } (a\ ;\ b)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } i^2=-1\right\} && \text{Forme algébrique.}\\ &= \left\{z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) \text{ avec } r\in\mathbb{R}_+,\ \theta\in\mathbb{R} \text{ et } i^2=-1\right\} && \text{Forme trigonométrique.}\\ &= \left\{z = re^{i\theta} \text{ avec } r\in\mathbb{R}_+,\ \theta\in\mathbb{R} \text{ et } i^2=-1\right\} && \text{Forme exponentielle.}\end{aligned}$$

$$z = 0_{\mathbb{C}} \iff a=b=0_{\mathbb{R}} \iff r=0.$$

| | | |
|---|---|---|
| $z\in\mathbb{R} \iff \begin{cases}\mathrm{Im}\,(z)=0\\ ou\\ z=\overline{z}\\ ou\\ \arg z\equiv 0\ [\pi]\end{cases}$ | $\mathrm{Re}\,(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ <br> $\mathrm{Im}\,(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ <br> $z\overline{z}=\lvert z\rvert^2=a^2+b^2\in\mathbb{R}_+$ | $z\in i\mathbb{R} \iff \begin{cases}\mathrm{Re}\,(z)=0\\ ou\\ z=-\overline{z}\\ ou\\ \arg z\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}$ |

$$\begin{aligned} k(a+ib) &= ka+ikb\\ (a+ib)\pm(a'+ib') &= (a\pm a')+i(b\pm b')\\ (a+ib)\times(a'+ib') &= (aa'-bb')+i(ab'+a'b)\\ \frac{a+ib}{a'+ib'} &= \frac{(aa'+bb')-i(ab'-a'b)}{a'^2+b'^2}\\ \frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib} &= \frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+ib)^2 &= a^2+2abi-b^2\\ (a-ib)^2 &= a^2-2abi-b^2\\ (a-ib)(a+ib) &= a^2+b^2\end{aligned}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\overline{z\pm z'}=\overline{z}\pm\overline{z'}$ | $\lvert -z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert=\lvert z\rvert$ <br> $\lvert z+z'\rvert\leqslant\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$ | $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$ | $\arg(-z)\equiv\pi+\arg z\ [2\pi]$ |
| $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ | $\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$ | $\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$ | $\arg\left(z^n\right)=n\arg z$ |
| $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ | $\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert=\dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ | $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ | $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'\ [2\pi]$ |

| | |
|---|---|
| $az^2+bz+c=0$ <br> $\Delta=b^2-4ac$ | $\Delta=0\implies z=-\dfrac{b}{2a}.$ <br> $\Delta>0\implies z_{12}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$ <br> $\Delta<0\implies z=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$ |

| Euler | Moivre | Formule d'addition |
|---|---|---|
| $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ <br> $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ | $\Big(\cos\theta+i\sin\theta\Big)^n$ <br> $\parallel$ <br> $\cos n\theta+i\sin n\theta.$ | $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$ <br> $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$ |

Chapitre

16

# Fluctuation d'échantillonnage - Estimation

Dans une population, on étudie un caractère donné présent dans cette population. On distingue les deux situations suivantes :

- **1^re^ situation :** On connaît la proportion effective $p$ du caractère dans la population totale.

  On prélève un échantillon de taille $n$ et on calcule la fréquence observée $f_{obs}$ . On recommence l'épreuve un grand nombre de fois pour constate que ces fréquences observées $f_{obs}$ varient en étant « suffisamment proches » de $p$ dans 95% des cas, par exemple.

  On est ici dans le domaine de l'*échantillonnage*.

- **2^e^ situation :** On ne connaît pas la proportion effective $p$ du caractère dans la population totale.

  On effectue donc un sondage sur un échantillon de taille $n$ dans cette population. Sous certaines hypothèses sur $n$ et $p$, nous pouvons faire une estimation de la proportion $p$ par intervalle de confiance.

  On est ici dans le domaine de l'*estimation*.

## Sommaire

# I Échantillonnage

## I.1 Introduction

On considère une population (par exemple la population française) et un certain caractère étudié sur les individus de cette population (exemple : le caractère « être de groupe sanguin A+ »).

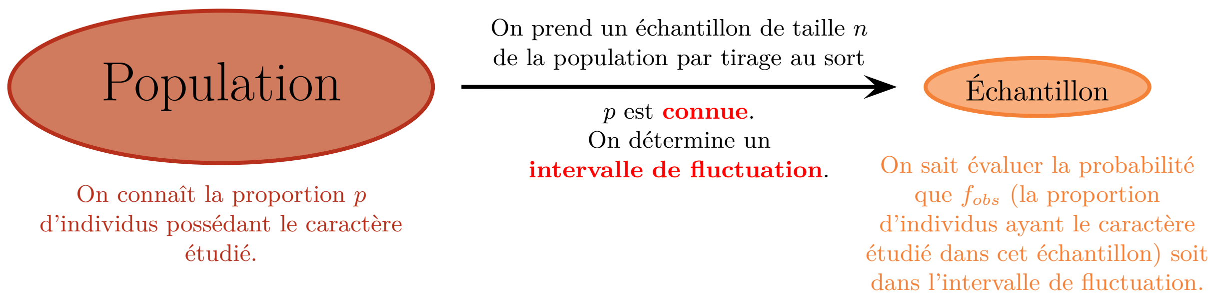
On connaît la proportion $p$ d'individus possédant le caractère dans l'ensemble de la population (ici, 38% de A+ en France).

Quand on prélève au hasard un échantillon de la population, la proportion $f_{obs}$ d'individus possédant le caractère étudié (appelée **fréquence observée**) n'est bien sûr pas nécessairement la même que pour un autre échantillon : c'est la **fluctuation d'échantillonnage**.

Néanmoins, lorsque les échantillons sont de « grande » taille, les différentes valeurs de $f_{obs}$ ne sont « pas trop éloignées » de la proportion réelle $p$. Il y a une tendance à la « stabilisation » autour de cette valeur. On définit alors la notion d'**intervalle de fluctuation**.

Et inversement, si on dispose d'un échantillon dont la fréquence « nous paraît trop éloignée » de $p$, ne pouvant remettre en cause « l'honnêteté du hasard », ne peut-on pas alors être en droit de « suspecter cet échantillon », de se demander s'il est vraiment le fruit du hasard ?...

Nous allons développer toutes ces idées dans cette section.




## I.2 Intervalle de fluctuation d'une fréquence

Soit $p$ la proportion des individus possédant le caractère étudié dans l'ensemble de la population.

### En classe de Seconde

En Seconde, lorsqu'on prélève au hasard de multiples échantillons de taille $n \geqslant 30$ d'une population, on remarque que si $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$, alors dans environ 95% des cas la fréquence observée $f_{obs}$ se situe entre $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On a donc défini, en première approximation, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% autour de $p$ :

$$\boxed{I_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].}$$

**Remarque:** $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \{p\}$.

**Exemples 1:**

**1/** En France, la proportion de personnes de groupe sanguin A+ est 38%.
Comme $0,2 \leqslant 0,38 \leqslant 0,8$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des personnes de groupe A+ dans les échantillons de taille 100 est $I_{100} = \left[0,38 - \dfrac{1}{\sqrt{100}}\,;0,38 + \dfrac{1}{\sqrt{100}}\right]$
$= [0,37\,;0,39\,]$.

**2/** Dans le monde, la proportion de gauchers est 12%.
Comme $0,12 \leqslant 0,2$, le résultat de seconde ne donnera pas un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des gauchers dans les échantillons de taille 100 assez fiable. Il va falloir faire mieux.

## En classe de Première

Prendre au hasard un échantillon de taille $n$ revient à prendre au hasard $n$ individus de manière indépendante. Chaque individu peut posséder le caractère étudié (succès, de probabilité $p$) ou non.

La variable aléatoire $\mathbb{X}_n$ qui donne le nombre d'individus possédant le caractère dans l'échantillon suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p\,)$ et la fréquence d'apparition du caractère dans l'échantillon est $\dfrac{\mathbb{X}_n}{n}$. On la note $F_n$.

À l'aide de la calculatrice, pour une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{B}(n\,;p\,)$, on peut trouver deux entiers $a$ et $b$ tels que :

- $a$ est le plus petit entier tel que $P(\mathbb{X}_n \leqslant a) > 0,025$,
- et $b$ est le plus petit entier tel que $P(\mathbb{X}_n \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Ainsi, on a $P(a \leqslant \mathbb{X}_n \leqslant b) \geqslant 0,95$ $(ie)$ $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F_n \leqslant \dfrac{b}{n}\right) \geqslant 0,95$.

L'intervalle de fluctuation à 95% autour de $p$ considéré en première était donc :

$$\boxed{I_n = \left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]} \qquad \text{avec} \qquad P(F_n \in I_n) \geqslant 0,95.$$

**Remarque:** Il n'y a plus de contraintes sur $p$ et on a toujours $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \{p\}$.

**Exemple 2:** Reprenons l'**exemple** (1).

La variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,12$.

Avec la calculatrice, on trouve $a = 6$ et $b = 19$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence des gauchers dans les échantillons de taille 100 est alors $I_{100} = \left[\dfrac{6}{100}\,;\dfrac{19}{100}\right] = [0,06\,;0,19\,]$.

C'est mieux qu'en seconde mais on eut faire encore mieux grâce au théorème de Moivre-Laplace.[1]

1. On est en Terminale S quand même !

### I.3 Intervalle de fluctuation asymptotique

L'intervalle de fluctuation vu en Première n'est pas très pratique à obtenir. Or, on a vu précédemment qu'une loi binomiale peut-être approchée par une loi normale grâce au théorème de Moivre-Laplace

Nous allons donc, dans ce paragraphe, utiliser la loi normale pour établir un « nouvel » intervalle de fluctuation. Nous énoncerons, et démontrerons, un théorème plus général que le théorème de Seconde[2].

Suivons le même raisonnement et considérons $\mathbb{X}_n$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus possédant le caractère dans l'échantillon $n$.

- $\mathbb{X}_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ qui peut être approchée par la loi normale d'espérance $np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ d'après le rappel (1).

**Rappels 1** (Moivre-Laplace)

Soit $\mathbb{X}_n$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.
Si $Z_n$ est la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{\mathbb{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ alors, pour tous réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant \mathbb{Z}_n \leqslant b) = P(a \leqslant \mathbb{Z} \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

où $\mathbb{Z}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0\,;1)$.

- La fréquence d'apparition du caractère dans l'échantillon est $F_n = \dfrac{\mathbb{X}_n}{n}$.

Or, d'après le rappel (2)

**Rappels 2**

Soient $\mathbb{Z}$ une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite et $\alpha$ un réel de l'intervalle $]0\,;1[$.
Il existe un unique réel strictement positif $u_\alpha$ tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant \mathbb{Z} \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Pour une variable aléatoire $\mathbb{X}$ suivant une loi normale $\mathscr{N}(\mu\,;\sigma)$ (*ie*) telle que $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{X}-\mu}{\sigma}$ suive une loi normale centrée réduite, on a :

$$\begin{aligned} P(-u_\alpha \leqslant \mathbb{Z} \leqslant u_\alpha) &= P\left(-u_\alpha \leqslant \frac{\mathbb{X}-\mu}{\sigma} \leqslant u_\alpha\right) \\ &= P\left(\mu - u_\alpha\sigma \leqslant \mathbb{X} \leqslant \mu + u_\alpha\sigma\right). \end{aligned}$$

(*ie*) $P\left(\mu - u_\alpha\sigma \leqslant \mathbb{X} \leqslant \mu + u_\alpha\sigma\right) = 1 - \alpha$.

2. qui avait été admis...

Pour $\alpha = 5\%$, on trouve, à la calculatrice, $u_\alpha \simeq 1,96$ (*ie*)

$$P\left(\mu - 1,96\sigma \leqslant \mathbb{X} \leqslant \mu + 1,96\sigma\right) \simeq 95\%.$$

En considérant une loi normale de paramètres $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, la relation précédente s'écrit :

$$P\left(np - 1,96\sqrt{np(1-p)} \leqslant \mathbb{X}_n \leqslant np - 1,96\sqrt{np(1-p)}\right) \simeq 95\%.$$

Faisons intervenir $F_n = \dfrac{\mathbb{X}_n}{n}$ :

$$\begin{aligned}
& np - 1,96\sqrt{np(1-p)} \leqslant \mathbb{X}_n \leqslant np - 1,96\sqrt{np(1-p)} \\
\iff & \frac{np - 1,96\sqrt{np(1-p)}}{n} \leqslant \frac{\mathbb{X}_n}{n} \leqslant \frac{np - 1,96\sqrt{np(1-p)}}{n} \\
\iff & p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant F_n \leqslant p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.
\end{aligned}$$

On obtient donc : $$P\left(p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant F_n \leqslant p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \simeq 95\%.$$

L'intervalle de fluctuation à 95% autour de $p$ sera donc, en terminale :

$$\boxed{I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].}$$

Résultat que traduit le théorème ci-dessous dans le cas général :

**Théorème 1**

Soit $p$ un nombre réel fixé de l'intervalle $]0\,;1\,[$ et $n$ un entier non nul.

Soient $\mathbb{X}_n$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$, $F_n = \dfrac{\mathbb{X}_n}{n}$ la variable aléatoire « fréquence du nombre de succès » et $\alpha \in ]0\,;1\,[$.

On appelle **intervalle de fluctuation asymptotique** de la variable fréquence $F_n$ au seuil de $1-\alpha$, l'intervalle $I_n$ défini par :

$$I_n = \left[p - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Alors, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(F_n \in I_n) = 1-\alpha.$$

Le théorème exprime que, pour $n$ assez grand, la variable fréquence $F_n$ prend ses valeurs[3] dans l'intervalle $I_n$ avec une probabilité proche de $1-\alpha$.

On a encore et toujours $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \{p\}$.

3. fluctue

[ Application 2 page 379
Exercice 102 page 406 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Remarque:** Comme toujours, on admettra que pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on peut approcher $P(F_n \in I_n)$ par $1-\alpha$.

**Exemple 3:** Dans une chaîne de production fonctionnant normalement, 6 % des pièces produites présentent un défaut de fabrication. Le responsable de la chaîne souhaite savoir s'il est nécessaire de procéder à un entretien de la chaîne. Pour cela, il prélève au hasard 100 pièces.

Comme $n = 100 \geqslant 30$, $n \times p = 100 \times 0,06 = 6 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 94 \geqslant 5$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est donné par :

$$I_{100} = \left[0,06 - 1,96\sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{100}}\,;\,0,06 + 1,96\sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{100}}\right] = [0,015\,;0,107].$$

Depuis le chapitre précédent on sait que $u_{0,05} \simeq 1,96$ et $u_{0,01} \simeq 2,58$, d'où :

**Corollaire 1**

Pour une variable aléatoire $\mathbb{X}_n$ suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$, l'intervalle de fluctuation asymptotique :

- au seuil de 95% est $I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$.
- au seuil de 99% est $I_n = \left[p - 2,58\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 2,58\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$.

**1** **Exercice (Nouvelle-Calédonie 2013)** **Partie C**

**1/** ...

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

**2/** On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille $n$, où $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit $Y_n$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille $n$ associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

(a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y_n$ ?

(b) Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

(c) Donner en fonction de $n$ l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

## I.4 Application à la prise de décision

À l'aide d'un échantillon de taille $n$, on souhaite vérifier si on peut raisonnablement penser que la proportion $p$ de la population est bien celle annoncée. Considérant que les conditions d'approximation sont vérifiées, on adopte la procédure suivante :

**Méthode 1** (Règle de prise de décision)

**1/** On détermine l'intervalle $I_n$ de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 % (ou de 99%...).

**2/** On calcule la fréquence $f_{obs}$ réelle dans l'échantillon.

**3/** On conclut :

- si $f_{obs} \in I_n$, on accepte l'hypothèse selon laquelle $p$ est bien la proportion de la population.
- si $f_{obs} \notin I_n$, l'hypothèse faite sur $p$ est rejetée (au risque d'erreur[4] de 5% (ou de 1%)).

Dans les situations concrètes, très souvent, les tirages sont effectués sans remise. La taille des échantillons considérés étant souvent faible par rapport à la taille de la population totale, on peut assimiler les tirages réalisés à des tirages avec remise, et la méthode ci-dessus peut alors s'appliquer.

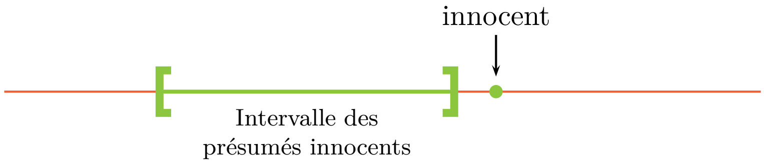
[ Exercice résolu 2 page 388 , **Maths Repère**, *Hachette*]

De façon générale, intuitivement, on pourrait penser que l'on a intérêt à abaisser le seuil de rejet d'une hypothèse, de façon à n'avancer que des hypothèses très fiables. Mais lorsqu'on fait cela, on augmente les chances de commettre une autre, erreur : celle de ne pas rejeter l'hypothèse alors qu'elle est fausse...

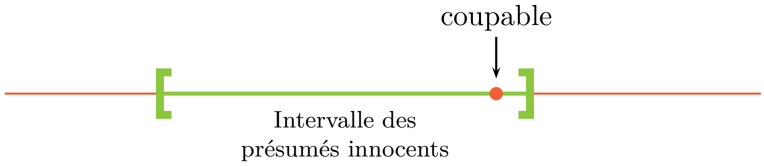
Ainsi, la décision que l'on doit prendre est un compromis adapté à la situation.

On peut schématiser cette remarque ainsi :

- Erreur de type I : rejeter l'hypothèse alors qu'elle est vraie $\Longleftrightarrow$ « condamner un innocent ».




- Erreur de type II : accepter l'hypothèse alors qu'elle est fausse $\Longleftrightarrow$ « laisser un coupable en liberté ».




4. On parle de rejet à tort.

**Exemple 4:** On reprend l'exemple (3) précédent. Si le responsable trouve 9 pièces défectueuses, doit-il procéder à un entretien de sa chaîne ? Même question si 12 pièces sont défectueuses.

- 9 pièces correspondent à une fréquence de $\dfrac{9}{100} = 0,09$. Or, $0,09 \in [\,0,015\,;0,107\,]$ donc, on peut considérer, au seuil de 95 % que la chaîne fonctionne normalement.
- 12 pièces correspondent à une fréquence de $\dfrac{12}{100} = 0,12$. Or, $0,12 \notin [\,0,015\,;0,107\,]$ donc, on peut considérer, au seuil de 95 % que la chaîne doit être réparée.

**Exemple 5 (Classique):** Dans un casino, il a été décidé que les « machines à sous » doivent être réglées sur une fréquence de gain du jouer de $p = 0,6$.

Une fréquence inférieure est supposée faire fuir le client et une fréquence supérieure ruiner le casino.

Trois contrôleurs différents vérifient une même machine.

Le premier a joué 50 fois et gagné 2 fois, le deuxième a joué 120 fois et gagné 14 fois et le troisième a joué 400 fois et gagné 30 fois.

En utilisant à chaque fois l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95%, quelle décision a pu rendre le contrôleur ?

- **Premier contrôleur** : $n = 50 \geqslant 30$ mais $np = 50 \times 0,06 = 3 < 5$ donc les conditions d'approximation ne sont pas réunies. On ne peut rien dire.
- **Deuxième contrôleur** : $n = 120 > 30$ ; $np = 7,2 > 5$ ; $n(1-p) = 112,8 > 5$ : les conditions sont réunies.

$$I_{120} = \left[0,06 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{120}}\ ;\ 0,06 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{120}}\right] \simeq [0,0175\ ;\ 0,1025].$$

La fréquence observée est $f_2 = \dfrac{14}{120} \simeq 0,1167 \notin I_{120}$. Le contrôleur est conduit à rejeter l'hypothèse que $p = 0,06$ (il a trop souvent gagné).

- **Troisième contrôleur** : $n = 400 > 30$ ; $np = 24 > 5$ ; $n(1-p) = 376 > 5$ : les conditions sont réunies.

$$I_{400} = \left[0,06 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{400}}\ ;\ 0,06 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{400}}\right] \simeq [0,0367\ ;\ 0,0833].$$

La fréquence observée est $f_3 = \dfrac{30}{400} = 0,075 \in I_{400}$. Le contrôleur est conduit à accepter l'hypothèse que $p = 0,06$.

2

**Exercice (Publicité mensongère, ou non?)** Une publicité affirme qu'on a une chance sur dix de gagner à un certain jeu.

Au cours d'une étude portant sur un échantillon aléatoire de 400 joueurs, on a compté 28 gagnants.

**1/** Vérifier que les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont remplies.

**2/** Commenter l'annonce faite en effectuant une prise de décision au seuil de risque de 5%.

**3/** Même question au seuil de risque de 1%.

**4/** Cherchons le seuil où la décision « bascule » :

(a) Démontrer que les résultats de cette étude sont en accord avec l'annonce publicitaire lors d'une prise de décision au seuil de risque $\alpha$ si, et seulement si $u_\alpha \geqslant 2$.

(b) En déduire la plus grande valeur[5] de $\alpha$ (à 0,1% prés) pour laquelle les résultats de cette étude sont en accord avec l'annonce publicitaire lors d'une prise de décision au seuil $\alpha$.

## I.5 Continuité entre la seconde et la terminale

**Proposition 1**

L'intervalle asymptotique au seuil de 95% est contenu dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% introduit en seconde (*ie*)

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

**Preuve:** Il suffit simplement de montrer que $1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \iff 1,96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1$ pour tout $p$ de l'intervalle $]0\,;1\,[$.

Or, la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x(1-x)$ est une parabole de maximum $0,25$ atteint pour $x = 0,5$.

D'où, $\forall p \in ]0\,;1\,[$, $0 \leqslant p(1-p) \leqslant 0,25 \implies \sqrt{p(1-p)} \leqslant 0,5$ puis $1,96\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1,96 \times 0,5 = 0,98 \leqslant 1$.

Le résultat est démontré.

L'intervalle de fluctuation de seconde est plus simple a trouver et donnera donc une première estimation si, et seulement si les conditions $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ sont vérifiées et de même pour l'intervalle asymptotique. Il est cependant moins fin. On ne peut pas tout avoir !

5. Cette valeur est appelée *degré de signification* lors d'une prise de décision.

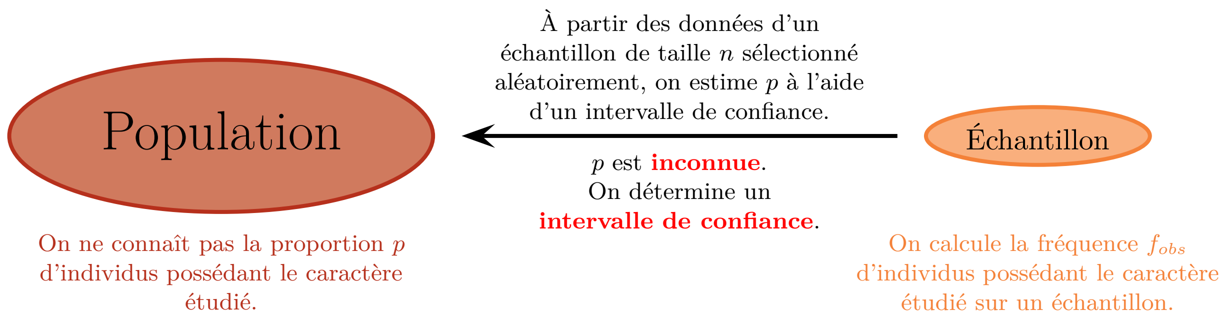
# II Estimation

Dans cette partie, on se pose la question inverse : on souhaite connaître la proportion $p$ des individus d'une population possédant un certain caractère[6].

Or, pour des raisons financières, matérielles, *etc.*... il n'est pas toujours facile, ni même possible, de tester tous les individus[7]. Le problème de l'**estimation** de $p$ se pose donc.

On prélève alors « au hasard » un échantillon de cette population[8] et on estime $p$ à partir de la fréquence $f_{obs}$ du caractère observée sur l'échantillon.

Bien sûr cette fréquence varie d'un échantillon à l'autre... Nous ne pourrons donc pas donner une valeur précise de $p$ mais une « fourchette », un **intervalle de confiance** centré autour de $F_n = \dfrac{\mathbb{X}_n}{n}$ la variable aléatoire donnant la fréquence du nombre de succès qui est naturellement l'estimateur désigné de $p$.




Nous allons voir dans ce paragraphe comment obtenir un tel intervalle.

## II.1 Intervalle de confiance

**Théorème 11**

Soit $\mathbb{X}_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$ où $p \in ]0\,;1[$ est la proportion inconnue d'apparition d'un caractère.

Soit $F_n = \dfrac{\mathbb{X}_n}{n}$, la variable aléatoire donnant la fréquence du nombre de succès.

Alors, pour $n$ assez grand, $p$ appartient à l'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 :

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95.$$

Le but étant d'estimer $p$, l'intervalle de confiance doit pouvoir être calculé en pratique à partir des réalisation de $F_n$. Il est donc important qu'il ne dépende pas du paramètre inconnu $p$[9]

6. par exemple, proportion des pièces défectueuses dans une production, intentions de vote pour un référendum, ....
7. par exemple, on ne peut pas tester le bon fonctionnement de toute la production d'une usine de fusées de feux d'artifice !).
8. On fait un sondage !
9. L'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ne dépend, en effet, que de $F_n$, $n$.

**Preuve:** Posons $I_n = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Si $F_n \in I_n$ (*ie*) $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ alors

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant &\quad F_n - p &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant &\quad -p &\leqslant -F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant &\quad p &\leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc, pour $n$ assez grand $p \in I_n$ (*ie*) $P\left(F_n - \dfrac{1}{n} \leqslant p \leqslant F_n + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0,95$.

[ Démonstration page 386 , **Maths Repère**, *Hachette* ]

**Définition 1** (Intervalle de confiance)

Soit $f_{obs}$ la fréquence observée du caractère sur un échantillon de taille $n$.
On appelle intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion $p$ (inconnue) du caractère dans la population, l'intervalle défini par :

$$\left[f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

En pratique[10], on se place dans le cas où l'échantillon contient au moins 30 individus. Si la fréquence observée $f_{obs}$ est telle que $nf_{obs} \geqslant 5$ et $n(1 - f_{obs}) \geqslant 5$ alors, pour estimer $p$ (proportion inconnue de la population totale), on utilise l'encadrement fourni par un intervalle de confiance au niveau de 95%.

Cet intervalle est parfois aussi appelé « fourchette de sondage ».

[ Application page 381
Exercice résolu 4 page 390 , **Maths Repère**, *Hachette*
Exercice 117 page 409 ]

**Exemple 6 (Classique aussi):** Lors d'un scrutin électoral, on souhaite connaître la proportion $p$ de français votant pour le candidat « A ».

L'institut SOFOS mène une enquête auprès de 1000 personnes tirées au hasard et avec remise (c'est-à-dire qu'une même personne peut éventuellement être choisie plusieurs fois). Le résultat indique qu'une proportion $f = 49\%$ d'entre elles voteront pour le candidat « A ».

**1/** Quelle est la loi suivie par le nombre de personnes votant pour « A » dans une enquête avec remise effectuée auprès de 1000 personnes ?

**Correction:** À chaque étape de l'enquête, il y a une probabilité $p$ de tirer une personne votant pour « A », car on procède à des tirages avec remise. De plus, les 1000 tirages sont effectués de façon indépendante. L'enquête est donc un schéma de Bernoulli dont chaque succès correspond à tirer une personne votant pour « A ». Le nombre de personnes votant pour « A » dans l'enquête suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(1000 ; p)$ où $p$ est inconnu.

**2/** Étant donné le résultat de l'enquête SOFOS, donner un intervalle de confiance à 95 % pour l'estimation de $p$.

10. Donc au bac...

**Correction:** Notons $F$ la proportion de personnes votant pour « A » parmi 1000.

D'après le cours, si $n \geqslant 30$, $np > 5$, $n(1-p) > 5$, un intervalle de confiance au niveau 95% pour $p$ est $\left[F - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \ ; \ F + \dfrac{1}{\sqrt{1000}}\right]$.

Ici, $n = 1000 > 30$, $np \geqslant 5 \iff p \geqslant 0,005$ et $n(1-p) \geqslant 5 \iff p \leqslant 0,995$.

On ne connaît pas $p$ mais, au vu de l'enquête, $f_{obs} = 0,49$, donc on peut raisonnablement penser que $0,05 \leqslant p \leqslant 0,995$ et donc que les conditions sont vérifiées.

L'intervalle de confiance est donc $\left[0,49 - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \ ; \ 0,49 + \dfrac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,458 \ ; \ 0,522]$.

**3/** Peut-on affirmer, d'après l'enquête, que le candidat « A » n'aura pas la majorité des votes, c'est-à-dire que p < 0,5 ?

**Correction:** L'intervalle de confiance précédent montre qu'il est tout à fait possible que $p \geqslant 0,5$.

Donc il n'est pas raisonnable d'affirmer, suite à l'enquête, que le candidat « A » n'obtiendra pas la majorité des votes.

**3**

**Exercice (Élections présidentielles de 2002)** Voici les résultats d'un sondage IPSOS réalisé avant l'élection présidentielle de 2002 pour Le Figaro et Europe 1, les 17 et 18 avril 2002 auprès de 989 personnes, constituant un échantillon national représentatif de la population française âgée de 18 ans et plus et inscrite sur les listes électorales.

On suppose cet échantillon constitué de manière aléatoire (même si en pratique, cela n'est pas réellement le cas).

Les intentions de vote au premier tour pour les principaux candidats sont les suivantes :

20% pour J.Chirac, 18% pour L.Jospin et 14% pour J.-M. Le Pen.

Les médias se préparent pour un second tour entre J.Chirac et L .Jospin.

**1/** Déterminer pour chaque candidat l'intervalle de confiance au niveau de 0,95 de la proportion inconnue d'électeurs ayant l'intention de voter pour lui.

**2/** Le 21 avril, les résultats du premier tour des élections sont les suivantes : 19,88%. pour J.Chirac, 16,18%. pour L .Jospin et 16,86%. pour J-M. Le Pen.

Les pourcentages de voix recueillies par chaque candidat sont-ils bien dans les intervalles de confiance précédents ?

**3/** Pouvait-on, au vu de ce sondage, écarter comme l'ont fait les médias avec un niveau de confiance de 0,95, l'un de ces trois candidats pour le second tour ?

**Remarque:** Cet intervalle de confiance a pour amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. En conséquence, plus la taille de l'échantillon est grande, plus les intervalles de confiance obtenus sont précis.[11]

En outre, si l'on souhaite encadrer $p$ dans un intervalle de longueur $a$, on doit avoir :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant a \iff n \geqslant \frac{4}{a^2}.$$

11. Remarquez cependant que cette amplitude dépend de la taille de l'échantillon, bien sûr, mais pas de la taille de la population totale !

4

**Exercice** Lors d'une épreuve de Mathématiques, on corrige un échantillon de copies afin de décider du barème final pour qu'au moins 80% des notes soient supérieures à 10.

On note $p$ le pourcentage de copies ayant plus de 10.

**1/** Sur un échantillon de 45 copies, 25 ont plus de 10.
Donner l'intervalle de confiance de $p$ avec un niveau de confiance de 0,95.
Pourquoi le jury décide-t-il de modifier le barème ?

**2/** Avec le nouveau barème, sur un échantillon de 36 copies, 25 ont plus de 10.
Pourquoi le jury accepte-t-il ce barème ?

## II.2 Interprétation

- L'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ du **théorème** (II) est aléatoire car il dépend de la réalisation de $F_n$ : il a plus de 95% de chances de contenir le paramètre inconnu $p$.
- En pratique, ayant observé une réalisation $f_{obs}$ de $F_n$ l'intervalle $\left[f_{obs} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f_{obs} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ de la **définition** (1) n'est plus aléatoire : il contient ou non $p$ mais il n'est pas possible de le savoir puisque $p$ est inconnu.
- Supposons que l'on puisse observer $f_{obs}$ de nombreuses fois et notons $f_1$, $f_2$, $\dots f_N$ ces observations pour $N$ grand. On remarquerait la chose suivante : plus de 95% des intervalles $\left[f_i - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f_i + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contiendraient $p$, les autres non. On ne peut pas faire mieux sinon ce ne serait plus ni du hasard, ni de l'aléatoire.

  En pratique, les instituts de sondage, pour essayer d'affiner encore leurs résultats, trient en amont les échantillons mais rajoutent, en faisant cela, d'autres types d'erreurs. C'est le prix à payer.

Une dernière remarque enfin mais **hors programme** :

En TS, l'intervalle de confiance $\left[f_{obs} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f_{obs} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est dit *intervalle de confiance simplifié*. En effet, le théorème de Moivre-Laplace, dans les conditions d'application, fournit un autre intervalle de confiance plus fin d'après la **proposition** (1) et appelé *intervalle de confiance asymptotique* $I_{asymp}$ défini par :

$$I_{asymp} = \left[f_{obs} - 1,96\sqrt{\frac{f_{obs}(1-f_{obs})}{n}} ; f_{obs} + 1,96\sqrt{\frac{f_{obs}(1-f_{obs})}{n}}\right].$$

**Exemple 7:** Un sondage dans une commune révèle que sur les 500 personnes interrogées, 42 % sont mécontentes de l'organisation des transports. Il détermine un intervalle de confiance du pourcentage $p$ de personnes mécontentes dans la commune au niveau de confiance de 95 % :

$$I = \left[0,42 - 1,96\sqrt{\frac{0,42\times 0,58}{500}} ; 0,42 + 1,96\sqrt{\frac{0,42\times 0,58}{500}}\right] = [0,377 ; 0,463].$$

Donc, on peut estimer, au seuil de 95 % que le nombre de personnes mécontentes oscille entre 37,7 % et 46,3 %.

**Remarque:** Avec l'intervalle de confiance simplifié, on, aurait obtenu :

$$I = \left[0,42 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;0,42 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] = [0,375\,;0,465\,] \supset [0,377\,;0,463\,].$$

Cela ne change pas grand chose dans ce cas et l'approximation que l'on a faite semble pertinente.

### II.3 Comparaison de deux échantillons

On souhaite comparer deux proportions $p_1$ et $p_2$ du même caractère dans deux populations différentes. Le raisonnement est le même que pour l'**exemple** (3).

**Méthode 2** (Prise de décision)

**1/** On prélève un échantillon dans la première population dont on mesure la fréquence $f_1$, puis on en déduit l'intervalle de confiance $I_1$ pour $p_1$ ;

**2/** On prélève un échantillon dans la deuxième population dont on mesure la fréquence $f_2$, puis on en déduit l'intervalle de confiance $I_2$ pour $p_2$ ;

**3/** On compare les deux intervalles :

- s'ils sont disjoints, on considère que la différence entre les deux fréquences observées est significative ;
- s'ils ne sont pas disjoints, on accepte l'hypothèse au seuil de de 95 %.

[ Exercice 121 page 410 , **Maths Repère**, *Hachette*]

**Exemple 8:** Un industriel français fabrique des smartphones. Pour contrôler la qualité de la production, il en teste 200 : 92% fonctionnent correctement.
Durant 6 mois, l'entreprise de smartphones travaille à améliorer la qualité de sa production. Un nouvel échantillon de 200 smartphones est prélevé : 97% fonctionnent correctement.
Est-il raisonnable, au niveau de confiance de 95 %, de penser que la production s'est améliorée ?

- Avant l'amélioration, on a $f_{obs} = 0,92$ donc,

$$I_1 = \left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{200}}\,;0,92 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] = [0,849\,;0,991\,].$$

- Après l'amélioration, on a $f_{obs} = 0,97$ donc,

$$I_2 = \left[0,97 - \frac{1}{\sqrt{200}}\,;0,97 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] = [0,899\,;1,041\,].$$

- On a $[\,0,882\,;0,958\,] \cap [\,0,946\,;0,994\,] \neq \varnothing$, donc la différence entre les deux échantillons n'est pas significative : il n'y a pas d'évolution significative de la qualité de la production au niveau de confiance de 95 %.

**Remarque:** Avec les intervalles de confiance non simplifiés, on n'aurait guère fait mieux :

- Avant amélioration avec $f_{obs} = 0,92$, on aurait eu

$$I_1 = \left[0,92 - 1,96\sqrt{\frac{0,92\times 0,08}{200}}\,;0,92 + 1,96\sqrt{\frac{0,92\times 0,08}{200}}\right] = [\,0,882\,;0,958\,].$$

- Après amélioration avec $f_{obs} = 0,97$,

$$I_2 = \left[0,97 - 1,96\sqrt{\frac{0,97 \times 0,03}{200}}\,; 0,97 + 1,96\sqrt{\frac{0,97 \times 0,03}{200}}\right] = [\,0,946\,; 0,994\,].$$

L'intersection $[\,0,882\,; 0,958\,] \cap [\,0,946\,; 0,994\,]$ reste non vide.

### Synthèse

- L'utilisation de l'*intervalle de fluctuation* permet de vérifier, par un échantillon, qu'une proportion est conforme à un résultat annoncé ou supposé.
- Lorsque l'on veut, inversement, déterminer à partir d'un échantillon, la proportion dans la population générale, on utilisera un *intervalle de confiance*.

Population

On prend un échantillon de taille $n$ de la population par tirage au sort

Échantillon

On connaît la proportion $p$ d'individus possédant le caractère étudié.

$p$ est **connue**.
On détermine un **intervalle de fluctuation**.

On sait évaluer la probabilité que $f_{obs}$ (la proportion d'individus ayant le caractère étudié dans cet échantillon) soit dans l'intervalle de fluctuation.

**Conditions d'application de Moivre-Laplace :**

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5 \qquad \text{(MV)}$$

**Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $1-\alpha$ :**

Soient $p \in ]0\,;1\,[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que (MV) soient vérifiées.

$$f_{obs} \in I_{n,1-\alpha} = \left[ p - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,; p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est l'unique réel tel que $P(-u_\alpha \leqslant \mathbb{Z} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$. avec $Z_n = \dfrac{\mathbb{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$$u_{0,05} \simeq 1,96 \quad \text{et} \quad u_{0,01} \simeq 2,58$$

**Méthode 3** (Règle de prise de décision)

On considère un échantillon de taille $n$ d'une population sur laquelle on fait l'hypothèse qu'une proportion $p$ possède le caractère étudié.

**1/** On détermine l'intervalle $I_{n,1-\alpha}$ de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95 %
(ou de 99%...).

**2/** On calcule la fréquence $f_{obs}$ réelle dans l'échantillon.

**3/** Si $n$ et $p$ vérifient (MV), on peut conclure :

- si $f_{obs} \in I_n$, on accepte l'hypothèse selon laquelle $p$ est bien la proportion de la population.
- si $f_{obs} \notin I_n$, l'hypothèse faite sur $p$ est rejetée
(au risque d'erreur de 5% (ou de 1%)).

Population

On ne connaît pas la proportion $p$ d'individus possédant le caractère étudié.

À partir des données d'un échantillon de taille $n$ sélectionné aléatoirement, on estime $p$ à l'aide d'un intervalle de confiance.

$p$ est **inconnue**.
On détermine un **intervalle de confiance**.

Échantillon

On calcule la fréquence $f_{obs}$ d'individus possédant le caractère étudié sur un échantillon.

**Intervalle de confiance au seuil des 95% :**

$$\text{Si (MV) vérifié alors } I_{Confiance,95\%} = \left[ f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Longueur $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

**Méthode 4** (Prise de décision)

Pour comparer deux proportions $p_1$ et $p_2$ du même caractère dans deux populations différentes.

**1/** On prélève un échantillon dans la première population dont on mesure la fréquence $f_1$, puis on en déduit l'intervalle de confiance $I_1$ pour $p_1$ ;

**2/** On prélève un échantillon dans la deuxième population dont on mesure la fréquence $f_2$, puis on en déduit l'intervalle de confiance $I_2$ pour $p_2$ ;

**3/** On compare les deux intervalles :

- S'ils sont disjoints, on considère que la différence entre les deux fréquences observées est significative.
- S'ils ne sont pas disjoints, on accepte l'hypothèse au seuil de de 95 % (*ie*) on considère qu'une proportion est supérieure à l'autre.

## Synthèse

- L'utilisation de l'*intervalle de fluctuation* permet de vérifier, par un échantillon, qu'une proportion est conforme à un résultat annoncé ou supposé.
- Lorsque l'on veut, inversement, déterminer à partir d'un échantillon, la proportion dans la population générale, on utilisera un *intervalle de confiance*.

Chapitre

17

# Bac 2015 obligatoire

## Sommaire

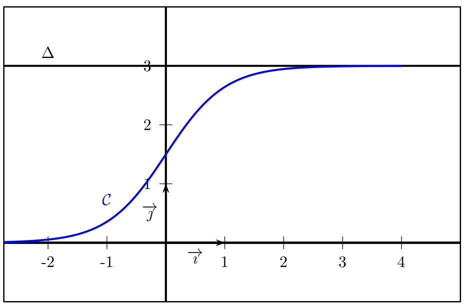


## I Pondichéry 17 avril 2015

1 **Exercice** **Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$




Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = 3$.

**1/** Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**2/** Justifier que la droite $\Delta$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

**3/** Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

**Partie B**

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

**1/** Justifier que la fonction $h$ est positive sur $\mathbb{R}$.

**2/** On désigne par $H$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
Démontrer que $H$ est une primitive de $h$ sur $\mathbb{R}$.

**3/** Soit $a$ un réel strictement positif.

(a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

(c) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan défini par
$$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{array}\right.$$
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

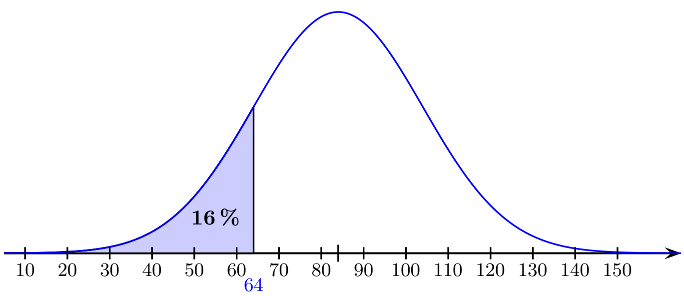
**2** **Exercice** Déjà fait.

**3** **Exercice** **Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment**

**Partie A** **Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager**

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire $X$ suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type $\sigma$. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de $X$ est donnée ci-dessous.




**1/** (a) En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

(b) Quelle valeur approchée entière de $\sigma$ peut-on proposer ?

**2/** On note $Z$ la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par $Z$ ?

(b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

(c) En déduire la valeur de $\sigma$, arrondie à $10^{-3}$.

**3/** Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à $10^{-3}$.

(a) Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.

(b) Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

**Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro**

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.

L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.

Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

**1/** On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

(a) Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à $10^{-3}$.

(b) Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à $10^{-3}$.

**2/** L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.

On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note $Y$ la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

(a) Justifier que $Y$ prend les valeurs 65 et $-334$ puis donner la loi de probabilité de $Y$.

(b) Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

4

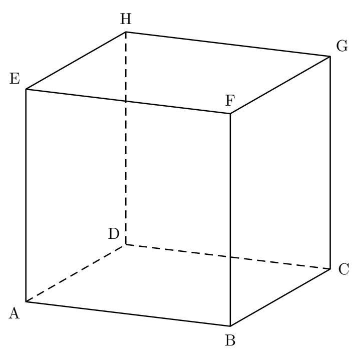
**Exercice** Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A~;~\overrightarrow{AB},~\overrightarrow{AD},~\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives

$$M\left(1~;~1~;~\frac{3}{4}\right),$$

$$N\left(0~;~\frac{1}{2}~;~1\right),$$

$$P\left(1~;~0~;~-\frac{5}{4}\right).$$




**1/** Placer M, N et P sur la figure.

**2/** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

**3/** On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

(a) Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

(b) À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

**4/** On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

**5/** On considère le vecteur $\vec{n}(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$ normal au plan (MNP).

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

(b) On considère la droite $\Delta$ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta$.

**6/** Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite $\Delta$.

(a) Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\ ;\ \frac{24}{35}\ ;\ \frac{23}{35}\right)$.

(b) On donne $\mathrm{FK} = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

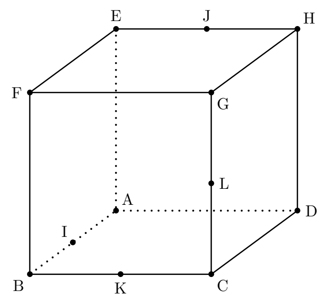
| Algorithme 1 | Algorithme 2 (à compléter) |
|---|---|
| Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$ | Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$ |
| $d$ prend la valeur $x_N - x_M$ | $d$ prend la valeur $x_N - x_M$ |
| $e$ prend la valeur $y_N - y_M$ | $e$ prend la valeur $y_N - y_M$ |
| $f$ prend la valeur $z_N - z_M$ | $f$ prend la valeur $z_N - z_M$ |
| $g$ prend la valeur $x_P - x_M$ | $g$ prend la valeur $x_P - x_M$ |
| $h$ prend la valeur $y_P - y_M$ | $h$ prend la valeur $y_P - y_M$ |
| $i$ prend la valeur $z_P - z_M$ | $i$ prend la valeur $z_P - z_M$ |
| $k$ prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$ | $k$ prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$ |
| Afficher $k$ | |

# II Liban 27 mai 2015

**1** Exercice ABCDEFGH est un cube.

I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.




**1/** (a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

**2/** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

**3/** Soit $M$ le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point $M$.

**4/** Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

**5/** Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

**6/** Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

**2** **Exercice** On définit la suite $(u_n)$ de la façon suivante :

pour tout entier naturel $n$, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

**1/** Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

**2/** (a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

(b) En déduire la valeur exacte de $u_1$.

**3/** (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang $n$ de la suite $(u_n)$ où $n$ est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

| | |
|---|---|
| Variables : | $i$ et $n$ sont des entiers naturels |
| | $u$ est un réel |
| Entrée : | Saisir $n$ |
| Initialisation : | Affecter à $u$ la valeur ... |
| Traitement : | Pour $i$ variant de 1 à ... |
| | \|Affecter à $u$ la valeur ... |
| | Fin de Pour |
| Sortie : | Afficher $u$ |

(b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0,6931 | 0,3069 | 0,1931 | 0,1402 | 0,1098 | 0,0902 | 0,0475 | 0,0099 | 0,0050 |

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite $(u_n)$ peut-on émettre ?

**4/** (a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

(b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

**5/** On appelle $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. Démontrer que $\ell = 0$.

**3** **Exercice** Déjà fait.

**4** **Exercice** En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- $A$ l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- $B$ l'événement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- $V$ l'événement « La personne interrogée dit la vérité ».

**1/** Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

**2/** (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

(b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

**3/** Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.

**4/** L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.
*estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?

**5/** Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.

L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.

Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

# III Centres étrangers 10 juin 2015

1 **Exercice** *Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième. Les parties A, B et C sont indépendantes.*

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

**Partie A**

**1/** Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?

On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

**2/** Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

**Partie B**

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre $X$ de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

**1/** Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.

**2/** Le responsable du magasin veut connaître le nombre $n$ de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

Déterminer la plus petite valeur de l'entier $n$ remplissant cette condition.

**Partie C**

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- $p$ la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
- $H$ l'événement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
- $D$ l'événement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

**1/** Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

**2/** Exprimer en fonction de $p$ la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel $p$.
Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?

**3/** Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

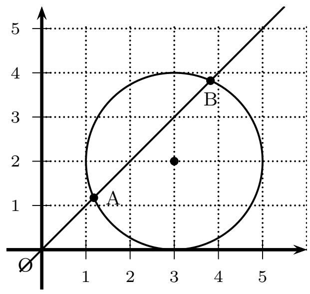
2

**Exercice** *Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

**1.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $S$ l'ensemble des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées (3 ; 2) et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.




**Affirmation 1 :** l'ensemble $S$ est le segment [AB].

**2. Affirmation 2 :** le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel.

*Pour les questions 3 et 4, on considère les points E (2 ; 1 ; - 3), F (1 ; -1 ; 2) et G (-1 ; 3 ; 1) dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*

**3. Affirmation 3 :** une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t \\ z &=& 7-10t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

**4. Affirmation 4 :** une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\text{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.

3

**Exercice** Soit $a$ un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

**1/** Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

(a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel $x$ : $g'(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(2\mathrm{e}^x + 1)$.

(b) Déterminer les variations de la fonction $g$ et donner la valeur de son minimum.

(c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**2/** Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant 0$.

(b) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ est convergente.

(c) Dans le cas où $a$ vaut 0, donner la limite de la suite $(u_n)$.

**3/** Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite $(u_n)$ étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant a$.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**4/** Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier $n$ tel que $u_n > M$, où $M$ désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

| | |
|---|---|
| **Variables** | $n$ est un entier, $u$ et $M$ sont deux réels |
| **Initialisation** | $u$ prend la valeur $0,02$<br>$n$ prend la valeur 0<br>Saisir la valeur de $M$ |
| **Traitement** | Tant que ...<br>...<br>...<br>Fin tant que |
| **Sortie** | Afficher $n$ |

(a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

4

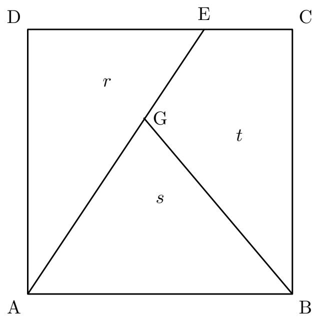
**Exercice** *Les parties A et B sont indépendantes*

Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.

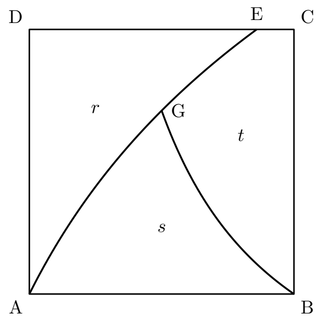
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

- Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
  - une des lignes est le segment [AD] ;
  - une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC] ;
  - la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.
- Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre $0,3$ et $0,4$, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées $r$, $s$, $t$ sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

**Partie A : étude de la proposition A**

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.

Déterminer les coordonnées des points E et G.

**Partie B : étude de la proposition B**

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction $f$ définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$ ;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction $g$ définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, où $k$ est un réel positif qui sera déterminé.

**1/** (a) Déterminer l'abscisse du point E.

(b) Déterminer la valeur du réel $k$, sachant que l'abscisse du point G est égale à $0,5$.

**2/** (a) Démontrer que la fonction $f$ admet pour primitive la fonction $F$ définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x.$$

(b) Démontrer que $r = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$.

**3/** Déterminer une primitive $G$ de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\ :\ +\infty[$.

**4/** On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.

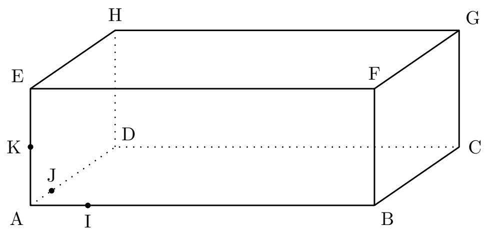
La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

# IV Polynésie 12 juin 2015

**1**

**Exercice** On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.
I, J et K sont les points tels que

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$




On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AI}},\ \overrightarrow{\mathrm{AJ}},\ \overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)$.

**1/** Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ -9)$ est normal au plan (IJG).

**2/** Déterminer une équation du plan (IJG).

**3/** Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

**4/** Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.

**2**

**Exercice** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v})$. À tout point $M$ d'affixe $z$ du plan, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

**1/** Un point $M$ est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point $M'$ associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

**2/** Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

**3/** Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M$ d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x$ et $y$ sont réels, tels que le point $M'$ associé soit sur l'axe des réels.

**4/** Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

**3**

**Exercice** Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire $X_1$ suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type$\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire $X_2$ suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à $10^{-2}$ près.

**1/** Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?

**2/** (a) Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

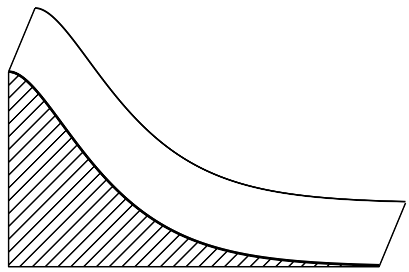
(b) De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1, 70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

4

**Exercice** Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas.

Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :

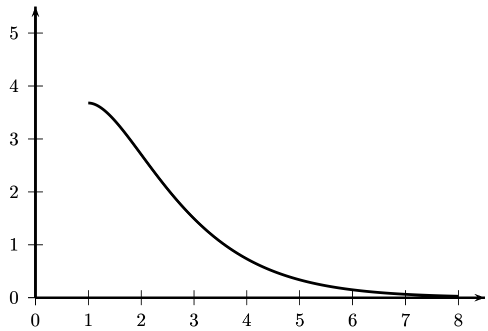


**Partie A Modélisation**

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[1\,;\,8]$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.




**1/** On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.

Déterminer la valeur de l'entier $b$.

**2/** On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3,5$ et 4 mètres de haut.

Déterminer la valeur de l'entier $a$.

**Partie B Un aménagement pour les visiteurs**

On admet dans la suite que la fonction $f$ introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1\,;\,8]$ par :

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

**1/** Soit $g$ la fonction définie sur $[1\,;\,8]$ par :

$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée de la fonction $g$.

**2/** Quel est le montant du devis de l'artiste ?

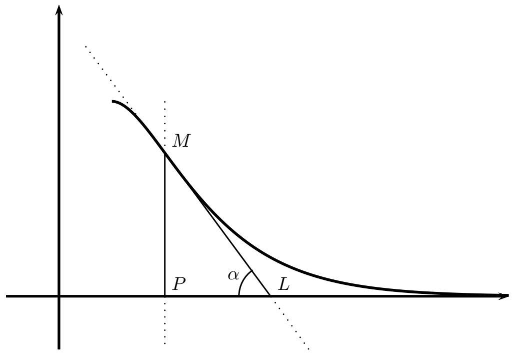
**Partie C Une contrainte à vérifier**

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point $M$ de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle $\alpha$ l'angle aigu formé par la tangente en $M$ à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.

Les contraintes imposent que l'angle $\alpha$ soit inférieur à 55 degrés.




**1/** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\,;\,8]$. On admet que, pour tout $x$ de l'intervalle $[1\,;\,8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
Étudier les variations de la fonction $f'$ sur l'intervalle $[1\,;\,8]$.

**2/** Soit $x$ un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit $M$ le point d'abscisse $x$ de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.

**3/** Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

5

**Exercice** Soit $(v_n)$ la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel $n$ non nul.

On définit ensuite la suite $(S_n)$ pour tout entier naturel $n$ non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de $(S_n)$.

**Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme**

**1/** Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de $S_n$ pour une valeur de $n$ choisie par l'utilisateur :

| | |
|---|---|
| Variables : | $n$, $k$ entiers |
| | $S$, $v$ réels |
| Initialisation : | Saisir la valeur de $n$ |
| | $v$ prend la valeur ... |
| | $S$ prend la valeur ... |
| Traitement : | Pour $k$ variant de ... à ... faire |
| | ... prend la valeur ... |
| | ... prend la valeur ... |
| | Fin Pour |
| Sortie : | Afficher $S$ |

**2/** À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de $S_n$. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | 2,4 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 |

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite $(S_n)$.

**Partie B – Étude d'une suite auxiliaire**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit la suite $(u_n)$ par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

**1/** Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

**2/** Calculer $u_2$, $u_3$ et $u_4$. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

**3/** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

**Partie C – Étude de $(Sn)$**

**1/** Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $v_n$ en fonction de $u_n$, puis $v_n$ en fonction de $n$.

**2/** Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

**3/** Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $S_n$ en fonction de $n$. En déduire la limite de la suite $(S_n)$.

## V Asie 16 juin 2015

**1**

**Exercice** *Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.*

**Partie A**

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

**1/** Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.

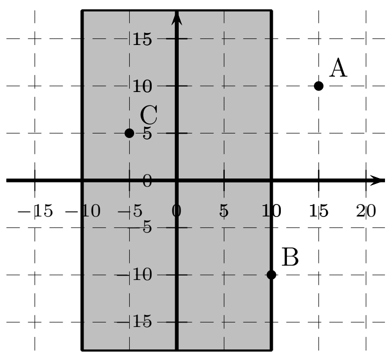
**2/** Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

**Partie B**

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.

On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

On note $X$ la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.




Ainsi, par exemple :

- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et $X$ prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et $X$ prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et $X$ prend la valeur $-5$.

On suppose que la variable aléatoire $X$ suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

**1/** Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.

**2/** Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0,6$ ?

**Partie C**

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire $T$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en $\mathrm{h}^{-1}$).

**1/** Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2000 heures ?

**2/** *Restitution organisée des connaissances*

Dans cette question, $\lambda$ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $T$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, est définie par : $\mathrm{E}(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t$.

(a) On considère la fonction $F$, définie pour tout réel $t$ par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Démontrer que la fonction $F$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie pour tout réel $t$ par : $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

(b) En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire $T$ est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

2

**Exercice** *Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives$x + y + z - 5 = 0$ et $7x - 2y + z - 2 = 0$.

**1/** **Affirmation 1 :** les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

**2/** **Affirmation 2 :** les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcc} x &=& t \\ y &=& 2t+1 \\ z &=& -3t+4 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

**3/** Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.

On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.

**Affirmation 3 :** au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle [0,658 ; 0,771].

**4/** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| VARIABLES | $a$, $b$ sont deux nombres réels tels que $a < b$<br>$x$ est un nombre réel<br>$f$ est une fonction définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ |
| TRAITEMENT | Lire $a$ et $b$<br>Tant que $b - a > 0,3$<br>$x$ prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$<br>Si $f(x)f(a) > 0$, alors $a$ prend la valeur $x$<br>sinon $b$ prend la valeur $x$<br>Fin Si<br>Fin Tant que<br>Afficher $\dfrac{a+b}{2}$ |

**Affirmation 4 :** si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

3

**Exercice** Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $\text{j} = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

**Partie A : propriétés du nombre $j$**

**1/** (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

(b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

**2/** Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

**3/** Démontrer les égalités suivantes :

(a) $\text{j}^3 = 1$ ; (b) $\text{j}^2 = -1 - \text{j}$.

**4/** On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes $1, \text{j}$ et $\text{j}^2$ dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

**Partie B**

Soit $a$, $b$, $c$ trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \text{j}b + \text{j}^2c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres $a$, $b$, $c$ dans le plan.

**1/** En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \text{j}(c - b)$.

**2/** En déduire que AC = BC .

**3/** Démontrer l'égalité : $a - b = \text{j}^2(b - c)$.

**4/** En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

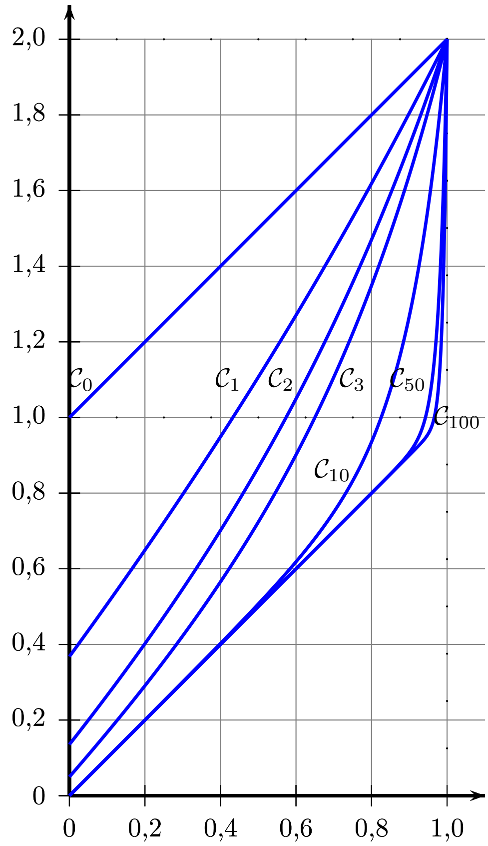
4

**Exercice**

Pour tout entier naturel $n$, on définit la fonction $f_n$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction $f_n$ dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathcal{C}_n$ sont représentées ci-contre.




**Partie A : généralités sur les fonctions $f_n$**

**1/** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, la fonction $f_n$ est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

**2/** Montrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.

**3/** À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathcal{C}_n$ pour les grandes valeurs de $n$ ?

Démontrer cette conjecture.

**Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque $x$ est fixé**

Soit $x$ un réel fixé de l'intervalle $[0\,;\,1]$ . Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = f_n(x)$.

**1/** Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite $(u_n)$.

**2/** Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite $(u_n)$.

**Partie C : aire sous les courbes $\mathcal{C}_n$**

Pour tout entier naturel $n$, on note $A_n$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite $(A_n)$ lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

# VI Antilles-Guyane 22 juin 2015

1

**Exercice** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

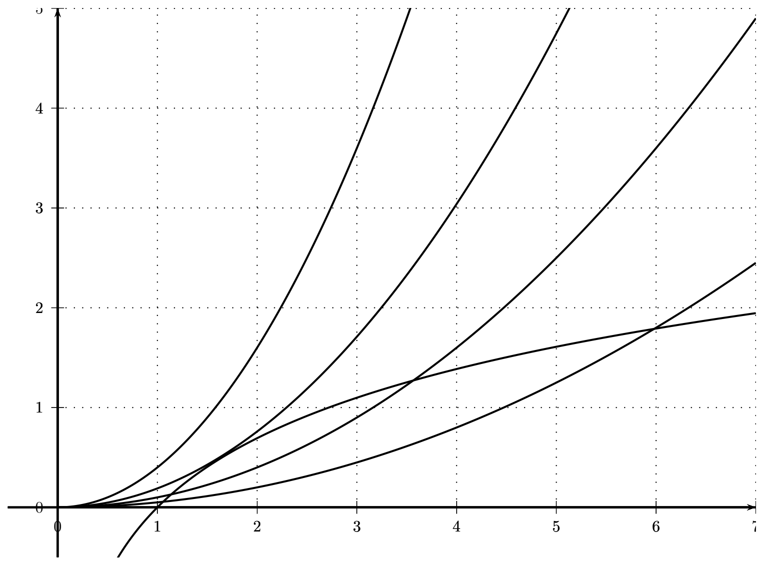
Pour tout réel $a$ strictement positif, on définit sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction $g_a$ par

$g_a(x) = ax^2$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $\Gamma_a$ celle de la fonction $g_a$ dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\Gamma_a$ suivant les valeurs du réel strictement positif $a$.

**Partie A**

On a construit les courbes $\mathcal{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.




**1/** Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.

**2/** Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_a$ suivant les valeurs (à préciser) du réel $a$.

**Partie B**

Pour un réel $a$ strictement positif, on considère la fonction $h_a$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

**1/** Justifier que $x$ est l'abscisse d'un point $M$ appartenant à l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_a$ si et seulement si $h_a(x) = 0$.

**2/** (a) On admet que la fonction $h_a$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et on note $h'_a$ la dérivée de la fonction $h_a$ sur cet intervalle.
Le tableau de variation de la fonction $h_a$ est donné ci-dessous.
Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour $x$ appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'_a(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h_a(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{-1-\ln(2a)}{2}$ | $\searrow$ | |

(b) Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction $h_a$ en $+\infty$.
On ne demande pas de justifier la limite de $h_a$ en 0.

**3/** Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

(a) Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.
On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\ ;\ +\infty\right[$.

(b) Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{0,1}$ ?

**4/** Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

(a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

(b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier.

**5/** Quelles sont les valeurs de $a$ pour lesquelles $\mathcal{C}$ et $\Gamma_a$ n'ont aucun point d'intersection ?
Justifier.

2

**Exercice** *La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B*

**Partie A**

On considère une variable aléatoire $X$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ avec $\lambda > 0$. On rappelle que, pour tout réel $a$ strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de $X$, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

**1/** Soit $x$ un nombre réel strictement positif. Vérifier que

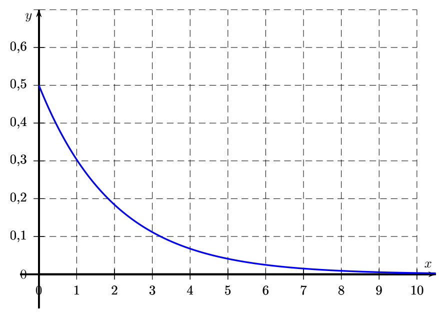
$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

**2/** En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

**Partie B**

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée $X$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ avec $\lambda > 0$.

**1/** Sur le graphique :




(a) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

(b) Indiquer où se lit directement la valeur de $\lambda$.

**2/** On suppose que $E(X) = 2$.

(a) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ ?

(b) Calculer la valeur de $\lambda$.

(c) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,01$ près. Interpréter ce résultat.

(d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

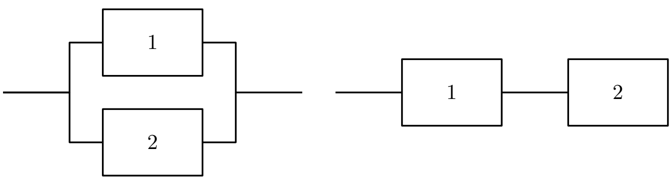
**Partie C**

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note $D_1$ l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note $D_2$ l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux événements $D_1$ et $D_2$ sont indépendants et que

$P\left(D_1\right) = P\left(D_2\right) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



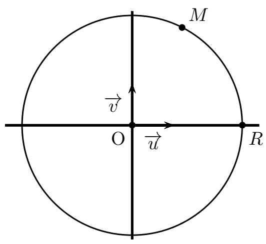

Circuit en parallèle A　　Circuit en série B

**1/** Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

**2/** Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

3

**Exercice** **Partie A**




Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on a placé un point $M$ d'affixe $z$ appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point $R$ intersection du cercle de centre O passant par $M$ et du demi-axe $[\mathrm{O}\ ;\ \vec{u})$.

**1/** Exprimer l'affixe du point $R$ en fonction de $z$.

**2/** Soit le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par : $z' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z+|z|}{2}\right)$.

Reproduire la figure sur la copie et construire le point $M'$.

**Partie B**

On définit la suite de nombres complexes $(z_n)$ par un premier terme $z_0$ appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel $n$, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de $z_0$.

**1/** Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand $z_0$ est un nombre réel négatif ?

**2/** Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand $z_0$ est un nombre réel positif ?

**3/** On suppose désormais que $z_0$n'est pas un nombre réel.

(a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ ?

(b) Démontrer cette conjecture, puis conclure.

4

**Exercice** **Partie A** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables : | $k$ et $p$ sont des entiers naturels<br>$u$ est un réel |
| Entrée : | Demander la valeur de $p$ |
| Traitement | : Affecter à $u$ la valeur 5<br>Pour $k$ variant de 1 à $p$<br>Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$<br>Fin de pour |
| Sortie : | Afficher $u$ |

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Quel nombre obtient-on en sortie ?

**Partie B**

Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

**1/** Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de $u_n$ pour $n$ variant de 1 à $p$.

**2/** À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 1 | $-0,5$ | $-0,75$ | $-0,375$ |

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite $(u_n)$ est décroissante ?
Justifier.

**3/** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite $(u_n)$ ?

**4/** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $0,5$ et exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$.

**5/** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

**6/** Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)$.

# VII Métropole 22 juin 2015

1 **Exercice** *Les résultats des probabilités seront arrondis à $10^{-3}$ près.*

**Partie 1**

**1/** Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ est un réel strictement positif donné.
On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

(a) Soit $c$ et $d$ deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

(b) Déterminer une valeur de $\lambda$ à $10^{-3}$ près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

(c) Donner l'espérance de la variable aléatoire $X$
**Dans la suite de l'exercice on prend $\boldsymbol{\lambda = 0,15}$.**

(d) Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

(e) Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.

**2/** Soit $Y$ une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type $1,95$.

(a) Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.

(b) Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

**Partie 2**

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à $0,067$ ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à $0,015$ et $0,010$ ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

**1/** Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

**2/** Montrer qu'une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut $0,057$.

**Pour la question suivante, on utilise cette valeur.**

**3/** Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.

Ses doutes sont-ils justifiés ?

**2** **Exercice** Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, B$(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, C$(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$, D$(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point $M$ se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point $N$ se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point $M$ est en A et le point $N$ est en C.

On note $M_t$ et $N_t$ les positions des points $M$ et $N$ au bout de $t$ secondes, $t$ désignant un nombre réel positif.

On admet que $M_t$ et $N_t$, ont pour coordonnées : $M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0,8t\ ;\ 1+0,6t)$.

*Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

**1/** (a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

(b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.

(c) Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point E$(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

(d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

**2/** (a) Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

(b) À quel instant $t$ la longueur $M_tN_t$ est-elle minimale ?

3

**Exercice**

**1/** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue $z$ :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

**2/** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.

(a) Calculer le module et un argument du nombre $a$.

(b) Donner la forme exponentielle des nombres $a$ et $b$.

(c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.

(d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

**3/** On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(a) Montrer que $b' = 8$.

(b) Calculer le module et un argument du nombre $a'$.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

**4/** On admet que si $M$ et $N$ sont deux points du plan d'affixes respectives $m$ et $n$ alors le milieu $I$ du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur $MN$ est égale à $|n - m|$.

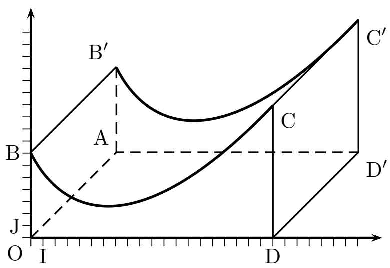
(a) On note $r$, $s$ et $t$ les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].

Calculer $r$ et $s$. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

(b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

4

**Exercice**




Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

**Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.**

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par :

$$f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 7.$$

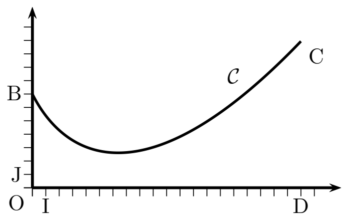
On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le repère (O, I, J).

**Partie 1**

**1/** Montrer que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

**2/** En déduire les variations de $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ et dresser son tableau de variation.

**3/** Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.




La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

**4.** On admet que la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction $g'$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

Déterminer une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.

**Partie 2**

*Les trois questions de cette partie sont indépendantes*

**1/** Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

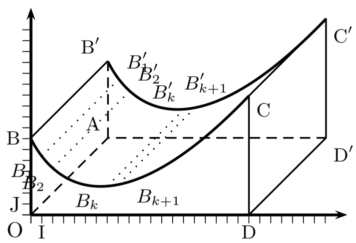
$\mathrm{P}_1$ : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

$\mathrm{P}_2$ : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

**2/** On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m$^2$ par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

**3.** On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\,;\,f(k))$ pour $k$ variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = \mathrm{B}$.




On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ allant de $B_k$ à $B_{k+1}$ par le segment $[B_kB_{k+1}]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B_k$ (voir figure).

(a) Montrer que pour tout entier $k$ variant de 0 à 19, $B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}$.

(b) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

| | |
|---|---|
| Variables | $S$ : réel<br>$K$ : entier |
| Fonction | $f$ : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$ |
| Traitement | $S$ prend pour valeur 0<br>Pour $K$ variant de … à …<br>$S$ prend pour valeur ……<br>Fin Pour |
| Sortie | Afficher … |

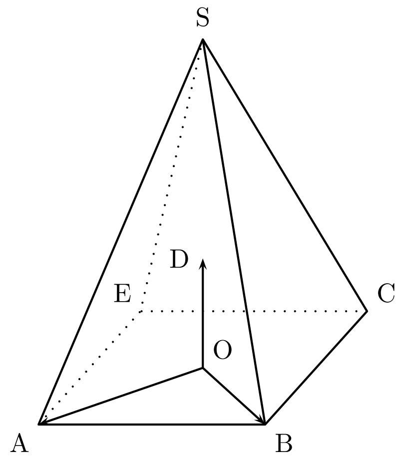
# VIII Amérique du Nord 2 juin 2015

**1**

**Exercice** Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O.

Soit D le point de l'espace tel que $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OD}}\right)$ soit un repère orthonormé.

Le point S a pour coordonnées $(0 ; 0 ; 3)$ dans ce repère.




**Partie A**

**1/** Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure .

**2/** Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure.

**3/** Soit K le point de coordonnées $\left(\dfrac{5}{6} ; -\dfrac{1}{6} ; 0\right)$.

Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

**Partie B**

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

**1/** On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0 ; \dfrac{2}{3} ; 1\right)$.

Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

**2/** Donner une représentation paramétrique de la droite $(d)$ orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

**3/** Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite $(d)$ et du plan (EAU).

**4/** Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

**2**

**Exercice** On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel $n$, on définit les points $(A_n)$ par leurs coordonnées $(x_n ; y_n)$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} & = & 0,6x_n + 0,8y_n \end{array}\right.$$

**1/** (a) Déterminer les coordonnées des points $A_0$, $A_1$ et $A_2$.

(b) Pour construire les points $A_n$ ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

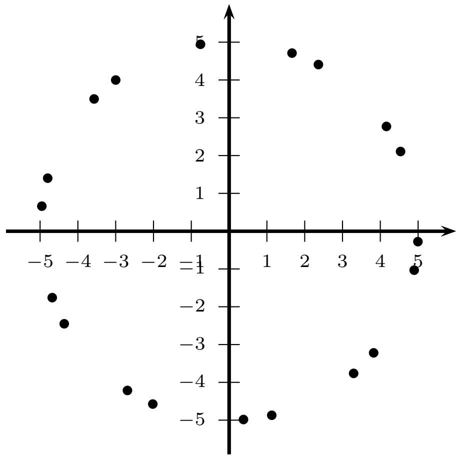
Variables :
$i, x, y, t$ : nombres réels

Initialisation :
$x$ prend la valeur $-3$
$y$ prend la valeur 4

Traitement :
Pour $i$ allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$
$t$ prend la valeur $x$
$x$ prend la valeur ....
$y$ prend la valeur ....
Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points $A_0$ à $A_{20}$.

(c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points $A_0$, $A_1$ et $A_2$.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points $A_n$ pour tout $n$ entier naturel ?

**2/** Le but de cette question est de construire géométriquement les points $A_n$ pour tout $n$ entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel $n$, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point $A_n$.

(a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

(b) On admet qu'il existe un réel $\theta$ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.
Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

(d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe $z_0$.

(e) Pour tout entier naturel $n$, déterminer, en fonction de $n$ et $\theta$, un argument du nombre complexe $z_n$.
Représenter $\theta$ sur la figure.
Expliquer, pour tout entier naturel $n$, comment construire le point $A_{n+1}$ à partir du point $A_n$.

3

**Exercice** Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

**Partie A Contrôle avant la mise sur le marché**

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.

La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire $X$ suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de $\sigma$.

**1/** Calculer la probabilité de l'événement $M$ : « la tablette est mise sur le marché ».

**2/** On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.

Déterminer la valeur de $\sigma$ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché »soit égale à $0,97$.

**Partie B Contrôle à la réception**

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.

L'entreprise a trois fournisseurs différents :

le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.

On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note $F_i$ l'événement « la fève provient du fournisseur $i$ », pour $i$ prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et $C$ l'événement « la fève est conforme ».

**1/** Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à $10^{-2}$.

**2/** Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes.

Quelle proportion $p$ de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

4

**Exercice** **Partie A**

Soit $u$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

**1/** Justifier que la fonction $u$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

**2/** Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ comprise entre 2 et 3.

**3/** En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de $x$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal.

**1/** Déterminer la limite de la fonction $f$ en 0.

**2/** (a) Démontrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où $u$ est la fonction définie dans la partie A.

(b) En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

**Partie C**

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

**1/** Démontrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

**2/** On admet que la fonction $H$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

est une primitive de la fonction $h$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

# Bac - Sujet A

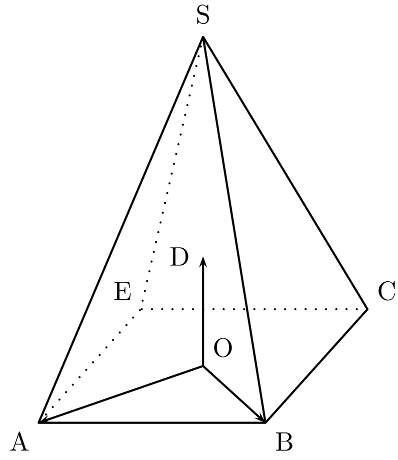
1

### Exercice (Amérique du Nord (exercice n°1))

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O.

Soit D le point de l'espace tel que $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right)$ soit un repère orthonormé.

Le point S a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,3)$ dans ce repère.




**Partie A**

**1/** Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure .

**2/** Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure.

**3/** Soit K le point de coordonnées $\left(\dfrac{5}{6}\ ;\ -\dfrac{1}{6}\ ;\ 0\right)$.

Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

**Partie B**

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

**1/** On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.

Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

**2/** Donner une représentation paramétrique de la droite $(d)$ orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

**3/** Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite $(d)$ et du plan (EAU).

**4/** Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

2

**Exercice (Antilles-Guyane (exercice n° 4))** **Partie A** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables : | $k$ et $p$ sont des entiers naturels<br>$u$ est un réel |
| Entrée : | Demander la valeur de $p$ |
| Traitement | : Affecter à $u$ la valeur 5<br>Pour $k$ variant de 1 à $p$<br>Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$<br>Fin de pour |
| Sortie : | Afficher $u$ |

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Quel nombre obtient-on en sortie ?

**Partie B**

Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

**1/** Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de $u_n$ pour $n$ variant de 1 à $p$.

**2/** À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 1 | $-0,5$ | $-0,75$ | $-0,375$ |

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite $(u_n)$ est décroissante ?

Justifier.

**3/** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.

Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite $(u_n)$ ?

**4/** Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.

Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors $v_n$ en fonction de $n$.

**5/** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

**6/** Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)$.

# Bac - Sujet B

1

**Exercice (Amérique du Nord (exercice n° 2))** On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel $n$, on définit les points $(A_n)$ par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 &= -3 \\ y_0 &= 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} &= 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} &= 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

**1/** (a) Déterminer les coordonnées des points $A_0$, $A_1$ et $A_2$.

(b) Pour construire les points $A_n$ ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

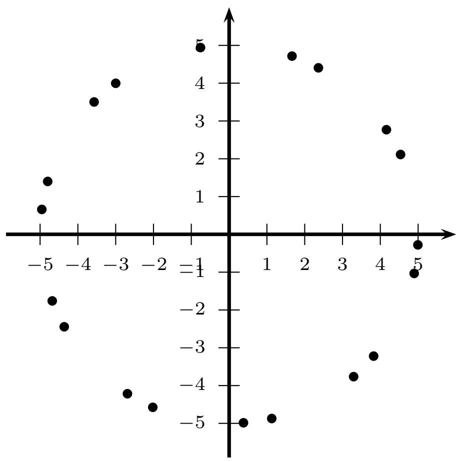
```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées (x ; y)
t prend la valeur x
x prend la valeur ....
y prend la valeur ....
Fin Pour
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points $A_0$ à $A_{20}$.

(c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points $A_0$, $A_1$ et $A_2$.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points $A_n$ pour tout $n$ entier naturel ?

**2/** Le but de cette question est de construire géométriquement les points $A_n$ pour tout $n$ entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel $n$, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point $A_n$.

(a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

(b) On admet qu'il existe un réel $\theta$ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.
Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

(d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe $z_0$.

(e) Pour tout entier naturel $n$, déterminer, en fonction de $n$ et $\theta$, un argument du nombre complexe $z_n$.

Représenter $\theta$ sur la figure.

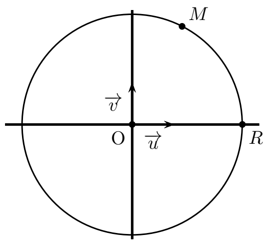
Expliquer, pour tout entier naturel $n$, comment construire le point $A_{n+1}$ à partir du point $A_n$.

**2**

## Exercice (Antilles-Guyane (exercice n° 3))

**Partie A**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ on a placé un point $M$ d'affixe $z$ appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point $R$ intersection du cercle de centre O passant par $M$ et du demi-axe $[\text{O}\ ;\ \vec{u})$.




**1/** Exprimer l'affixe du point $R$ en fonction de $z$.

**2/** Soit le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par : $z' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z+|z|}{2}\right)$.

Reproduire la figure sur la copie et construire le point $M'$.

**Partie B**

On définit la suite de nombres complexes $(z_n)$ par un premier terme $z_0$ appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel $n$, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de $z_0$.

**1/** Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand $z_0$ est un nombre réel négatif ?

**2/** Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand $z_0$ est un nombre réel positif ?

**3/** On suppose désormais que $z_0$ n'est pas un nombre réel.

(a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ ?

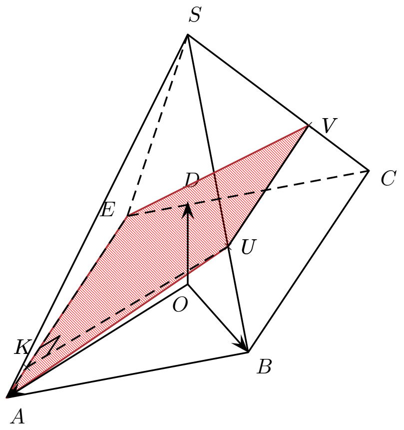
(b) Démontrer cette conjecture, puis conclure.

# Bac - Sujet A (Correction)

1

## Exercice (Amérique du Nord (exercice n°1))

**Partie A**




**1/** On trace la parallèle à $(OB)$ passant par $D$.

**2/** $(AUE) \cap (BCS) = (UV)$. Comme $ABCE$ est un carré, $(AE) \mathbin{/\!/} (BC)$.

D'après le théorème du toit, $(UV) \mathbin{/\!/}$ à$(BC)$. Le point $V$ est donc l'intersection entre la parallèle à $(BC)$ passant par $U$ et $(SC)$.

**3/** $\overrightarrow{AK} = \left(\dfrac{-1}{6}\ ;\ \dfrac{-1}{6}\ ;\ 0\right) = \dfrac{1}{6}(-1\ ;\ -1\ ;\ 0)$
$= \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AE} \implies A$, $K$ et $E$ sont alignés.

Déterminons les coordonnées de $U$. Par construction $\overrightarrow{DU}\,(x_U\ ;\ y_U\ ;\ z_U - 1)$ est colinéaire à $\overrightarrow{OB}\,(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Leur coordonnées sont donc proportionnelles ce qui impose $x_U = z_U - 1 = 0$ [1] $(ie)$ $z_U = 1$ et $x_U = 0$.

De la même manière, les vecteurs $\overrightarrow{BS}\,(0\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et $\overrightarrow{BU}\,(0\ ;\ y_U - 1\ ;\ 1)$ sont aussi colinéaires $(ie)$

$$\frac{y_U - 1}{-1} = \frac{1}{3} \iff y_U = \frac{2}{3}.$$

D'où $U\left(0\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$ puis $\overrightarrow{KU}\left(-\dfrac{5}{6}\ ;\ \dfrac{5}{6}\ ;\ 1\right)$.

Enfin, dans le repère orthonormé :

$$\overrightarrow{KU}.\overrightarrow{AE} = 0 \implies (KU) \perp (AE)$$

$(ie)$ $K$ est le pied de la hauteur issue de $U$ dans le trapèze $AUVE$.

**Partie B**

**1/** Il suffit de vérifier que les 3 points, **non alignés**, $A$, $E$ et $U$ appartiennent à ce plan $(ie)$ que leurs coordonnées vérifient son équation. C'est bien le cas.

**2/** $(d)$, orthogonale au plan $(EAU)$ admet son vecteur normal comme vecteur directeur $(ie)$ $\vec{n}\,(3\ ;\ -3\ ;\ 5)$. Comme $(d)$ passe par $A$, on en déduit :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

**3/** Les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de ce point satisfont simultanément une équation paramétrique de $(d)$ ainsi qu'une équation cartésienne du plan $(EAU)$. On cherche donc $x$, $y$, $z$ et $t$ tels que :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \\ 0 = 3x - 3y + 5z - 3 \end{cases} \implies \begin{array}{l} 0 = 3(3t) - 3(-3t) + 5(3 + 5t) - 3 \\ t = -\dfrac{12}{43} \end{array}$$

Réciproquement, on vérifie que $t = -\dfrac{12}{43}$ est bien solution du système.

On en déduit $H\left(-\dfrac{36}{43}\ ;\ \dfrac{36}{43}\ ;\ \dfrac{69}{43}\right)$.

**4/** Par construction de $H$, le segment $[HS]$ est la hauteur de la pyramide $SAEVU$ de base $AEVU$. On peut donc calculer son volume :

$$SH = \frac{12}{\sqrt{43}} \quad \text{donne} \quad \mathcal{V}_{SAEVU} = \frac{SH \times \mathcal{A}_{AEVU}}{3} = \frac{4}{\cancel{\sqrt{43}}} \times \frac{5\cancel{\sqrt{43}}}{18} = \frac{10}{9}.$$

Enfin $\mathcal{V}_{SABCD} = \dfrac{1}{3} \times SH \times \mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{3 \times AB^2}{3} = 2 \neq 2 \times \mathcal{V}_{SAEVU}$. La réponse est négative.

**2**

## Exercice (Antilles-Guyane (exercice n° 4))

### Partie A

Pour $p = 2$, on obtient :

| valeur de $k$ | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|
| valeur de $u$ | 5 | 1 | $-0,5$ |

soit $-0,5$ en sortie.

### Partie B

**1/** Il suffit de faire rentrer le « Afficher $u$ » dans la boucle pour POUR(*ie*) de remonter cette ligne d'un cran vers le haut.

**2/** Comme $u_4 > u_3$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

**3/** Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n : u_{n+1} > u_n$ pour tout entier $n \geqslant 3$. *Initialisation* On vient de voir que $u_4 > u_3$ donc $\mathcal{P}_3$ est vérifiée.

*Hérédité* Supposons qu'il existe un naturel $k$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie (*ie*) $u_{k+1} > u_k$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
0,5u_{k+1} &> 0,5u_k \\
0,5u_{k+1} + 0,5(k+1) &> 0,5u_k + 0,5(k+1) > 0,5u_k + 0,5k \\
0,5u_{k+1} + 0,5(k+1) - 1,5 &> 0,5u_k + 0,5k - 1,5 \\
u_{k+2} &> u_{k+1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée sous l'hypothèse $\mathcal{P}_k$ vraie.

La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc initialisée pour $n = 3$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 3$ (*ie*) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 4.

**4/** Puisque l'on nous donne la raison, calculons :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5}{0,1u_n - 0,1n + 0,5} = \frac{0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4}{0,1u_n - 0,1n + 0,5} \\
&= \frac{0,05u_n - 0,05n + 0,25}{0,1u_n - 0,1n + 0,5} = \frac{0,5\cancel{(0,1u_n - 0,1n + 0,5)}}{\cancel{0,1u_n - 0,1n + 0,5}} \\
&= 0,5.
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 1$.

On sait alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n$.

**5/** Easy ! $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

**6/** Comme $0 < 0,5 < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$. On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1. Sinon le coefficient de colinéarité serait nul.

# Bac - Sujet B (Correction)

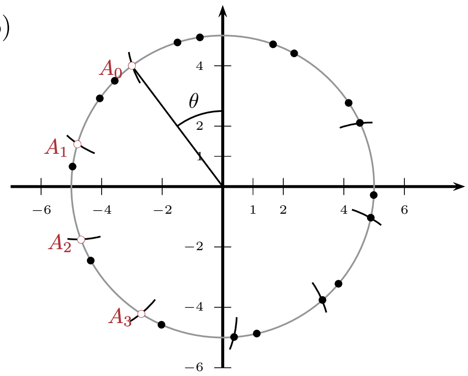
1

## Exercice (Amérique du Nord (exercice n° 2))

**1/** (a) $A_0\,(-3\ ;\ 4)$, $A_1\,(-4,8\ ;\ 1,4)$, $A_2\,(-4,68\ ;\ -1,76)$ et $A_3\,(-2,688\ ;\ -4,216)$.

(b) Il suffit de traduire la relation de récurrence de l'énoncé :

> ...
> $x$ prend la valeur $0,8\times x-0,6\times y$ .
> $y$ prend la valeur $0,6\times \boldsymbol{t}+0,8\times y$.




(c) Les points $A_n$ semblent appartenir à un cercle de centre $O$ et de rayon 5.

**2/** (a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ : $|z_n|=5$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Au rang 0, $|z_0|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$. $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
Supposons qu'il existe un entier $k$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie (*ie*) $|z_k|=\sqrt{x_k^2+y_k^2}=5$.

$$\begin{aligned}|z_{k+1}|^2&=x_{k+1}^2+y_{k+1}^2=(0,8x_k-0,6y_k)^2+(0,6x_k+0,8y_k)^2\\&=(0,8^2+0,6^2)x_k^2+(0,6^2+0,8^2)y_k^2+(0,8\times0,6-0,6\times0,8)x_ky_k\\&=x_k^2+y_k^2=25\implies|z_{k+1}|=5.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée. La propriété $\mathcal{P}_n$, héréditaire et initialisée est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ceci valide la conjecture de la question précédente : les points $A_n$ appartiennent au cercle de centre $O$ et de rayon 5.

(b) Il suffit de développer $e^{i\theta}z_n$ et de regrouper parties réelles et imaginaires :

$$e^{i\theta}z_n=x_{n+1}+iy_{n+1}=z_{n+1}.$$

(c) D'après la question précédente, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $z_{n+1}=e^{i\theta}z_n$ (*ie*) c'est une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. On a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ z_n=\left(e^{i\theta}\right)^n z_0=e^{in\theta}z_0.$$

(d) $z_0=-3+4i=5(-0,6+0,8i)=5\big(-\sin\theta+\cos\theta\big)$. connaissant ses formules trigonométriques, on reconnaît $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ et $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$. D'où

$$z_0=5\left(\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Un argument de $z_0$ est donc $\theta+\dfrac{\pi}{2}$.

(e) $\arg z_n=\arg\left(e^{in\theta}z_0\right)=\arg\left(e^{in\theta}\right)+\arg z_0=n\theta+\dfrac{\pi}{2}+\theta=(n+1)\theta+\dfrac{\pi}{2}$. Le plus simple est de revenir à la définition par récurrence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $z_{n+1}=e^{i\theta}z_n$.
Comme $|z_{n+1}|=|z_n|$ et $\arg z_{n+1}=n\theta+\arg z_n$, on obtient le point $A_{n+1}$ à partir du précédent en effectuant une relation d'angle $\theta$. On peut ainsi construire tous les points à partir de $A_0$.

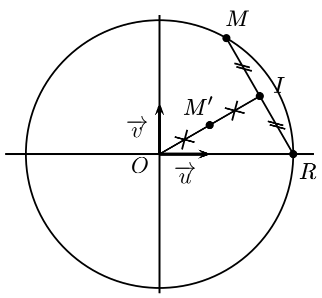
Pour construire les points de manière récursive, il suffit alors de reporter, à l'aide d'un compas, la longueur $\theta$ de l'arc $\widehat{A_0A_1}$ par exemple.
Si l'on demandait de placer le point $A_{n+1}$ directement à partir de $A_0$, il suffirait d'effectuer une rotation, à partir de $A_0$ d'angle $(n+1)\theta$ en vertu de :

$$|z_{n+1}| = |z_0| \quad \text{et} \quad \arg z_{n+1} = (n+1)\theta + \theta + \frac{\pi}{2} = (n+1)\theta + \arg z_0.$$

**2**

## Exercice (Antilles-Guyane (exercice n° 3))

### Partie A




**1/** Comme $OM = OR$, on a $|z_M| = |z_R| = |z|$. De plus, Comme $R$ apprtient à l'axe des réels, son affixe l'est aussi ($ie$) $z_R = |z|$.

**2/** Par définition, $\dfrac{z+|z|}{2}$ est l'affixe du milieu $I$ de $[MR]$ et $z' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z+|z|}{2} + 0\right)$, celle du milieu de $[OI]$. Ceci permet de construire le point $M'$.

### Partie B

**1/** Si $z_0$ est un nombre réel négatif, on a $|z_0| = -z_0$. D'où
$z_1 = \dfrac{z_0+|z_0|}{4} = \dfrac{z_0 - z_0}{4} = 0$ et tous les termes suivants de la suite sont nuls. La suite converge vers 0.

**2/** Si $z_0$ est un nombre réel positif, on a $|z_0| = z_0$. D'où $z_1 = \dfrac{z_0+|z_0|}{4} = \dfrac{z_0+z_0}{4} = \dfrac{z_0}{2}$.

Montrons par récurrence que $z_n = \dfrac{z_0}{2^n}$.

Initialisation : on vu que la relation est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $z_k = \dfrac{z_0}{2^k}$ ; alors

$z_{k+1} = \dfrac{z_k + |z_k|}{4} = \dfrac{\frac{z_0}{2^k} + \frac{z_0}{2^k}}{4} = \dfrac{\frac{z_0}{2^{k-1}}}{2^2} = \dfrac{z_0}{2^{k+1}}$ : la relation est vraie au rang $k+1$.

On a donc démontré que pour tout entier naturel $n$ : $u_n = \dfrac{z_0}{2^n}$.

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de premier terme $z_0$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que cette suite converge vers 0.

**3/** (a) D'après la première construction, le module de $z'_M$ est strictement inférieur à celui de $z_M$. On peut donc conjecturer que la suite $(|z_n|)$ va elle aussi converger vers 0.

(b) D'après l'inégalité triangulaire : $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{z_n + |z_n|}{4}\right| \leqslant \left|\dfrac{z_n}{4}\right| + \left|\dfrac{|z_n|}{4}\right| \leqslant 2\dfrac{|z_n|}{4} \leqslant \dfrac{|z_n|}{2}$.

Il est alors facile de montrer par récurrence que $|z_n| \leqslant \dfrac{|z_{n-1}|}{2} \leqslant \dfrac{|z_{n-2}|}{2^2} \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{|z_0|}{2^n}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|z_0|}{2^n} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on obtient également : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$. La suite $\big(|z_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On en déduit que la suite des points $M_n$ d'affixe $z_n$ converge vers le centre du repère.

# Bac Blanc 2

Octobre 2015

**Exercice 1** Nouvelle Calédonie 2014 **5 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les trois parties **A**, **B** et **C** sont indépendantes*

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

### Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2000 pour la vente en gros.

On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.

On nomme $X$ la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.

On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

**1/** Quelle est la loi suivie par $X$ ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

**2/** Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.

Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

### Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par $Y$ la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.

On suppose que $Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\ ;\ \sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma$.

Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104\,;\,116]$.

Déterminer une valeur approchée à $10^{-1}$ près du paramètre $\sigma$ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à $0,98$.

### Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.

En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.

Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

**Exercice 2** Nouvelle-Calédonie 2014 **5 points**

**Commun à tous les candidats**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On donne les points A$(1~;~0~;~-1)$, B$(1~;~2~;~3)$, C$(-5~;~5~;~0)$ et D$(11~;~1~;~-2)$.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

Le point K est défini par $\overrightarrow{\mathrm{BK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

**1/** (a) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

(b) Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.

(c) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,4)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

En déduire une équation cartésienne de ce plan.

**2/** Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.

(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).

(b) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (BD).

(c) Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?

**Exercice 3** Nouvelle-Calédonie 2014 **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi renseignement de spécialité**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que $f$ est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de $f$ ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

**1/** Démontrer que $f$ est croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

**2/** Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On note $\alpha$ la solution.

On donnera la valeur exacte de $\alpha$ puis on en donnera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

**3/** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points $M_0, M_1$ et $M_2$ d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_0$, $u_1$ et $u_2$.

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)$ ?

**4/** (a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel $n$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

où $\alpha$ est le réel défini dans la question 2.

(b) Peut-on affirmer que la suite $(u_n)$ est convergente ? On justifiera la réponse.

**5/** Pour tout entier naturel $n$, on définit la suite $(S_n)$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

(a) Calculer $S_0$, $S_1$ et $S_2$. Donner une valeur approchée des résultats à $10^{-2}$ près.

(b) Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme $S_n$ pour la valeur de l'entier $n$ demandée à l'utilisateur.

(c) Montrer que la suite $(S_n)$ diverge vers $+\infty$.

**Exercice 3** Centres étrangers 2014 **5 points**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

**Partie A : préliminaires**

**1/** (a) Soient $n$ et $N$ deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \quad \text{modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

(b) Déduire de la question précédente un entier $k_1$ tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$.
On admettra que l'unique entier $k$ tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$ vaut 21.

**2/** On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer la matrice $6A - A^2$.

(b) En déduire que $A$ est inversible et que sa matrice inverse, notée $A^{-1}$, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels que l'on déterminera.

(c) Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

(d) Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

**Partie B : procédure de codage**

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où $x_1$ est l'entier représentant la première lettre du mot et $x_2$ l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

- La matrice $X$ est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice $Y$ est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où $r_1$ est le reste de la division euclidienne de $y_1$ par 26 et $r_2$ le reste de la division euclidienne de $y_2$ par 26.
- Les entiers $r_1$ et $r_2$ donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

**Exemple :** « OU »(mot à coder) $\rightarrow X \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

**Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)**

Lors du codage, la matrice $X$ a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

**1/** Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array} \right.$ .

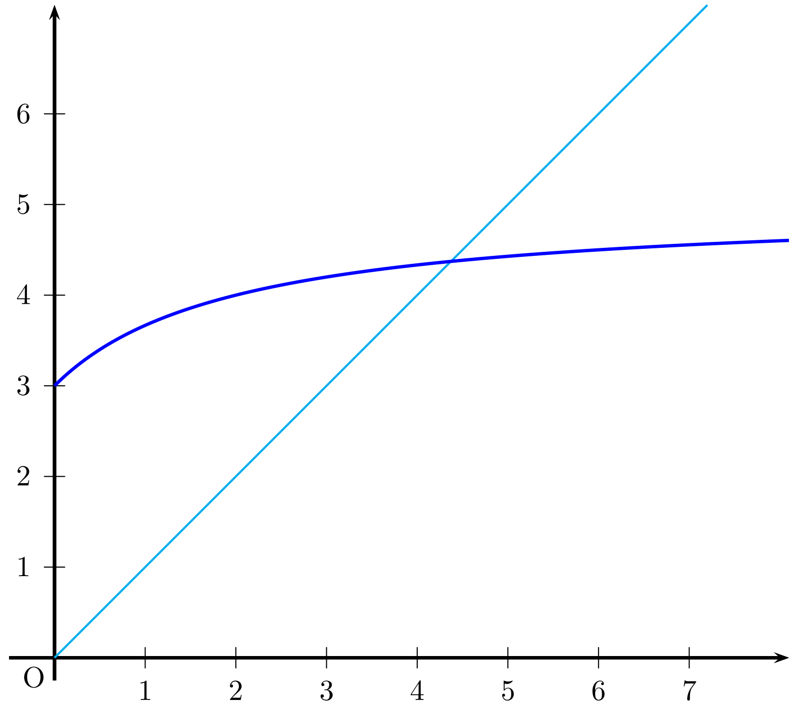
**2/** En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{array} \right. \quad \text{modulo } 26$$

**3/** Décoder le mot « QP ».

**Annexe 1 de l'exercice 3 à rendre avec la copie**

**réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**




**Annexe 2 de l'exercice 3 à rendre avec la copie**

**réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

| | |
|---|---|
| **Entrée :** | $n$ un entier naturel |
| **Variables :** | $u$ et $s$ sont des variables réelles |
| | $n$ et $i$ sont des variables entières |
| **Initialisation :** | $u$ prend la valeur 1 |
| | $s$ prend la valeur $u$ |
| | $i$ prend la valeur 0 |
| | Demander la valeur de $n$ |
| **Traitement :** | Tant que ... |
| | Affecter à $i$ la valeur $i+1$ |
| | Affecter à $u$ la valeur ... |
| | Affecter à $s$ la valeur ... |
| | Fin Tant que |
| **Sortie :** | Afficher $s$. |

# Corrigé du Bac Blanc n° 2

Octobre 2015

1

**Exercice (Commun à tous les candidats)** *Les trois parties* ***A, B*** *et* ***C*** *sont indépendantes*

**Partie A**

**1/** L'expérience s'apparente à la répétition successive de 2000 expériences aléatoires et indépendantes à 2 issues dont l'une, appelée « succés » est de probabilité $0,003$.

La variable aléatoire $\mathbb{X}$ associant à chaque lot le nombre de « succés » suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 2000$ et $p = 0,03$ : $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(2000\,;0,003\,)$.

**2/** À l'aide de la calculatrice, on calcule

$$P(\mathbb{X} < 12) = \sum_{k=0}^{11} P(\mathbb{X} = k) = \sum_{k=0}^{11} \binom{2000}{k} 0,002^k \times 0,998^{2000-k} \simeq 0,98.$$

**Partie B**

Cherchons la valeur de $\sigma$ telle que $P\big(104 \leqslant \mathbb{X} \leqslant 116\big)$ soit égale à 0,98. Ramenons-nous pour cela à la variable $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{X}-\mu}{\sigma}$, centrée réduite de $\mathbb{X}$ :

$$104 \leqslant \mathbb{X} \leqslant 116 \iff -6 \leqslant \mathbb{X} - 110 \leqslant 6 \iff -\frac{6}{\sigma} \leqslant \mathbb{Z} \leqslant \frac{6}{\sigma}.$$

D'après le cours on sait que pour tout valeur de $\alpha \in [0\,;1\,]$, il existe un unique réel $u$ tel que

$$P\big(-u \leqslant \mathbb{X} \leqslant u\big) = 1 - \alpha.$$

Avec $\alpha = 0,02$, on trouve, à l'aide de la calculatrice $u \simeq 2,326$.

Il ne reste plus qu'à résoudre la petite équation $\dfrac{6}{\sigma} = u \iff \sigma = \dfrac{6}{u} \simeq 2,6$.

**Partie C**

On a $f_{obs} = \dfrac{795}{900} \simeq 0,883$. Comparons cette valeur avec un intervalle de fluctuation asymptotique $I_{Asymp}$ au niveau de confiance 95%.

Soit $n$ la taille de l'échantillon concerné. On a bien $n = 900 \leqslant 30$, $np = 900 \times 0,84 = 756 \leqslant 5$ et $n(1-p) = 900 \times 0,16 = 144 \geqslant 5$ donc les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et on a alors :

$$\begin{aligned} I_{Asymp} &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\ &= \left[0,84 - 1,96\sqrt{\frac{0,84\times 0,16}{900}}\,;0,84 + 1,96\sqrt{\frac{0,84\times 0,16}{900}}\right] \simeq [0,816\,;0,864\,]. \end{aligned}$$

Comme $f_{obs} \notin I_{Asymp}$, on rejette l'hypothèse comme quoi le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010.

2

## Exercice (Commun à tous les candidats)

**1/** (a) Par construction, $I$ est le milieu de $[AB]$ d'où

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A+z_B}{2}\right) \iff I\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\,.$$

De même, on trouve $J\,(3\ ;\ 3\ ;\ -1)$.

Enfin, posant $K\,(x_K\ ;\ y_K\ ;\ z_K)$ et avec $\overrightarrow{BC}\,(-6\ ;\ 3\ ;\ -3)$, on résout le système :

$$\overrightarrow{\mathrm{BK}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \iff \begin{cases} x_K - 1 &= -2 \\ y_K - 2 &= 1 \\ z_K - 3 &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_K &= -1 \\ y_K &= 3 \\ z_K &= 2 \end{cases}$$

Donc $K\,(-1\ ;\ 3\ ;\ 2)$.

(b) Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}\,(2\ ;\ 2\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{IK}\,(-2\ ;\ 2\ ;\ 1)$ ne sont pas colinéaires (*ie*) que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Comme $\dfrac{2}{-6} \neq \dfrac{2}{4}$ c'est bien le cas. Les points $I$, $J$ et $K$, non alignés définissent bien, de manière unique, un plan dont $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont deux vecteurs directeurs.

(c) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{n}\,(3\ ;\ 1\ ;\ 4)$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de $(IJK)$ :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ} = 3\times 2 + 1\times 2 - 4\times 2 = 0 \implies \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{IJ}$$
$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IK} = -3\times 2 + 1\times 2 + 4\times 1 = 0 \implies \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{IK}$$

Le plan $(IJK)$ est donc le plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et passant par $I$. Une équation cartésienne de $(IJK)$ est donc $3x+y+4z+d=0$.

Comme $I \in (IJK)$, $d = -3x_I - 4y_I - 4z_I = -8$.

Donc $(IJK) : 3x+y+4z-8=0$.

**2/** Même si non demandé, il est bon de remarquer que $(IJK) = \mathcal{P}$. Ça rassure !

(a) Avec $B\,(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et $\overrightarrow{BD}\,(10\ ;\ -1\ ;\ -5)$ on trouve $(BD)$ : $\begin{cases} x &= 1+10t \\ y &= 2-t \\ z &= 3-5t \end{cases}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(b) Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x+y+4z-8=0 \\ x = 1+10t \\ y = 2-t \\ z = 3-5t \end{cases} \iff \begin{cases} 3(1+10t)+(2-t)+4(3-5t)-8=0 \\ x = 1+10t \\ y = 2-t \\ z = 3-5t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t &= -1 \\ x &= -9 \\ y &= 3 \\ z &= 8 \end{cases} \iff L\,(-9\ ;\ 3\ ;\ 8)\,.$$

**Remarque:** Comme on résout le système, il serait redondant de prouver en premier lieu que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires. Le fait que le système possède une solution justifie à lui seul qu'ils ne le sont pas.

(c) Par définition, il suffit de vérifier que $B$ est, ou non, le milieu de $[DL]$. Comme ce dernier a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_D+x_L}{2}\ ;\ \dfrac{y_D+y_L}{2}\ ;\ \dfrac{z_D+z_L}{2}\right) = (1\ ;\ 2\ ;\ 3) = B$, le point L est le symétrique du point $D$ par rapport au point $B$.

**Remarque:** Comme le point $D$ est atteint pour le paramètre $t=1$, on pouvait s'en douter ayant trouvé $t=-1$ pour $L$.

3

## Exercice (Candidats n'ayant pas suivi renseignement de spécialité)

**1/** Comme $f$ est dérivable d'après l'énoncé, on calcule $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ : $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$.

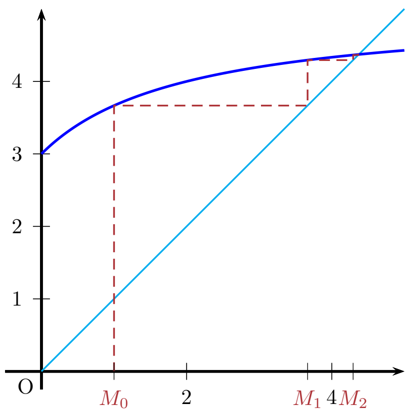
La fonction $f$ est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

**2/** Sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f(x) = x \iff 5 - \frac{4}{x+2} = x \iff (5-x)(x+2) = 4 \iff -x^2 + 3x + 6 = 0.$$

Or, $\Delta = b^2 - 4ac = 33 > 0$. Le trinôme a donc deux solutions réelles dont l'unique positive est

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \simeq 4,37.$$

**3/** 


On peut donc conjecturer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers $\alpha$, unique point fixe de $f$ sur $[0\,;+\infty\,[$.

**4/** (a) A l'ordre 1, on a bien $0 \leqslant u_0 = 1 \leqslant u_1 \simeq 1,67 \leqslant \alpha \simeq 4,37$.
Supposons donc qu'il existe un entier $k$ non nul tel que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \alpha$.
Comme la fonction $f$ est croissante sur $[0\,;+\infty\,[$, on peut composer la série d'inégalités précédente sans changer l'ordre. Avec $f(0) = 3$ et $f(\alpha) = \alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(0) &\leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(\alpha) \\ 0 \leqslant 3 &\leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire. Initialisée, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, majorée (par $\alpha$), elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant \alpha$. Comme $f$ est continue au voisinage $\alpha$, la limite $\ell$ est nécessairement solution de l'équation $f(x) = x$. C'est donc $\alpha$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\alpha$.

**5/** (a) $S_0 = u_0 = 1$, $S_1 = u_0 + u_1 = \dfrac{14}{3} \simeq 4,67$ et $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \dfrac{457}{51} \simeq 8,96$.

(b)

...
**Traitement :** Tant que $i \leqslant n+1$
Affecter à $i$ la valeur $i+1$
Affecter à $u$ la valeur $5 - 4/(u+2)$
Affecter à $s$ la valeur $s+u$
Fin Tant que
...

(c) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, tous ses termes sont supérieurs à $u_0 = 1$.
D'où $S_n = \underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n}_{n+1 \text{ termes plus grands que } 1} \geqslant (n+1) \times 1 = n+1$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$, d'après les théorèmes de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4

## Exercice (Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

**Partie A : préliminaires**

**1/** (a) Si $n^2 \equiv N-1\ [N]$ alors par compatibilité avec la multiplication des classes d'équivalence, on a :

$$n \times n^3 = n^4 \equiv (N-1)^2 = N^2 - 2N + 1 \equiv 1\ [N].$$

(b) [2]Comme $5^2 = 25\ [26]$, d'après la question précédente, on sait que $5 \times 5^3 \equiv 1\ [26]$. donc $k_1 = 5^3 = 125 \equiv 21\ [26]$.

**2/** (a) À la calculatrice $6A - A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2$.

(b) D'après la question précédente, on a :

$$A \times \frac{1}{5}(6I_2 - A) = \frac{1}{5}(6I_2 - A) \times A = \frac{1}{5}(6A - A^2) = I_2.$$

La matrice $A$ est donc inversible et $A^{-1} = \frac{6}{5}I_2 - \frac{1}{5}A$.

(c) Le plus rapide est de calculer $\frac{1}{5}B \times A = A \times \frac{1}{5}B = I_2$. Donc $B = 5A^{-1}$.

(d) Comme $A$ est inversible, $AX = Y \iff X = A^{-1}Y = \frac{1}{5}BY \iff 5X = BY$.

**Partie B : procédure de codage**

« ET »$\rightarrow X \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} \rightarrow Y = AX = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix} \rightarrow$ « JY » (mot codé).

**Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)**

**1/** Comme $Y = AX \iff 5X = BY \iff 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ qui se traduit par le système linéaire :

$$\begin{cases} 5x_1 &= & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 &= & -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

**2/** D'après la question 1. b. de la **partie A**, $5 \times 21 \equiv 1\ [2]6$ (*ie*) 21 est l'inverse de 5 modulo 26. En multipliant les équations du système par 21 et en prenant les classes modulo 26, on obtient le système :

$$\begin{cases} x_1 &\equiv & 42y_1 - 21y_2\ [26] \\ x_2 &\equiv & -63y_1 + 84y_2\ [26] \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 &\equiv & 16y_1 + 5y_2\ [26] \\ x_2 &\equiv & 15y_1 + 6y_2\ [26] \end{cases}$$

avec $42 \equiv 16\ [26]$, $-21 \equiv 5\ [26]$,...

**3/** « QP ». $\rightarrow Y \begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 &\equiv & 16 \times 16 + 5 \times 15 \equiv 19\ [26] \\ x_2 &\equiv & 15 \times 16 + 6 \times 15 \equiv 18\ [26] \end{cases} \rightarrow X \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow$ « TS ».[3]

3. La question est bizarre puisque l'on peut très bien résoudre cette équation directement mais bon !
3. Humour de profs de « QP ».

# Index

E



F



G



I