Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Géométrie dans l'espace (1) :** *Vecteurs, droites et plans*	Année scolaire 2022/2023

I) Vecteurs de l'espace :

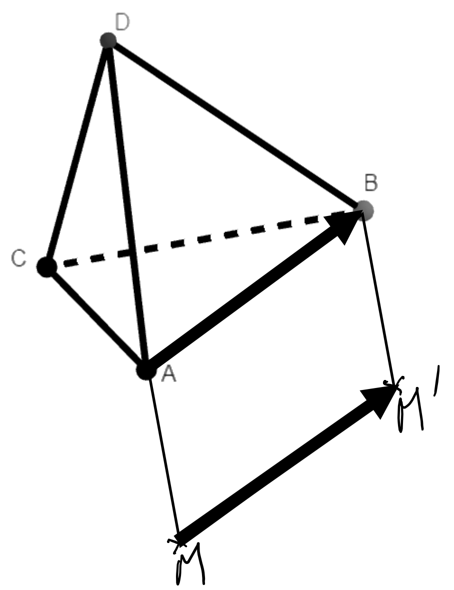
Remarque importante :

On va étendre à l'espace la notion de vecteur étudiée en géométrie plane depuis la classe de Seconde.

1) Translation :

On considère deux points A et B, distincts de l'espace.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation de l'espace qui, à tout point M associe l'unique point M'de l'espace tel que : …………………………………………...



Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ont ……………………………………………………………………….

Donc : ils sont égaux, c'est-à-dire : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

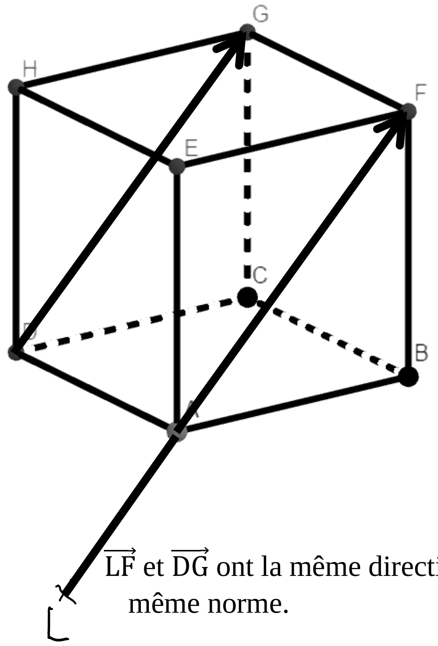
Théorème (admis) :

> On considère un point A de l'espace et un vecteur $\vec{u}$.
>
> Il existe un unique point B de l'espace tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$
>
> $\overrightarrow{AB}$ est le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

2) Opérations sur les vecteurs de l'espace :

La somme de deux vecteurs (avec la règle du parallélogramme), la relation de Chasles, le produit d'un vecteur par un réel s'étendent du plan à l'espace sans problème.

Exemple :



$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{LF}$ et $\overrightarrow{DG}$ ont la même direction et le même sens, mais pas la même norme.

$$\overrightarrow{EB} = \ ....$$

$$\overrightarrow{BC} = \ \dots\dots = \ \dots\dots\dots$$

3) <u>Colinéarité et coplanarité :</u>

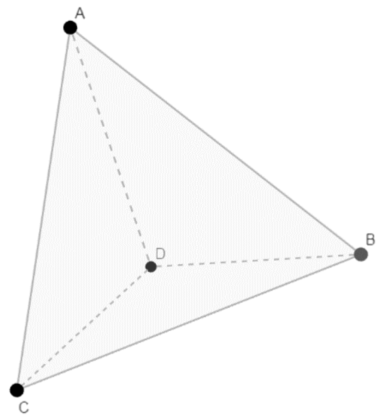
<u>a) Colinéarité</u> : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **<u>colinéaires</u>** si ……………………………………………………….

Dans ce cas, ces deux vecteurs ont la même direction (si k > 0, ils ont aussi ………………, sinon des …………………..)

<u>Exemple :</u>

On considère le tétraèdre ABCD ci-dessous :



On définit les points M et N de l'espace par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$$

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

Donc : **Les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires**

Propriété :

Trois points de l'espace deux à deux distincts A, B et C sont alignés ⇔ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Même démonstration que dans le plan.

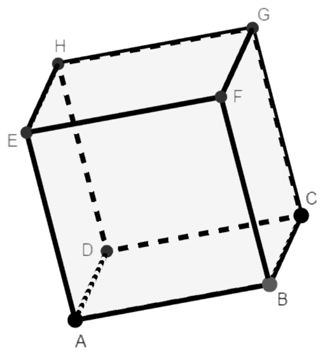
b) Coplanarité :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si il existe……………………………………………………………..

On dit aussi que $\vec{w}$ est **une combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Exemple :



$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$, donc $\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires

Même chose pour les vecteurs $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CG}$

II) Droites et plans de l'espace :

1) Définition vectorielle d'une droite :

Soient A et B, deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

… … … … … … … … … … … … … … … … … ….

Autrement dit : C'est l'ensemble des points M de l'espace tels que : … … … … … … … … … … … ..

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB)

Remarque :

Pour déterminer entièrement une droite, il suffit d'en donner un point et un vecteur directeur.

2) Définition vectorielle d'un plan :

On considère trois points de l'espace non alignés A, B et C.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels k_1 et k_2 vérifiant :

… … … … … … … … … … … … … …

On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC)

$\overrightarrow{AM}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

On dit également que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan (ABC) et $(A\ ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de ce plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires.

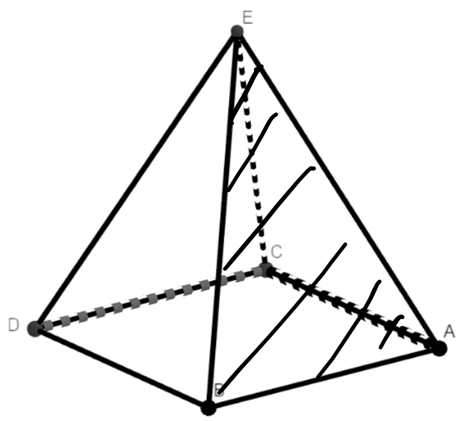
Il existe un plan contenant alors les points A, M , B et C (=le plan (ABC)).

On dit alors que les points A, M, B et C sont coplanaires.

Remarques :

- Trois points sont toujours coplanaires
- Pour déterminer un plan, il suffit de donner un point et deux vecteurs non colinéaires (ils seront vecteurs directeurs de ce plan)

Exemple :

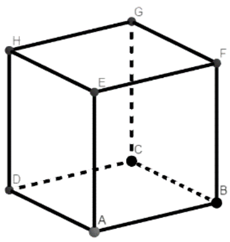


……………………………………… suffisent à définir le plan (EAB)

Exercice :

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous. On définit le point M par : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM}$

Montrer que le point M est situé sur le plan (ABC).

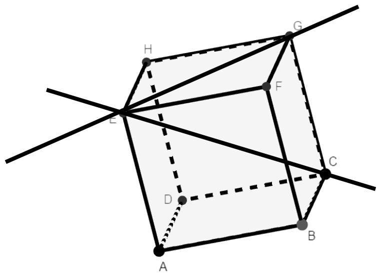


Donc : <u>M ∈ (ABC)</u>

3) Position relative de droites et plans :

a) Position relative de deux droites :

Deux droites sont coplanaires si……………………………………………………………………………….



Les droites (EG) et (EC) sont coplanaires (=elles appartiennent au plan …………..)

Par contre, les droites (EG) et (FB) ne sont pas coplanaires.

Propriété :

- Deux droites coplanaires sont ………………………………….(on retrouve le résultat classique des positions relatives de deux droites en géométrie plane) - Deux droites non coplanaires ont ………………………………………

b) Position relative d'une droite et d'un plan :

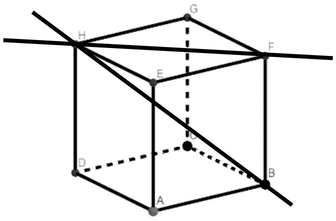
Définition et propriétés :

On considère une droite (d) et un plan (P), tels que (d) n'est pas incluse dans (P)

On note $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}, \vec{w}$, deux vecteurs directeurs du plan (P) :

- <u>La droite (d) est strictement parallèle au plan (P)</u> si … … … … … … … … … … … … …
- Si (d) n'est pas parallèle à (P), alors…………………………………………………………..

<u>Exemples :</u>



La droite (FH) est parallèle au plan (ABC)

Elle est contenue dans le plan (EFG)

<u>*Notation :*</u> …………………………..

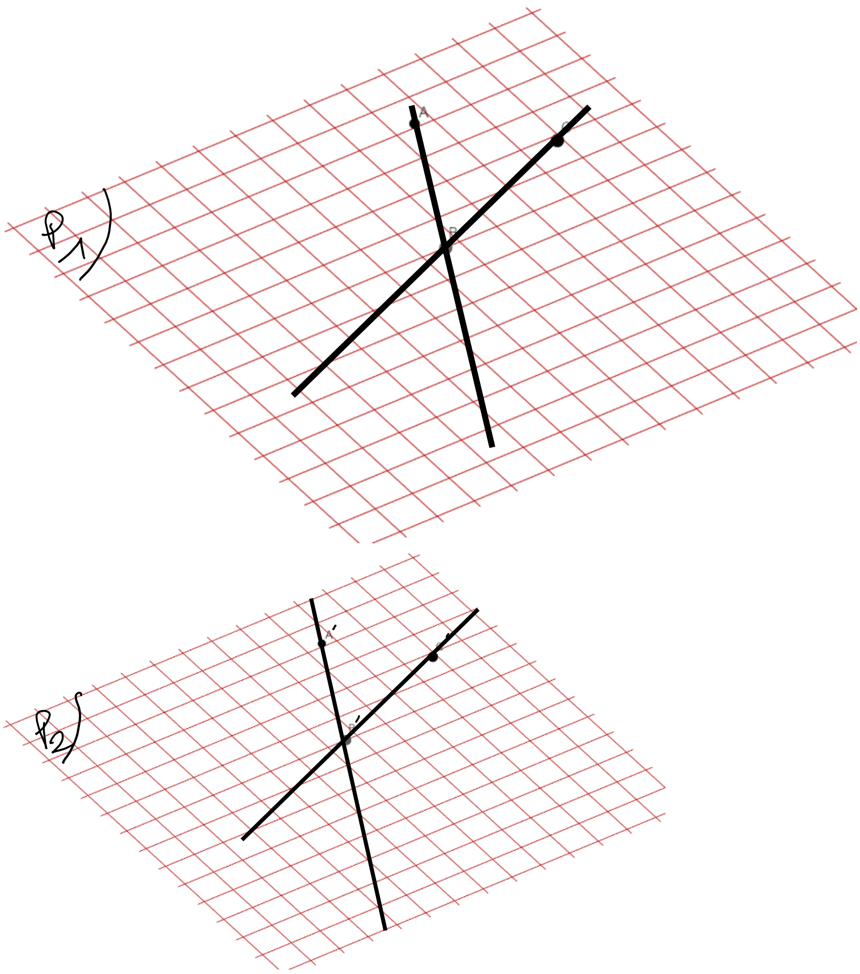
La droite (BH) est sécante au plan (ABC) et le point d'intersection est B.

<u>*Notation :*</u> …………………………………………

<u>**c) Position relative de deux plans :**</u>

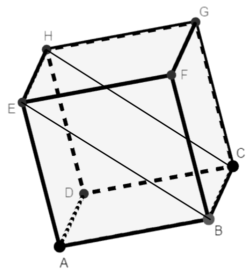
<u>**Définition et propriétés :**</u>

- Deux plans (P_1) et (P_2) sont dits <u>**strictement parallèles**</u>, si ……………………………………
  ……………………………………………………………………………………………



- Si deux plans distincts ne sont pas parallèles, alors ……………………………………………….

Exemple :



Le plan (HEC) est sécant au plan (ABC) selon la droite (BC)

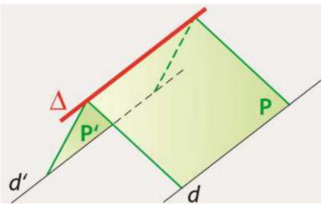
- Si deux plans (P_1) et (P_2) sont parallèles, alors …………………………………………………

………………………………………………………………………………………………..

Dans le cube précédent, les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles. Le plan (EBC) est sécant au plan (EFG) selon (EH) et il est sécant au plan (ABC) selon (BC).

On a bien (EH) // (BC)

Théorème du toit :



Soient (P) et (P’) deux plans sécants selon une droite (Δ), (d) et (d’), deux droites respectivement contenues dans (P) et (P’) avec (d) // (d’).

Alors : …………………………………………………………

III) Repères de l’espace :

1) Coordonnées d’un vecteur :

a) Un triplet de vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ non coplanaires forme une base de l’espace.

b) Propriété :

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l’espace.

Tout vecteur $\vec{u}$ de l’espace se décompose de manière unique dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ c’est-à-dire :

Il existe un unique triplet de réels (x ;y ;z) tel que ……………………………………………….

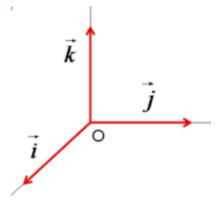
On dit que (x ;y ;z) sont …………………………………………………………...

Notation : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Définition d'un repère de l'espace :

Un repère de l'espace est constitué ……………………………………..

Par exemple : (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) est le repère d'origine le point O et pour base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)



Coordonnées d'un point de l'espace :

Soit (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x ;y ;z) tel que :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

(x ;y ;z) sont les coordonnées du point M dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)

Vocabulaire : x =……………, y = ………………….., z = ………………………..

2) Opérations sur les coordonnées :

On considère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) un repère de l'espace, A(x_A ;y_A ;z_A) , B(x_B ;y_B ;z_B) , $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : ………………………

Le milieu du segment [AB] a pour coordonnées : … … … … … … … … … … …

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées… … … … … …   Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées … … … … ….

3) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit un point A de coordonnées (x_A ;y_A ;z_A) dans un repère de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans ce même repère.

La droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

… … … … … … … … … … … … … … … …

Autrement dit : … … … … … … … … … … … … … … ….

En raisonnant en coordonnées, en posant M(x ;y ;z) , on obtient :

Ce système obtenu est appelé **………………………………………………………**

Remarque : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Exemples :

1) Soit la droite (d) passant par A(5 ;-2 ;1) et de vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de (d) est :

2) On considère la droite (AB) avec A(-2 ;3 ;1)   et B(1 ;4 ;-5)

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)