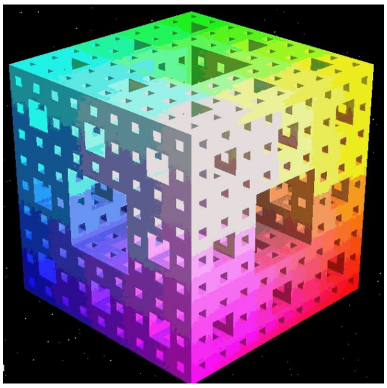
Géométrie dans l'espace

Terminale S



Olivier Lécluse

Octobre 2013
1.0

Table des matières

Objectifs 4

I - Droites et Plans 5

1. Droites et plans : Positions relatives 5
   - *1.1. Plan de l'espace 5*
   - *1.2. Position relative de deux droites 6*
   - *1.3. Exercice 6*
   - *1.4. Position relative de deux plans 7*
   - *1.5. Exercice 7*
2. Droites et plans parallèles 7
   - *2.1. Droites parallèles à un plan 7*
   - *2.2. Exercice : Montrer qu'une droite est parallèle à un plan 8*
   - *2.3. Exercice : Utiliser le théorème du toit dans un tétraèdre 9*
   - *2.4. Plans parallèles 10*
   - *2.5. Exercice : Demontrer que deux plans sont paralleles 10*
   - *2.6. Exercice : Construire la section d'un solide par un plan 10*
3. Orthogonalité dans l'espace 11
   - *3.1. Droites orthogonales 11*
   - *3.2. Orthogonalité Droite-Plan 11*
   - *3.3. Plan médiateur 12*
   - *3.4. Exercice : Démontrer une orthogonalité 12*

II - Vecteurs de l'espace 13

1. Vecteurs colinéaires 13
2. Exercice : Dans un tétraèdre 14
3. Caractérisation d'une droite et d'un plan 14
4. Exercice : Démontrer le parallélisme d'une droite et d'un plan 15
5. Exercice : ROC : Démonstration du théorème du toit 16
6. Vecteurs coplanaires 17
7. Exercice 18

III - Repères de l'espace 19

1. Repère de l'espace 19
2. Coordonnées dans l'espace 20
3. Exercice : Calculer avec des coordonnées dans l'espace 20
4. Représentation paramétrique d'une droite 20

5. Exercice : Représentation paramétrique d'une droite 21

6. Exercice : Droites orthogonales 22

IV - Tester ses connaissances 23

Contenus annexes 27

Solutions des exercices 30

Objectifs

Dans cette partie, il s'agit, d'une part de renforcer la vision dans l'espace entretenue en classe de première, d'autre part de faire percevoir toute l'importance de la notion de direction de droite ou de plan.

La décomposition d'un vecteur d'un plan suivant deux vecteurs non colinéaires de ce plan, puis celle d'un vecteur de l'espace suivant trois vecteurs non coplanaires, sensibilisent aux concepts de liberté et de dépendance en algèbre

linéaire.

Le repérage permet à la fois de placer des objets dans l'espace et de se donner un moyen de traiter des problèmes d'intersection d'un point de vue algébrique. Le concept d'orthogonalité, une fois exprimé en termes de coordonnées dans un repère orthonormé, fournit un outil pour une caractérisation simple des plans de l'espace.

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier des problèmes d'intersection de droites et de plans, en choisissant un cadre adapté, vectoriel ou non, repéré ou non.

Extrait du programme officiel

Droites et Plans

Droites et plans : Positions relatives	5
Droites et plans parallèles	7
Orthogonalité dans l'espace	11

1. Droites et plans : Positions relatives

1.1. Plan de l'espace

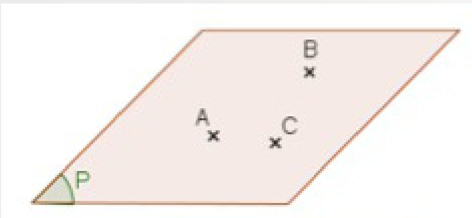
Rappel

Par deux points distincts du plan passe une unique droite. Une droite est ainsi définie par deux points distincts.

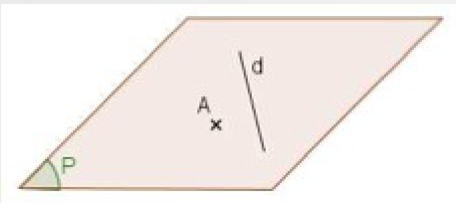
Fondamental

Par trois points non alignés de l'espace passe un unique plan.

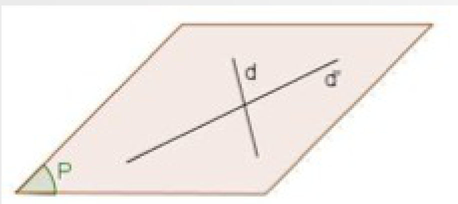
Un plan est ainsi défini par



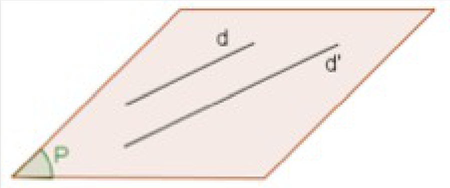
soit trois points non alignés,



soit par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite,



soit par deux droites sécantes,



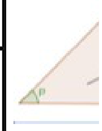
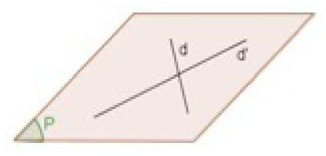
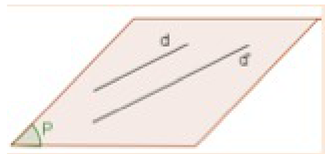
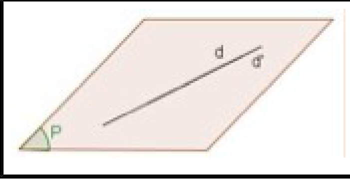
soit par deux droites strictement parallèles.

Définition

Quatre points de l'espace sont dits *coplanaires* lorsqu'ils appartiennent à **un même plan**.

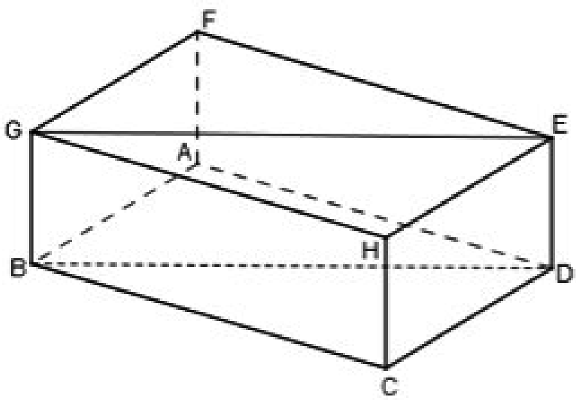
Deux droites de l'espace sont dites *coplanaires* lorsqu'elles sont incluses dans **un même plan**.

1.2. Position relative de deux droites

Droites coplanaires			**Dr co**
Droites sécantes	Droites parallèles		
	Droites **strictement** parallèles	Droites confondues	
			

1.3. Exercice

On considère le parallélépipède suivant :

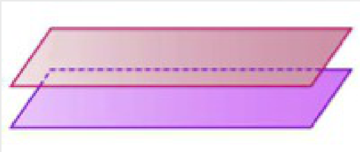
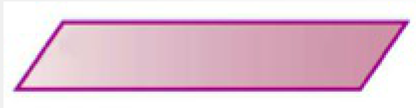
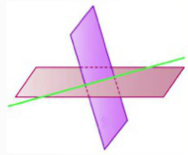


1. (GE) et (BD)
2. (BG) et (BA)
3. (GE) et (EH)
4. (FA) et (CD)

Droites sécantes en B	Droites parallèles	Droites non coplanaires	Droites coplanaires

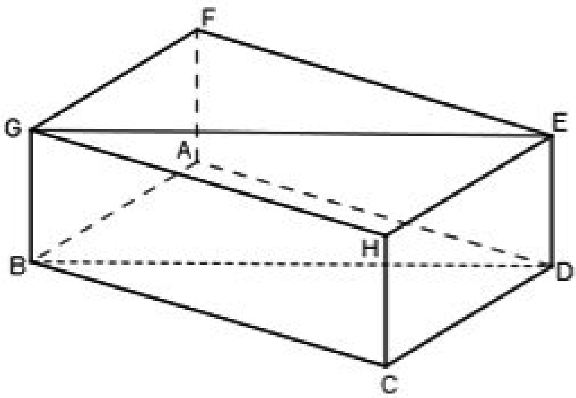
1.4. Position relative de deux plans

Fondamental : Dans l'espace, deux plans peuvent être ...

Plan parallèles		Plans sécants
Plans strictement parallèles	Plans confondus	Les plans sont **sécants** suivant **une droite**
		

1.5. Exercice

On considère le parallélépipède suivant :



1. Les plans (GBE) et (GBF)
2. Les plans (AFE) et (BCH)
3. Les plans (BCD) et (ABD)

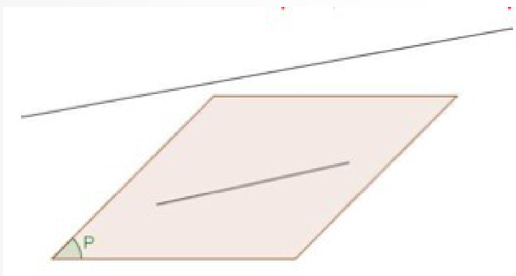
plans confondus	plans sécants	plans parallèles

2. Droites et plans parallèles

2.1. Droites parallèles à un plan

Fondamental

Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan



Fondamental : Théorème du toit

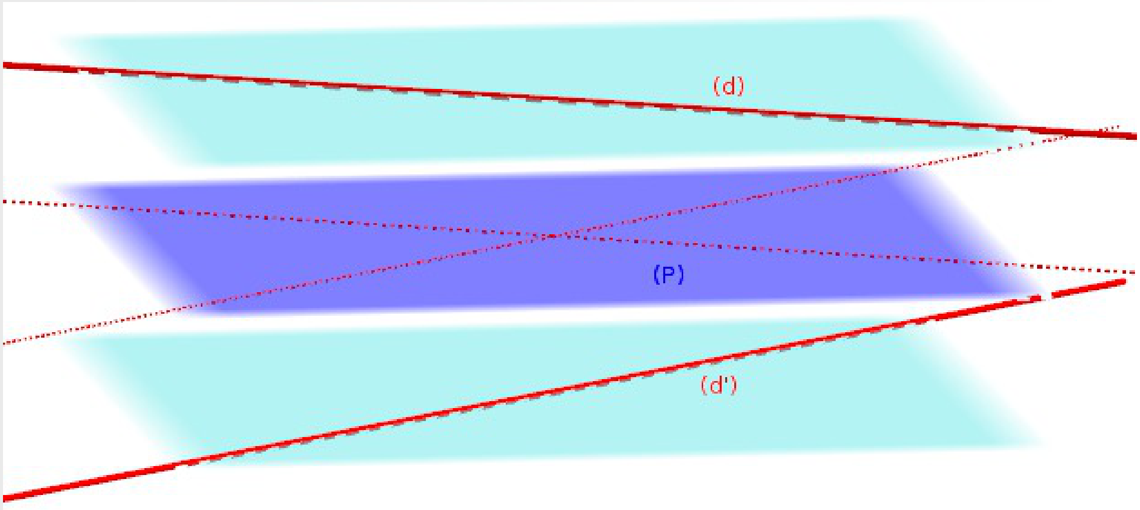
Si deux droites d et d' sont parallèles telles que :

- un plan P contienne la droite d,
- un plan P' contienne la droite d',
- les plans P et P' sont sécants suivant une droite Δ,

alors Δ est parallèle aux droites d et d'.

Attention

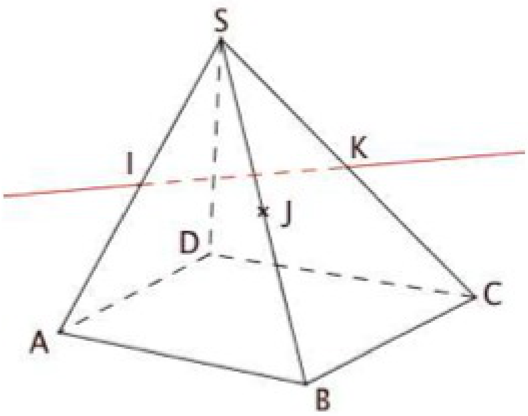
Si d est parallèle à $\mathcal{P}$ et d' parallèle à $\mathcal{P}$, on **ne peut pas** en déduire que $d//d'$!



2.2. Exercice : Montrer qu'une droite est parallèle à un plan

***SABCD* est une pyramide**

***I*,*J* et *K* sont les milieux respectifs de *[SA]*, *[SB]* et *[SC]*.**



Question

[Solution n°1 p 30]

Démontrer que la droite *(IK)* est parallèle au plan *(ABC)*

Indice :

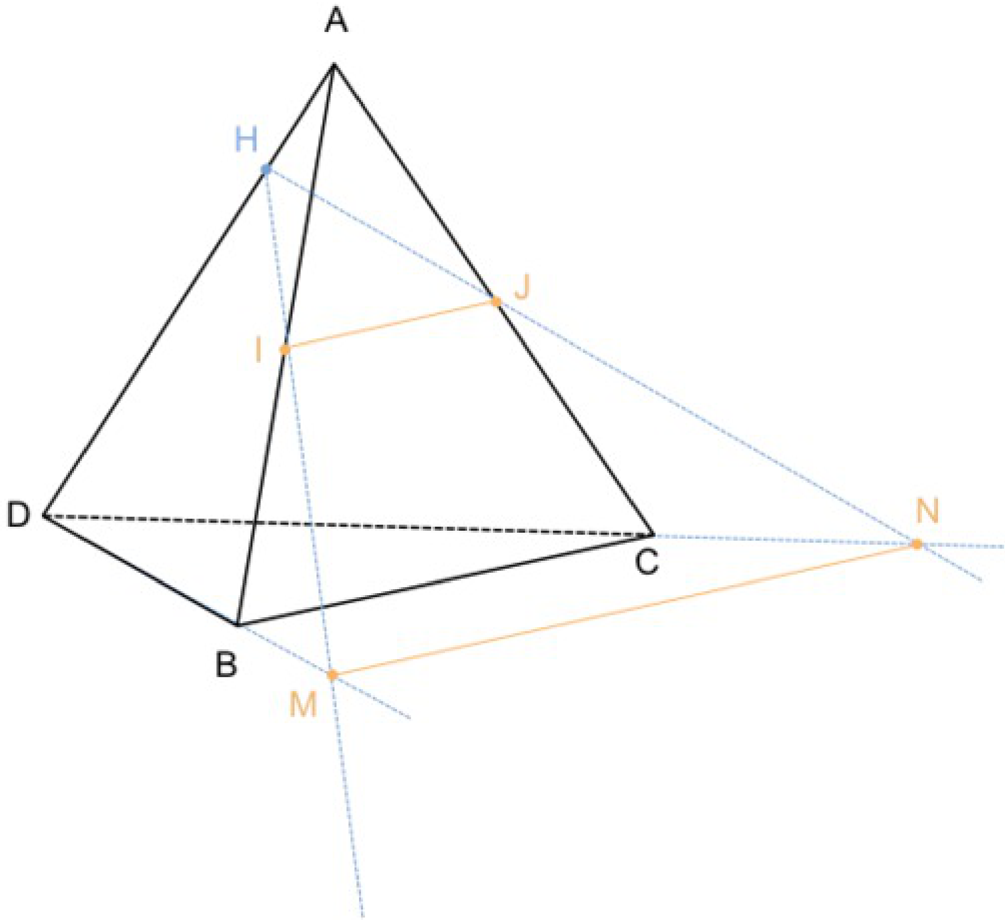
On pourra montrer que (IK) est parallèle à une droite du plan (ABC)

2.3. Exercice : Utiliser le théorème du toit dans un tétraèdre

Soit un tétraèdre ABCD. On appelle I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

Soit H un point du segment [AD] distinct de son milieu :

- **les droites (HI) et (DB) se coupent en M ;**
- **les droites (HJ) et (DC) se coupent en N.**



Question 1

[Solution n°2 p 30]

Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD)

Question 2

[Solution n°3 p 30]

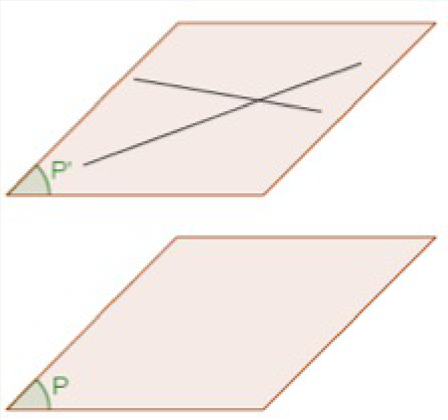
Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

Indice :

On pourra utiliser le théorème du toit

2.4. Plans parallèles

Fondamental : Premier théorème



Si un plan contient deux droites sécantes et parallèles à un autre plan, alors les deux plans sont parallèles.

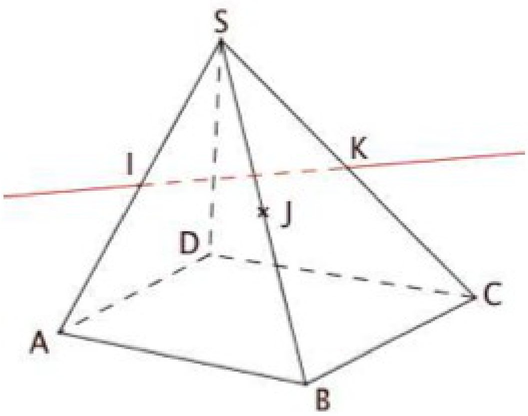
Fondamental : Second théorème

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et leurs intersections sont deux droites parallèles.

2.5. Exercice : Démontrer que deux plans sont parallèles

***SABCD* est une pyramide**

***I*,*J* et *K* sont les milieux respectifs de *[SA]*, *[SB]* et *[SC]*.**



Question

[Solution n°4 p 30]

démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Indice :

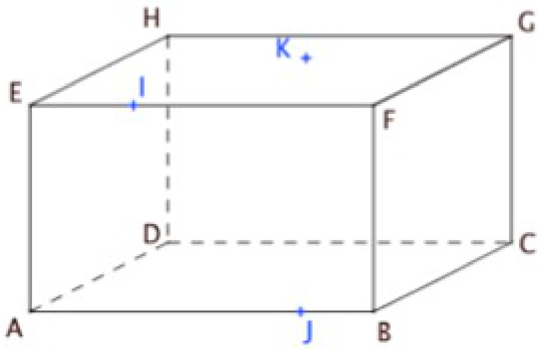
Pour prouver que deux plans sont paralleles, il suffit de trouver deux droites secantes d'un plan qui sont paralleles a l'autre plan.

2.6. Exercice : Construire la section d'un solide par un plan

ABCDEFGH est un pavé droit.

I est un point de l'arête [EF], J est un point de l'arête [AB] et K est un point de la face

EFGH.



Question

[Solution n°5 p 31]

Construire la section du pavé par le plan (IJK)

3. Orthogonalité dans l'espace

3.1. Droites orthogonales

Définition

Deux droites de l'espace sont *orthogonales* si et seulement si il existe deux droites coplanaires qui leur sont parallèles et qui sont perpendiculaires entre elles.

Remarque

On réserve le terme *perpendiculaire* à des droites qui sont orthogonales **et** sécantes.

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, les droites *(AE)* et *(GH)* sont **orthogonales**. En effet,

- $(AE)//(DH)$
- $(DH)\perp(GH)$

Par contre, les droites *(AE)* et *(GH)* ne sont pas perpendiculaires car **non coplanaire**s.

Fondamental

Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est alors orthogonale à l'autre.

3.2. Orthogonalité Droite-Plan

Définition

Une droite est *orthogonale à un plan* si elle est **orthogonale à toutes les droites** de ce plan.

Complément

Il suffit pour ce faire qu'elle soit orthogonale **à deux droites sécantes** de ce plan

Exemple

La droite *(d)* est orthogonale au plan *BCGF* car elle est perpendiculaire aux droites *(BM)* et *(CM)* sécantes dans ce plan.

Fondamental : Propriétés

Les propriétés sont la traduction à l'espace de propriétés planes bien connues

- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est alors orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, elles sont alors parallèles.

- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, ils sont alors parallèles.

3.3. Plan médiateur

Nous allons voir la traduction à l'espace de la notion de médiatrice d'un segment au travers de ce qu'on appelle le plan médiateur.

Définition

Le plan médiateur d'un segment *[AB]* est formé de l'ensemble des points équidistants de A et de B

Fondamental

Le plan médiateur d'un segment *[AB]* est le plan **orthogonal** à *(AB)* qui passe par le **milieu** de *[AB]*.

3.4. Exercice : Démontrer une orthogonalité

Question

[Solution n°6 p 32]

$ABCD$ est un tétraèdre régulier.

Démontrer que les droites *(CD)* et *(AB)* sont orthogonales

Indices :

Dans un tétraèdre régulier, toutes les arrêtes sont de la même longueur.

On pourra construire le point I milieu de [CD]

Vecteurs de l'espace

Vecteurs colinéaires	13
Exercice : Dans un tétraèdre	14
Caractérisation d'une droite et d'un plan	14
Exercice : Démontrer le parallélisme d'une droite et d'un plan	15
Exercice : ROC : Démonstration du théorème du toit	16
Vecteurs coplanaires	17
Exercice	18

Les propriétés vues pour les vecteurs dans le plan (addition, multiplication par un nombre, relation de Chasles...) restent valables pour les vecteurs de l'espace.

1. Vecteurs colinéaires

Définition

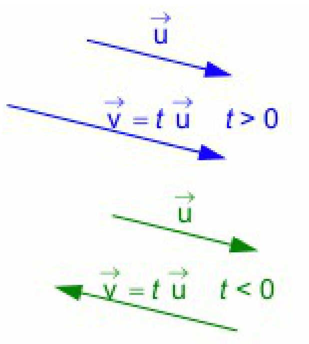
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* lorsqu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{v} = t.\overrightarrow{u}$

Par convention, le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Remarque

Deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction.

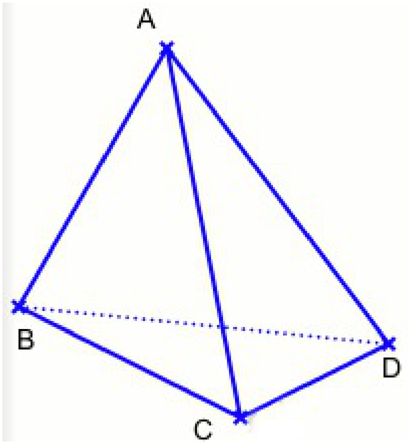
- Si $\overrightarrow{v} = t.\overrightarrow{u}$ avec $t > 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont le même sens
- Si $\overrightarrow{v} = t.\overrightarrow{u}$ avec $t < 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont le sens contraire



Complément

Lorsque deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, on dit qu'ils sont *dépendants*. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont *indépendants* ou *libres*.

2. Exercice : Dans un tétraèdre



On considère un tétraèdre $ABCD$
On appelle I,J,K et L les points définis respectivement par :
$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

Question 1

[Solution n°7 p 32]

Placer les points I,J,K et L sur une figure.

Question 2

[Solution n°8 p 33]

Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis en fonction de $\overrightarrow{AC}$

Indice :

On pourra remarquer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

Question 3

[Solution n°9 p 33]

Justifier que les points I,J,K et L sont coplanaires et que la droite (AC) est parallèle au plan $(IJKL)$

Indice :

On pourra exprimer $\overrightarrow{LK}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$

Question 4

[Solution n°10 p 33]

Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan $(IJKL)$

3. Caractérisation d'une droite et d'un plan

Fondamental : Caractérisation d'une droite

Une droite peut être définie par

- un point A et
- un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$

La droite est alors l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{u}$, $x \in \mathbb{R}$

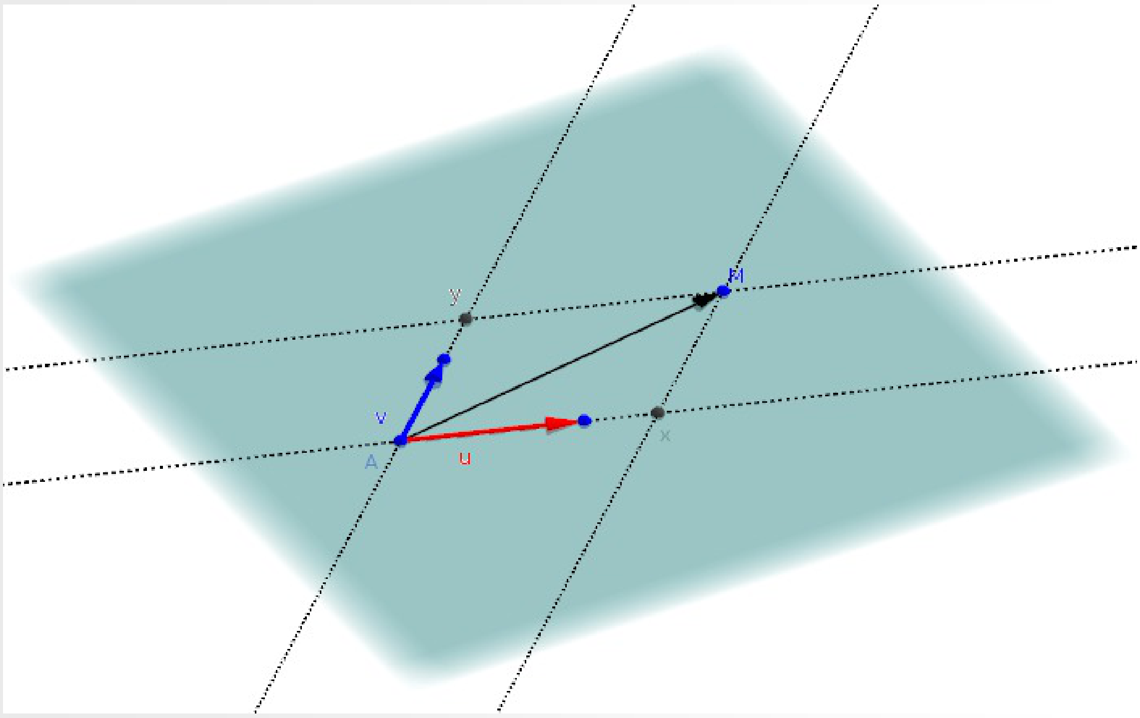
On dit que $\overrightarrow{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite

Fondamental : Caractérisation d'un plan

Un plan peut être défini par

- un point A et
- **deux vecteurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Le plan est alors l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$, $x, y \in \mathbb{R}$



On dit alors que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent le plan.

Tout vecteur du plan peut s'écrire comme combinaison $x.\vec{u} + y.\vec{v}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$(A, \vec{u}, \vec{v})$ définissent un repère de ce plan. x et y sont les coordonnées de A dans ce repère.

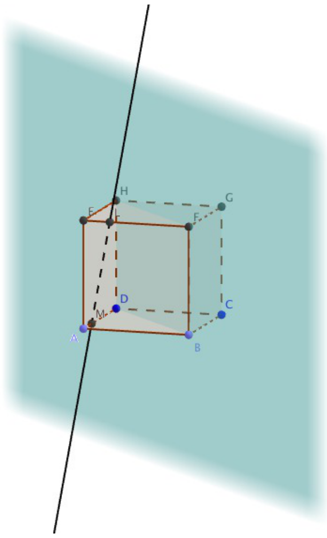
Fondamental : Conséquences

- Deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont **colinéaires**
- Deux plans ayant **même couple** de vecteurs directeurs sont **parallèles**
- Une droite (d) et un plan $\mathcal{P}$ sont **parallèles** si et seulement si un vecteur directeur de (d) est un **vecteur du plan** $\mathcal{P}$

4. Exercice : Démontrer le parallélisme d'une droite et d'un plan

ABCDEFGH est un cube. M et L sont les points tels que

- $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$



Question 1

[Solution n°11 p 34]

Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$

Indice :

On pourra utiliser de manière astucieuse la relation de Chalses

Question 2

[Solution n°12 p 34]

En déduire la position de la droite (ML) par rapport au plan (DBH).

On retiendra qu'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ peut se décomposer selon les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$

c'est à dire qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w}$

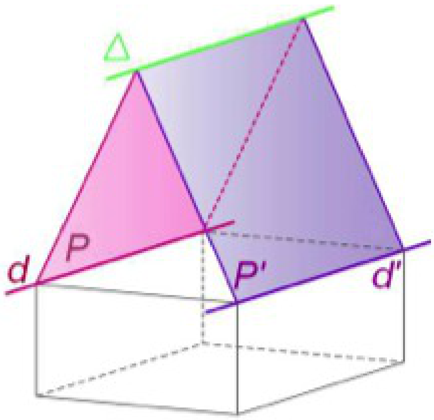
On dit dans ce cas que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires.*

5. Exercice : ROC : Démonstration du théorème du toit

Vous avez vu en classe de seconde le *Théorème du toit - p.28.* Nous allons en donner une démonstration qui fera l'objet d'une ROC.

On considère deux droites d et d' sont parallèles telles que :

- **un plan $\mathcal{P}$ contienne la droite d,**
- **un plan $\mathcal{P}'$ contienne la droite d',**
- **les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite Δ,**



Question 1

[Solution n°13 p 34]

Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de (d)

Démontrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

Indice :

Si une droite (d) est incluse dans un plan $\mathcal{P}$, tout vecteur directeur de la droite (d) est un vecteur du plan $\mathcal{P}$ Cela est une conséquence directe de la dernière propriété vue sur cette page - p.27.

Question 2

[Solution n°14 p 34]

Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires, montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

Question 3

[Solution n°15 p 35]

Conclure que les droites (d), (d') et Δ sont parallèles.

Indice :

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

6. Vecteurs coplanaires

Définition

On dit que **trois** vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires* si et seulement si par définition il existe 4 points A,B,C et D d'un même plan tels que

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$

Exemple

Dans la figure ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires*. Le vecteur Jaune n'est coplanaire avec aucun coule de deux autres vecteurs.

Fondamental

Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tels que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires* si et seulement si

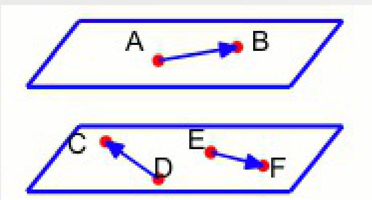
$\overrightarrow{w} = x.\overrightarrow{u} + y.\overrightarrow{v}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

Complément : Démonstration

Soient A,B,C et D tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$. Puisque $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, les points A,B,C définissent un plan dont $(A ; \overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v})$ est un repère.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, équivaut à dire que A,B,C et D dont dans un même plan et que l'on peut exprimer les coordonnées de D dans le repère $(A ; \overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v})$: $D(x ; y)$ donc$\overrightarrow{AD} = x.\overrightarrow{u} + y.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ ce qui démontre la propriété

Attention

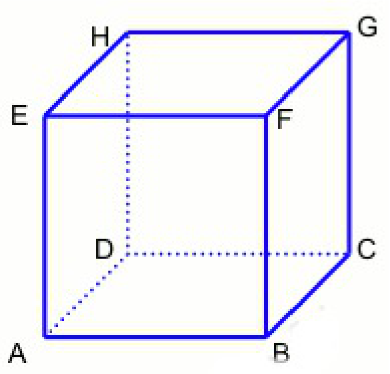


$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ peuvent être **coplanaires sans** que les points A,B, C,D,E et F soient dans un **même plan** !

Définition

Lorsque trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont **pas coplanaires**, on dit qu'ils sont *indépendants* ou *libres*.

7. Exercice



Dans le cube ci-contre, cochez les triplets de 3 vecteurs ***coplanaires***

- ☐ $\overrightarrow{AB}$;$\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$
- ☐ $\overrightarrow{AB}$;$\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}$
- ☐ $\overrightarrow{AB}$;$\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{FH}$
- ☐ $\overrightarrow{FD}$;$\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{EH}$
- ☐ $\overrightarrow{EC}$;$\overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{HG}$

Repères de l'espace

Repère de l'espace	19
Coordonnées dans l'espace	20
Exercice : Calculer avec des coordonnées dans l'espace	20
Représentation paramétrique d'une droite	20
Exercice : Représentation paramétrique d'une droite	21
Exercice : Droites orthogonales	22

Les propriétés vues sur les coordonnées dans le plan vont rester valables dans l'espace moyennant l'ajout d'une troisième coordonnée : z.

Nous verrons aussi une nouvelle manière de représenter les équations de droites : la représentation paramétrique.

1. Repère de l'espace

Fondamental

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ 3 vecteurs **non coplanaires** de l'espace.

Alors pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tels que $\vec{t} = x.\vec{u} + y.\vec{v} + z.\vec{w}$

Si $\vec{t} = \overrightarrow{AM}$, alors $(x\,;y\,;z)$ sont les *coordonnées* de M dans le repère $(A\,;\vec{u};\,\vec{v}\,;\vec{w})$

Complément : Démonstration

Existence : Soient A,B,C,D et M des points tels que

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ et $\overrightarrow{AM} = \vec{t}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires car sinon $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient coplanaires. Ainsi A,B et C définissent un plan dont $(A\,;\vec{u};\,\vec{v})$ est un repère.

La parallèle à $\overrightarrow{AD}$ passant par M est dirigée par $\vec{w}$. Puisque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont 3 vecteurs **non coplanaires**, cette parallèle rencontre le plan (ABC) en un point H.

$\overrightarrow{HM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{HM} = z.\vec{w}$

Maintenant, $\vec{t} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM} = x.\vec{u} + y.\vec{v} + z.\vec{w}$ ce qui prouve l'existance des cooordonnées x ; y et z

Unicité : On suppose que le vecteur $\vec{t}$ possède deux écritures :

$\vec{t} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM} = x.\vec{u} + y.\vec{v} + z.\vec{w} = x'.\vec{u} + y'.\vec{v} + z'.\vec{w}$

Alors $(x-x').\vec{u} + (y-y').\vec{v} + (z-z').\vec{w} = \vec{0}$

Supposons que l'une de ces 3 différences ne soit pas nulle, par exemple $z - z' \neq 0$, alors on peut exprimer le vecteur $\vec{w} = \dfrac{x-x'}{z-z'}\vec{u} + \dfrac{y-y'}{z-z'}\vec{v}$ ce qui démontre que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Or on sait par hypothèse que c'est faux. Donc $z = z'$ et en procédant de même pour les autres coordonnées, on montre que $x = x'$ et $y = y'$

Ce qui démontre l'unicité de la décomposition.

2. Coordonnées dans l'espace

Nous retrouvons dans l'espace des formules bien connues dans le plan.

On considère dans la suite deux points A et B de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $(x_B\,;y_B\,;z_B)$ dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

Fondamental : Coordonnées d'un vecteur

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Fondamental : Coordonnées du milieu d'un segment

Le milieu du segment *[AB]* a pour coordonnées$\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Fondamental : Norme d'un vecteur

Si le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est orthonormé c'est à dire

- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$
- $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux

Alors $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Complément : Avec les coordonnées de vecteur

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$
- $t.\vec{u}\begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles
- Si le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est orthonormé, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. Exercice : Calculer avec des coordonnées dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$**.**

On considère les points $A(-1\,;3\,;1)$**,** $B(3, 1, -1)$**,** $C(1\,;-3\,;-1)$ **,** $D(-5\,;0\,;2)$

Question 1

[Solution n°16 p 35]

Justifier que ABC est un triangle rectangle

Question 2

[Solution n°17 p 35]

Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

En déduite que A, B C et D sont coplanaires. Quelle est la nature de $ABCD$?

4. Représentation paramétrique d'une droite

Fondamental

L'espace est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

Soit

- A un point de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$
- $\vec{u}$ un **vecteur non nul** de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Alors $M(x\,;y\,;z)$ est sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ Si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$avec $t \in \mathbb{R}$, ce qui revient à écrire le système suivant :

$$\begin{cases} x = x_A + t \times a \\ y = y_A + t \times b \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + t \times c \end{cases}$$

Définition

On dit que ce système est une *représentation paramétrique* de la droite $(A\,;\vec{u})$

Exemple

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4 \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

est une représentation paramétrique d'une droite Δ passant par le point $A(-2\,;4\,;1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Le point $E(-3\,;4\,;4)$ appartient à la droite Δ : en effet la valeur $t = -1$ du paramètre dans la représentation paramétrique permet d'obtenir les coordonnées de E.

Le point $F(2\,;3\,;-2)$ n'appartient pas à la droite car aucune valeur du paramètre t ne permettra d'avoir la seconde coordonnée correcte.

Remarque

Il existe une infinité de représentations paramétriques d'une droite dans la mesure où il existe une infinité de vecteurs directeurs possibles.

5. Exercice : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

On considère les points $A(2\,;-1\,;5)$, $B(1,-3,2)$, $C(2\,;3\,;9)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 1

[Solution n°18 p 35]

Donner une représentation paramétrique de la droite *(AB)*

Indice :

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}$

Question 2

[Solution n°19 p 35]

Donner une représentation paramétrique de la droite $(C,\vec{u})$

Question 3

[Solution n°20 p 36]

Les droites (AB) et $(C, \overrightarrow{u})$ sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

Indice :

Il faut déterminer s'il existe deux paramètres t et t' permettant à un même triplet de coordonnées (x ;y ;z) de vérifier les deux représentations paramétriques.

6. Exercice : Droites orthogonales

On considère dans un repère orthonormé :

- **Une droite (d) de représentation paramétrique** $(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$ **avec** $t \in \mathbb{R}$
- **Une droite (d') de représentation paramétrique** $(d') : \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 5 + 4t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ **avec** $t \in \mathbb{R}$

Question 1

[Solution n°21 p 36]

Montrer que (d) et (d') ne sont pas coplanaires

Question 2

[Solution n°22 p 36]

Donner une représentation paramétrique de la droite $(d")$ parallèle à (d') passant par $A(2\,;2\,;3)$

Question 3

[Solution n°23 p 37]

Quelle est la position relative de (d) et $(d")$?

Indice :

On pourra montrer qu'elles sont perpendiculaires

On pourra trouver deux points $\boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{C}$ *respectivement sur* (d) *et* $(d")$

Question 4

[Solution n°24 p 37]

Que peut-on en déduire pour (d) et (d') ?

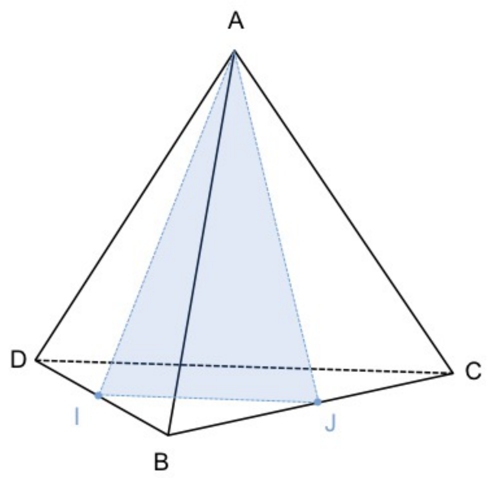
Tester ses connaissances

Pour ce test d'auto-évaluation final, vous devez obtenir un minimum de 80% de bonnes réponses. En cas d'échec, révisez la section du cours qui vous a posé des difficultés et retentez à nouveau le test.

Exercice 1

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

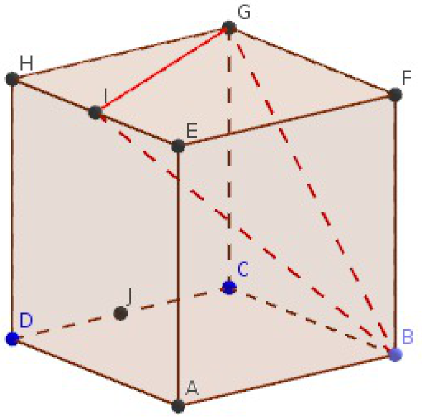
I est le milieu du segment [BD] et J est le milieu du segment [BC]



L'intersection des plans (ACD) et (AIJ) est

- Le point A
- Le plan (AIJ)
- La parallèle à (IJ) passant par A
- La droite (AB)

Exercice 2 : Cube et vecteurs



On considère le cube $ABCDEFGH$ et les milieux I et J des arêtes $[EH]$ et $[BF]$

On note $\mathcal{P}$ le plan (BIG) et K le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite (AE)

Exercice 3

Le point K

- ◯ N'appartient pas au segment $[AE]$
- ◯ est le milieu du segment $[AE]$
- ◯ est confondu avec le point E

Exercice 4

$\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ *est égal à*

- ◯ $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
- ◯ $\overrightarrow{IG}$
- ◯ $\overrightarrow{BG}$

Exercice 5

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{IH}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont*

- ◯ coplanaires
- ◯ colinéaires
- ◯ non coplanaires

Exercice 6

Le milieu du segment [KG] est :

- ◯ un point de $\mathcal{P}$
- ◯ le milieu de $[IB]$
- ◯ Le milieu de $[HJ]$

Exercice 7 : Représentation paramétrique

Dans chacun des cas suivants, indiquez la ou les bonnes réponses.

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\mathcal{D}\ :\left\{\begin{array}{r} x=1-t\\ y=-1+t\\ z=-2+2t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R} \text{ et } \mathcal{D}'\ :\left\{\begin{array}{r} x=-6+2s\\ y=s\\ z=7-\dfrac{3}{2}s\end{array}\right. \text{ avec } s\in\mathbb{R}$$

Exercice 8

$\mathcal{D}$ passe par le point de coordonnées

- ☐ (-1 ;1 ;2)
- ☐ (1 ;-1 ;-2)
- ☐ (3 ;-3 ;-6)

Exercice 9

$\mathcal{D}$ a un vecteur directeur de coordonnées :

- ☐ $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix}5\\-5\\10\end{pmatrix}$

Exercice 10

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont

- ☐ non coplanaires
- ☐ non parallèles
- ☐ sécantes

Exercice 11

Le point $M(2\,;4\,;1)$ est

- ☐ un point de $\mathcal{D}$
- ☐ un point de $\mathcal{D}'$
- ☐ Le seul point de $\mathcal{D}'$ de cote 1

Exercice 12

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par Vrai ou Faux.

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

On donne

les points $A(2\,;1\,;3)$, $B(1\,;1\,;5)$

les vecteurs $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$

Exercice 13

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires

- Vrai
- Faux

Exercice 14

La droite (AB) est parallèle au plan (xOz)

- Vrai
- Faux

Exercice 15

La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.

- Vrai
- Faux

Exercice 16

La droite Δ passant par le point $C(3\,;-1\,;2)$ et dirigée par $\overrightarrow{v}$ et la droite (AB) sont coplanaires.

- Vrai
- Faux

Contenus annexes

> Caractérisation d'une droite et d'un plan

Fondamental : Caractérisation d'une droite

Une droite peut être définie par

- un point A et
- un vecteur non nul $\vec{u}$

La droite est alors l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = x.\vec{u}$, $x \in \mathbb{R}$

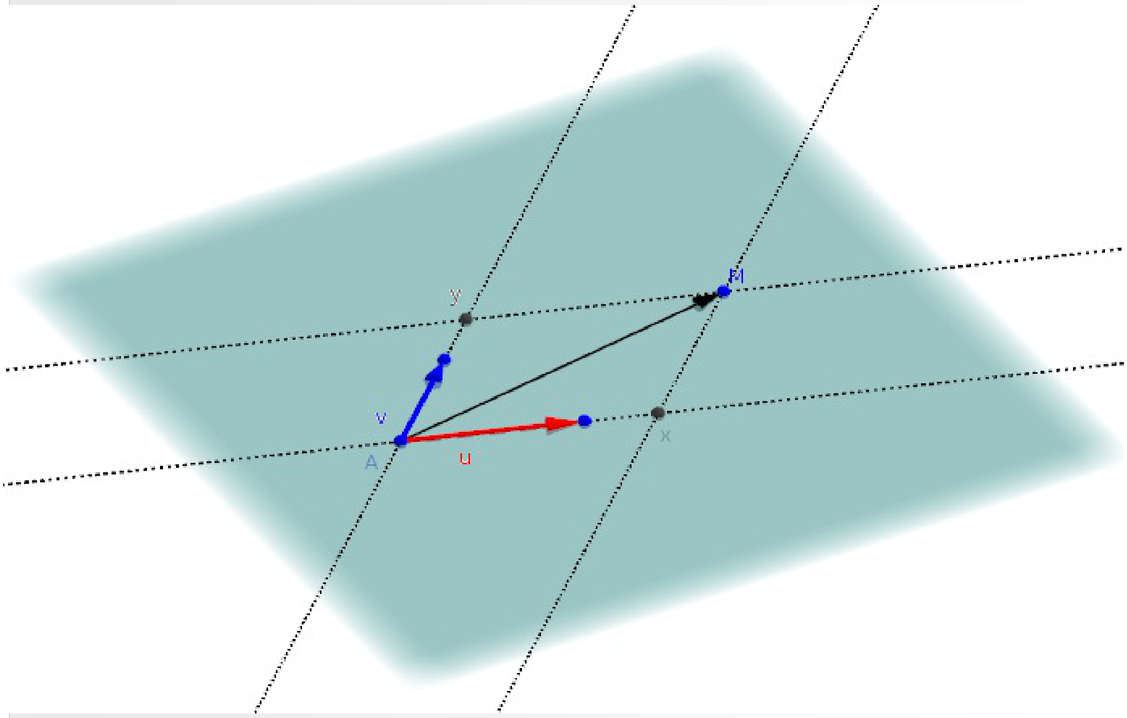
On dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite

Fondamental : Caractérisation d'un plan

Un plan peut être défini par

- un point A et
- **deux vecteurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Le plan est alors l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$, $x, y \in \mathbb{R}$



On dit alors que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent le plan.

Tout vecteur du plan peut s'écrire comme combinaison $x.\vec{u} + y.\vec{v}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$(A, \vec{u}, \vec{v})$ définissent un repère de ce plan. x et y sont les coordonnées de A dans ce repère.

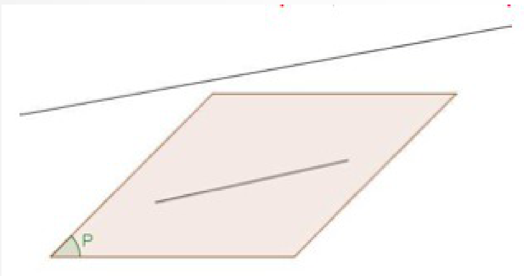
Fondamental : Conséquences

- Deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont **colinéaires**
- Deux plans ayant **même couple** de vecteurs directeurs sont **parallèles**
- Une droite (d) et un plan $\mathcal{P}$ sont **parallèles** si et seulement si un vecteur directeur de (d) est un **vecteur du plan** $\mathcal{P}$

> Droites parallèles à un plan

Fondamental

Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan



Fondamental : Théorème du toit

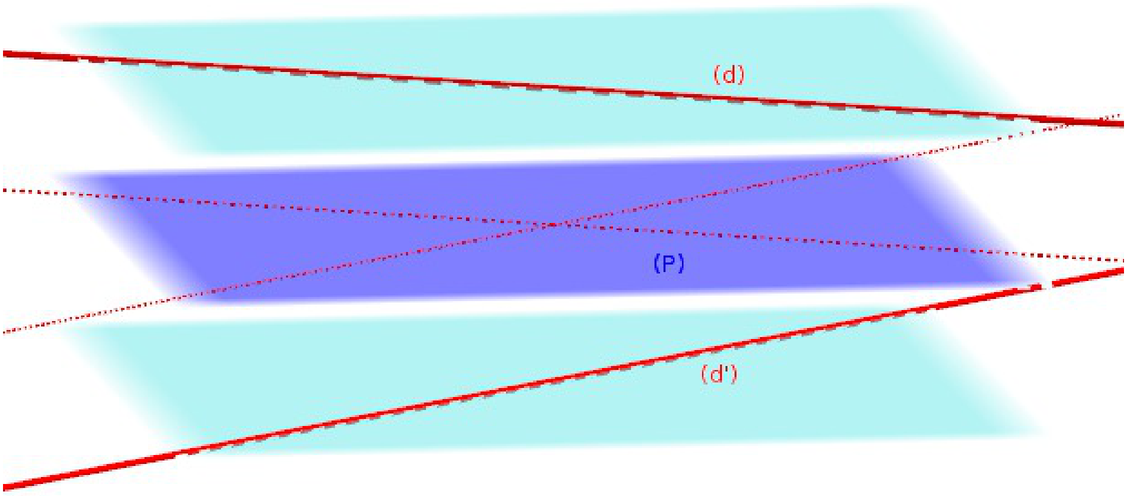
Si deux droites d et d' sont parallèles telles que :

- un plan P contienne la droite d,
- un plan P' contienne la droite d',
- les plans P et P' sont sécants suivant une droite Δ,

alors Δ est parallèle aux droites d et d'.

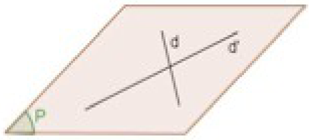
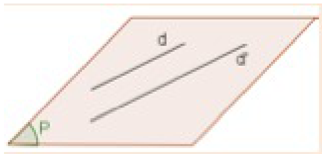
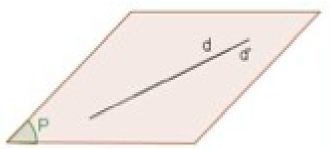
Attention

Si d est parallèle à $\mathcal{P}$ et d' parallèle à $\mathcal{P}$, on **ne peut pas** en déduire que $d//d'$!



> Position relative de deux droites

Droites coplanaires

Droites sécantes	Droites parallèles	
	Droites **strictement** parallèles	Droites confondues
		

Solutions des exercices

> Solution n°1

Exercice p. 8

Dans le plan *(SAC)*, on applique le théorème des milieux :

I et K sont les milieux respectifs de *[SA]* et *[SC]*, donc la droite *(IK)* est parallèle à la droite *(AC)*.

Or pour prouver qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de prouver que cette droite est parallèle à une droite de ce plan.

On en déduit que *(IK)* est parallèle au plan *(ABC)*.

> Solution n°2

Exercice p. 9

Dans le triangle ABC, (IJ) est la droite des milieux des côtés [AB] et [AC].

On en déduit que (IJ) est parallèle à (BC).

Or, la droite (BC) est incluse dans le plan (BCD).

La droite (IJ) est ainsi parallèle à une droite du plan (BCD), elle est donc parallèle à ce plan.

> Solution n°3

Exercice p. 9

On sait que :

- La droite (IJ) appartient au plan (HMN)
- La droite (BC) appartient au plan (DMN)
- Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles

Les plans (HMN) et (DMN) contiennent donc deux droites parallèles, (IJ) et (BC). D'après **le théorème du toit**, l'**intersection** de ces deux plans est alors **parallèle** à ces **deux droites**.

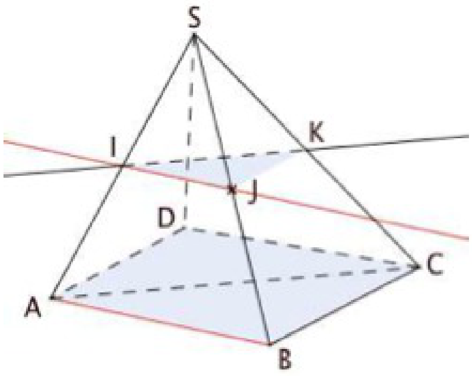
Or, les points M et N sont communs aux plans (HMN) et (DMN) : la droite **(MN) est donc l'intersection de ces deux plan**s.

La droite (MN) est donc parallèle aux droites (IJ) et (BC).

> Solution n°4

Exercice p. 10

Dans l'exercice précédent utilisant la même figure, on a démontré que (IK) est parallèle au plan (ABC). On démontrerait de même que (IJ) est parallèle au plan (ABC).



Les droites (IK) et (IJ), sécantes en I, sont parallèles au plan (ABC), d'après le théorème des plans parallèles 1, on en déduit que le plan (IJK) est parallèle au plan (ABC).

> Solution n°5

Exercice p. 10

Pour la face AEFB

Le plan (IJK) coupe la face ABFE suivant la droite (IJ). On commence donc par tracer le segment [IJ].

Pour la face EFGH

Le plan (IJK) coupe la face EFGH suivant la droite (IK). Soit L le point d'intersection de la droite (IK) avec l'arête [HG]. On trace le segment [IL].

Pour la face CDHG

D'après le second théorème des plans parallèles, les faces ABFE et DCGH étant parallèles, le plan (IJK) coupe la face DCGH suivant **une droite parallèle à (IJ).** Le plan (IJK) coupe donc la face DCGH suivant la droite parallèle à (IJ) et passant par L.

On trace cette droite qui coupe l'arête [CG] en M.

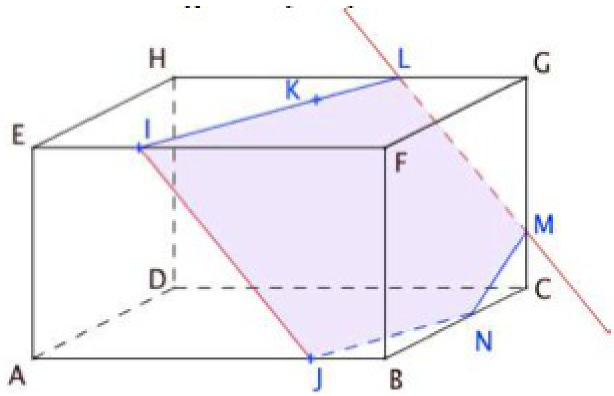
Pour la face ABCD

On justifie de même que le plan (IJK) coupe la face ABCD suivant **la droite parallèle à (IK) passant par J**.

On trace cette droite qui coupe l'arête [BC] en N.

Pour finir

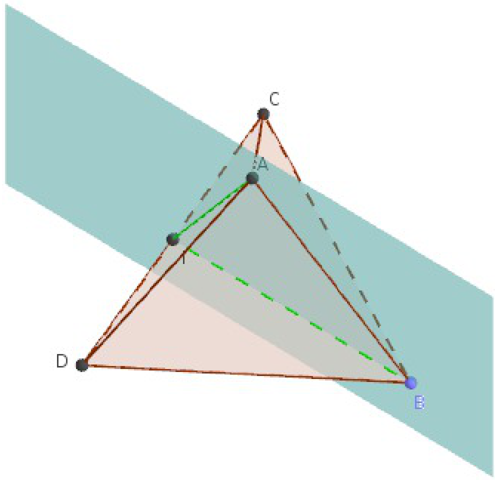
On trace le segment [MN], ce qui donne la section suivante :



> Solution n°6

Exercice p. 12

Méthode : 1ère méthode : A l'aide du plan médiateur



- AC=AD donc A appartient au plan médiateur de [CD]
- BC=BD donc B appartient au plan médiateur de [CD]
- IC=ID donc I appartient au plan médiateur de [CD]

De plus A, B et I ne sont pas alignés donc ils définissent un plan : c'est le plan médiateur de *[CD]*.

Toute droite de ce plan médiateur est orthogonale à *(CD)*, donc en particulier *(AB)*.

(AB) et *(CD)* sont donc orthogonales.

Méthode : 2ème méthode : Montrer que (CD) orthogonale à (ABI)

- Dans le triangle équilatéral ADC, la médiane *(AI)* est aussi la hauteur issue de A donc $(CD)\perp(AI)$.
- De même dans le triangle équilatéral BCD, $(CD)\perp(BI)$

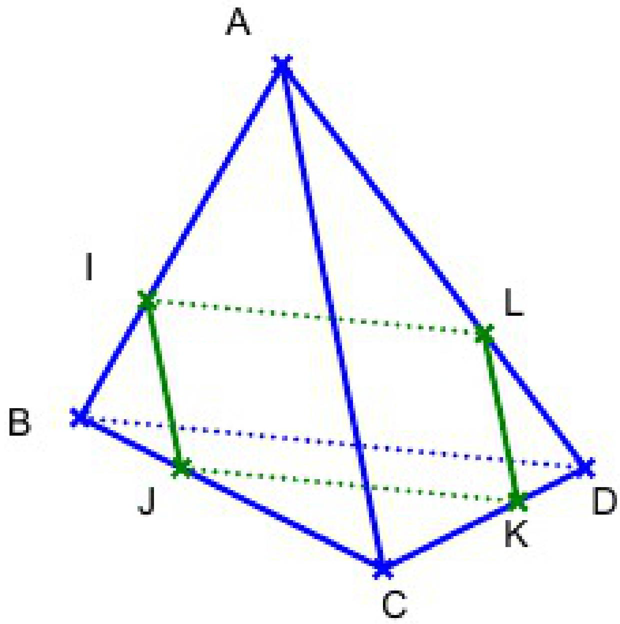
Donc *(AI)* et *(BI)* sont deux droites sécantes du plan *(ABI)* qui sont toutes deux perpendiculaires à *(CD)*

Par conséquent le plan *(ABI)* est orthogonal à la droite *(CD)*

Donc *(AB)* est orthogonale à *(CD)*

Exercice p. 14

> Solution n°7



> Solution n°8

Exercice p. 14

$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

Donc $\overrightarrow{IJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

En factorisant et en utilisant la relation de Chasles, on peut simplifier l'écriture de $\overrightarrow{AI}$:

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

> Solution n°9

Exercice p. 14

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK}$

Donc $\overrightarrow{LK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$

Donc $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

En utilisant la question précédente, on en déduit que $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IJ}$ ce qui démontre que $IJKL$ est un **parallélogramme** et donc que ces 4 points sont coplanaires.

On a vu que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $(LK)//(AC)$

La droite *(AC)* est parallèle à une droite du plan *(IJKL)* donc *on peut affirmer - p.28* que *(AC)* est parallèle au plan *(IJKL)*

Exercice p. 14

> Solution n°10

On raisonne de manière identique aux questions précédentes en montrant que $\overrightarrow{JK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

De là découle que $(JK)//(BD)$ et donc que *(BD)* est parallèle au plan *(IJKL)*

> Solution n°11

Exercice p. 15

Utilisation de la relation de Chasles

$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL}$

$\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$

Or ABCDEFGH est un cube donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{DH}$

Donc $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$

> Solution n°12

Exercice p. 15

$\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas colinéaires donc ils dirigent le plan (DBH)

Le vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$ est donc aussi un vecteur du plan (DBH)

Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est donc aussi un vecteur du plan (DBH)

Mais le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est donc aussi un vecteur directeur de la droite (ML)

Donc d'après les *propriétés vues précédemment - p.27*, la droite (ML) est parallèle au plan (DBH)

> Solution n°13

Exercice p. 16

- $\Delta \subset \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{w}$ dirige Δ donc $\overrightarrow{w}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$
- $(d) \subset \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$ dirige (d) donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$

$(d)//(d')$ et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d), donc $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de (d'). Comme ci-dessus, on peut dire que :

- $\Delta \subset \mathcal{P}'$ et $\overrightarrow{w}$ dirige Δ donc $\overrightarrow{w}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}'$
- $(d') \subset \mathcal{P}'$ et $\overrightarrow{u}$ dirige (d') donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$

Conclusion : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

> Solution n°14

Exercice p. 16

Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires.

- Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ appartiennent à $\mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ dirigent $\mathcal{P}$
- Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ appartiennent à $\mathcal{P}'$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ dirigent $\mathcal{P}'$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont donc même couple de vecteurs directeurs, on en déduit donc d'après *les propriétés vues précédemment - p.27* que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

> Solution n°15

Exercice p. 16

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires, on a vu que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles. Mais ce résultat est contraire aux hypothèses de départ !

Par l'absurde, on en déduit donc que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont donc colinéaires.

Par conséquent, (d) et Δ sont parallèles car ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Et puisque $(d)//(d')$, on en déduit que (d) (d') et Δ sont parallèles. cqfd.

> Solution n°16

Exercice p. 20

$$AB = \sqrt{(3-(-1))^2+(1-3)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{24}$$
$$AC = \sqrt{(1-(-1))^2+(-3-3)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{44}$$
$$BC = \sqrt{(1-3)^2+(-3-1)^2+(-1-(-1))^2} = \sqrt{20}$$

On constate ainsi que $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

> Solution n°17

Exercice p. 20

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 1-3 \\ -1-1 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -5-1 \\ 0-(-3) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On voit ainsi que $\overrightarrow{CD} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ce qui démontre leur colinéarité

Les droites *(AB)* et *(CD)* sont **parallèles** *donc coplanaires - p.28*. Les points A,B,C et D sont donc **coplanaires**.

Le quadrilatère *ABCD* est un **trapèze**, **rectangle** en B.

> Solution n°18

Exercice p. 21

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-(-1) \\ 2-5 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de *(AB)* est donc

$$(AB)\ :\ \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1-2t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 5-3t \end{cases}$$

Exercice p. 21

> Solution n°19

Une représentation paramétrique de la droite $(C, \overrightarrow{u})$ est

$$(d)\ :\ \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 9 + t \end{cases}$$

> Solution n°20

Exercice p. 21

Les coordonnées *(x ;y ;z)* du point d'intersection - s'il existe - doivent vérifier simultanément les deux représentations paramétriques des droites *(AB)* et $(C, \overrightarrow{u})$. Néanmoins il n'y a acune raison que la valeur du paramètre t soit identique dans les deux représentations. Ecrivons donc le système d'équations

$$(S)\ :\ \begin{cases} x = 2 - t = 2 + t' \\ y = -1 - 2t = 3 \quad \text{où } t, t' \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 3t = 9 + t' \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} 2 - t = 2 + t' \\ -2t = 4 \\ 5 - 3t = 9 + t' \end{cases}$$

La valeur t=-2 de la seconde équation nous permet de remplacer dans les autres équations l'inconnue t.

$$(S) \iff \begin{cases} 2 + 2 = 2 + t' \\ t = -2 \\ 5 + 6 = 9 + t' \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'avoir la valeur de t'

$$(S) \iff \begin{cases} 2 = t' \\ t = -2 \\ 2 = t' \end{cases}$$

Le système admet donc une solution unique avec $t = -2$ et $t' = 2$

En remplaçant la valeur du paramètre dans l'une ou l'autre des équations paramétriques, on trouve les coordonnées du point d'intersection, à savoir $I(4\,;3\,;11)$

> Solution n°21

Exercice p. 22

- Leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires
- Résolvons le système
$$\begin{cases} 2 + t = -1 - 4t' \\ 2 + t = 5 + 4t' \\ 3 = -1 - 2t' \end{cases}$$

La dernière équation donne $t' = -2$

dans la seconde équation, on a donc $2 + t = -3$ soit $t = -5$

la première équation donne donc $-3 = 7$ ce qui prouve que les droites ne sont pas sécantes.

Puisqu'elles ne sont pas parallèles non plus, elles sont non coplanaires.

> Solution n°22

Exercice p. 22

Une représentation paramétrique de la parallèle à (d') passant par A(2 ;2 ;3) est

$$(d") \ : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 2 + 4t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

> Solution n°23

Exercice p. 22

Les deux droites (d) et $(d")$ sont sécantes puisqu'elles ont des vecteurs directeurs non colinéaires et ont le point A en commun.

prenons $t = 1$ pour la droite (d) : $B(3\,;3\,;3)$

prenons $t = 1$ pour la droite $(d")$: $C(-2;6\,;1)$

Calculons

$AB = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{36}$

$BC = \sqrt{38}$

Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires

Donc (d) et $(d")$ sont perpendiculaires

> Solution n°24

Exercice p. 22

(d) et (d') sont **orthogonales** car (d') est parallèle à une droite perpendiculaire à (d) et qu'elles ne sont pas coplanaires.