1 Nombre dérivé

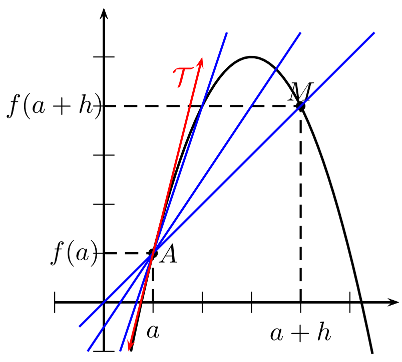
Définition 1.

Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** en un point x_0 de I si la quantité

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

admet une limite finie quand h tend vars 0.
Cette limite est appelée **nombre dérivé** en x_0 et notée $f'(x_0)$.

lorsque h se rapproche de 0, (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ en A de coefficient directeur $f'(a)$.



La tangente en $A\,(a, f(a))$ a pour équation $\mathcal{T} : y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

2 Tableaux des dérivées

Définition 2.

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé **fonction dérivée** de f sur I.

Remarque. en physique, la vitesse $v(t)$ est le nombre dérivé de la fonction $x = f(t)$.
On note $v(t) = f'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Fonction f	Fonction f'	Intervalle I
k	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

TICE. pour dériver, on peut utiliser un logiciel de calcul formel comme wxMaxima :
```
diff(f(x),x,1);
```

Dans le cas de fonctions plus complexes, on a les formules suivantes avec u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication	$k \times u$	$k \times u'$
Produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Quotient	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Remarque. $u = 1 \Rightarrow u' = 0$, on retrouve la formule précédente

Exemple 3

- $f(x) = x^3 + x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.
  On obtient $f'(x) = 3x^2 + 1$.
- $f(x) = 3(x^2 + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  On obtient $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$.
- $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$ définie sur $\mathbb{R}$.
  On obtient $f'(x) = -2(5x - 3) + 5(-2x + 3) = -20x + 21$.
- $f(x) = \dfrac{1}{-3x+1}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
  On obtient $f'(x) = \dfrac{3}{(-3x+1)^2}$.
- $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.
  On obtient $f'(x) = \dfrac{3(x^2+3) - 2x(3x-4)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-3x^2+8x+9}{(x^2+3)^2}$.

?
$(u + v)' = u' + v'$

?
$(ku)' = ku'$

?
$(uv)' = u'v + uv'$

?
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

?
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

3 Lien avec le sens de variation

Propriété 4.

On suppose que f est dérivable sur I.

- f est croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple 5

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- pour tout réel x on a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$;
- on détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines, on trouve -1 et 2 ;
  $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2 ;
- on détermine le signe de la dérivée, puis les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-21	$\nearrow$	$+\infty$

?
pour cela, on calcule le discriminant, qui vaut 9, donc positif

- f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,]$ et sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $[\,-1\,;\,2\,]$.