Logarithme népérien

Fiche(1)

Propriétés algébriques

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

a. $ln6 - ln2$

b. $ln2 + ln\frac{1}{2}$

c. $ln3 - ln9$

d. $ln2 + ln4 - ln8$

e. $\frac{1}{4}ln81$

f. $ln\frac{1}{3} + 2ln\sqrt{3}$

Exercice 2

Donner en fonction de $ln2$ et de $ln5$ les valeurs de :

a. $ln10$

b. $ln25$

c. $ln16$

d. $ln400$

e. $ln\frac{2}{25}$

f. $ln\frac{1}{100}$

Exercice 3

a et b étant deux réels strictement positifs, donner en fonction de lna et de lnb les valeurs de :

a. $ln\frac{a}{b^2}$

b. $ln(a^3 \times b^5)$

c. $\ln(ab^3)$

d. $ln\left(\frac{b^2}{a^3}\right)$

Exercice 4

Ecrire à l'aide d'un seul logarithme

$A = 2ln3 - ln5$

$B = 3ln10 + ln0{,}08 - 5ln2$

$C = \frac{1}{2}ln4 - 3ln2$

$D = 2ln5 - 3ln2 + \frac{1}{2}ln100$

Ensemble de définition

Exercice 5

Déterminer pour chaque fonction, l'ensemble de définition.

a. $f(x) = (2x - 1)ln(x + 1)$

b. $f(x) = 5x - ln(4 - x)$

c. $f(x) = x - 3 + ln(x^2)$

d. $f(x) = ln(x^2 + 2x)$

e. $f(x) = ln(x) + ln(2 - x)$

f. $f(x) = ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

g. $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x + 3)$

h. $f(x) = \frac{ln(2x-1)}{ln(x)-ln(2)}$

i. $f(x) = \frac{3-ln(4-x)}{\ln(x)}$

Logarithme népérien

Fiche(2)

Résolution d'équations et d'inéquations

Méthode générale :
Pour résoudre une équation du type ln $u(x)$ = ln $v(x)$ (resp une inéquation du type ln $u(x)$ ³ ln $v(x)$) :
· On détermine l'ensemble des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ (dans ce cas l'équation est bien définie).
· On résout dans cet ensemble l'équation $u(x) = v(x)$ (resp l'inéquation $u(x)$ ³ $v(x)$).

Exemple résolu 1 : Résoudre l'équation : $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$.

- On cherche les nombres x tels que $x^2 - 4 > 0$ et $3x > 0$.

Or $x^2 - 4 > 0$ lorsque $x \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ et $3x > 0$ lorsque $x > 0$.
L'équation sera alors résolue dans l'ensemble D = $]2 ; +\infty[$.

- De plus $x^2 - 4 = 3x$ signifie $x^2 - 3x - 4 = 0$.

On trouve $\Delta = 25$ et les solutions sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$. Or $4 \in D$ et $-1 \notin D$,
donc la seule solution de l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$ est 4.

Exemple résolu 2 : Résoudre l'équation : $\ln x + \ln(x - 3) = 2\ln 2$

- On cherche les nombres x tels que $x > 0$ et $x - 3 > 0$.

L'équation sera résolue dans l'ensemble D = $]3 ; +\infty[$

- $\ln x + \ln(x - 3) = 2\ln 2$ s'écrit $\ln[x(x - 3)] = \ln 2^2 \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0$

Le trinôme $x^2 - 3x - 4$ a pour racines -1 et 4. Or, $-1 \notin D$ et $4 \in D$
Donc la seule solution de l'équation $\ln x + \ln(x - 3) = 2\ln 2$ est 4.

Exercice 1 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition de l'équation, la résoudre.

a. $ln(5x) = \frac{3}{2}$

b. $ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

c. $ln\left(\frac{1+2x}{2}\right) = 1 - \ln(2)$

d. $ln(x^2) = ln(2x)$

e. $ln(x+1) + ln(x-1) = 1$

f. $ln(x-4) + ln(x-2) = ln3$

g. $ln(x^2 - 6x + 8) = ln(3)$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs interdites pour x puis résoudre dans R :

1. $ln(x) > 1$
2. $ln(x) = 2$
3. $ln(x) < -1$
4. $3 - ln(x) \leq 0$
5. $ln(x) = -3$
6. $2ln(x+1) = 0$
7. $\frac{1}{ln(x)+1} > 0$
8. $8.\, ln(2x+1) = 1$
9. $ln(x^2) = -1$
10. $ln[x(x+1)] = 0$
11. $ln(x) + ln(x+1) = 0$
12. $2ln(x) - 1 = 0$
13. $2x\, ln(x) + x = 0$
14. $(x-1)(1 + ln(x)) = 0$
15. $x\, ln(x+2) = 0$
16. $(ln(x))^2 - ln(x) - 2 = 0$

Exercice 3

Après avoir déterminé l'ensemble de définition de l'inéquation, la résoudre.

a. $ln(5-x) \leq 1$

b. $ln(x^2+1) \geq ln2 + ln5$

c. $ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \geq ln\left(\frac{1}{2}\right)$

d. $ln(3+2x) > ln(1-x)$

e. $lnx + ln(3x-1) \geq ln2$