Chapitre 8 : Nombres complexes

Ecriture algébrique

Exercice 1

1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = \dfrac{1+i}{i}$ **b.** $z_2 = \dfrac{1}{1-i}$ **c.** $z_3 = \dfrac{-2+i}{2+i}$

2. On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = 1+i \quad \text{et} \quad z_2 = 5-2i$$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

a. $z_1 + z_2$ **b.** $z_1 - z_2$ **c.** $z_1 - 2z_2$

d. $z_1 \times z_2$ **e.** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **f.** $\dfrac{z_2}{z_1 - z_2}$

3. Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité :

$$z = (x+2i)(1-xi)$$

a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z.
b. Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un nombre réel ?
c. Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un nombre imaginaire pur ?

Exercice 2

Ecrire sous forme algébrique : $z_1 = \dfrac{7+i}{3-2i}$ $z_2 = \dfrac{-3}{(1+i)(2-i)}$

Exercice 3

Déterminer le conjugué du nombre complexe suivant et l'écrire sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}$$

Résolution d'équations

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $3z + iz = 0$ **b.** $z + 2iz = i$ **c.** $z + 2 - i(z+1) = 0$

d. $\dfrac{z-5}{z-i} = i$ **e.** $2iz - 3 = z + 1$ **f.** $3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz$

g. $\dfrac{z-1}{iz+3} = 4i$ **g.** $3z(z+i) = -iz$ **h.** $-\dfrac{z}{iz+1} + \dfrac{3z}{z-1} = 3+i$

Exercice 5

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations suivantes

1. $(2+3i)z - (5+2i) = 3z + 4i$.
2. $(7-i)\overline{z} = 3$.
3. $iz + 2\overline{z} = i - 1$.

Exercice 6

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$ **2.** $z^2 + z + 1 = 0$ **3.** $z^2 - 5z + 9 = 0$
4. $z^2 - 3z + 4 = 0$ **5.** $z^2 - z + 10 = 0$ **6.** $z^2 - 4z - 1 = 0$

Exercice 7

On considère sur $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

(E) $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$

1. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation *(E)* s'écrive :

(E) $(z-2)(z^2 + a.z + b) = 0$

2. Résoudre l'équation *(E)*

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$$

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, $f(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

Exercice 9

1. Dans $\mathbb{C}$ on considère le polynôme $z^2 + 6z + 25$; déterminer ses racines.

2. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe a et b définis par :

$$a = (1+2i)^2 \quad ; \quad b = (1-2i)^2$$

3. En déduire les solutions de l'équation :

$$z^4 + 6z^2 + 25 = 0$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \overline{z} + \frac{1}{4} = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 11

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2+1)Q(z)$.

b) En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.

Exercice 12

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z-i)(z^2+pz+q)$.
3. Montrer que les solutions de $P(z) = 0$ sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Exercice 13

Pour tout nombre complexe z différent de 1, on définit $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 14

Pour tout nombre complexe z différent de i, on définit $Z = \frac{z+3}{z-i}$.

On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Forme trigonométrique et exponentielle

Exercice 15

Calculer le module de chacun des nombres complexes donnés :

1. $z_1 = 1 + 3i$ **2.** $z_2 = 3 - 4i$
3. $z_3 = -1 + 7i$ **4.** $z_4 = -5 - 3i$

Exercice 16

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes donnés :

1. $z_1 = -1 + i$
2. $z_2 = i$
3. $z_3 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$
4. $z_4 = (2+2i)(1-i)$
5. $z_5 = i(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$
6. $z_6 = \frac{\sqrt{3}+i}{2i}$

Exercice 17

On considère le nombre complexe : $z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de z^2. En déduire le module et un argument de z.
3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = \sqrt{2}$
et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 18

Soit : $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2 = 1 - i$; $Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$

1. Mettre Z_3 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et l'argument de Z_1 et de Z_2.
3. Ecrire Z_3 sous forme trigonométrique. En déduire : $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 19

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = -2+2i$ et $z_2 = -3-i\sqrt{3}$.
Ecrire ensuite la forme exponentielle du produit $z_1 z_2$.

Exercice 20

Ecrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

$$z_1 = \left(3+i\sqrt{3}\right)^4 \qquad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \qquad z_3 = \frac{\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}$$

Exercice 21

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$

2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.

a. Déduire de 1) une solution de l'équation (E).

b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3. Déduire également de 1) une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8i$.

Exercice 22

On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3}+i\right)^{2\,013}$.

1) Déterminer la forme exponentielle de : $-\sqrt{3}+i$

2) Montrer que a est un imaginaire pur

Géométrie et nombres complexes

Exercice 23

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1+i, \quad b = 3i, \quad c = \left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$$

Montrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 24

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

1) Rapeller les expressions de : $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$

2) Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Exercice 25

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = 2+i\sqrt{3}$, $z_C = 2-i\sqrt{3}$ et $z_G = 3$.

a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.
b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.
c. Calculer un argument du nombre complexe :

$$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$$

En déduire la nature du triangle GAC.

Exercice 26

Représenter les ensembles suivants

$$\mathscr{E}_1 = \left\{M(z) \ / \ \arg(z+3i) = \frac{\pi}{6} \ (\pi)\right\}$$

$$\mathscr{E}_2 = \{M(z) \ / \ |z+4+i| = |z-i|\}$$

$$\mathscr{E}_3 = \{M(z) \ / \ |z-4i| = 2\}$$

Exercice 27

Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification)

$$\mathscr{E}_1 = \left\{M(z) \ / \ \arg(z-2i+1) = \frac{2\pi}{3} \ (2\pi)\right\}$$

$$\mathscr{E}_2 = \left\{M(z) \ / \ \arg\left(\frac{z-2i+1}{z-3+i}\right) = \pi \ (2\pi)\right\}$$

$$\mathscr{E}_3 = \left\{M(z) \ / \ Z = i\frac{z-2i+1}{z-3+i} \in \mathbb{R}_+\right\}$$

$$\mathscr{E}_4 = \{M(z) \ / \ |z+2+i| = |z-2i|\}$$

Exercice 28

Déterminer les lieux de points décrits par le point $M(z)$, où z est un nombre complexe :

1. $|z| = |\bar{z} - 2 + i|$ **2.** $\arg(z + 2i) = \frac{\pi}{4}$ **3.** $z^2 - 2\bar{z} + 1 \in IR$

4. $z^2 - 2\bar{z} + 1 \in iIR$

Exercice 29

1) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe vérifiant :
   a) $|z-1| = |z-i|$
   b) $|z+i| = 4$
2) Donner, dans chaque cas, une équation cartésienne de l'ensemble trouvé.

Exercice 30

A chaque point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M ' d'affixe $z' = \frac{z+2}{1+iz}$.

1) On note A le point d'affixe -2 et B celui d'affixe i.
   Interpréter géométriquement le module de z'.
2) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.
   Donner une équation cartésienne de cet ensemble.

Exercice 31

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

1) On note A_n le point du plan d'affixe z_n. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 sur une figure.
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = |z_n|$. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$
3) A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?
4) a) Etablir que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$. En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.
   b) Pour tout entier naturel n, on note L_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer L_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (L_n) ?

Exercice 32

Soit $A(-3i)$ et $B(3+2i)$. Soit $M(z)$. Pour $M \neq B$ on définit le point M' d'affixe $Z = \frac{z+3i}{z-3-2i}$.
Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tel que M' soit un point de l'axe des imaginaires pur.

Exercice 33

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z $(z \neq -1)$ associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-iz - 2}{z+1}.$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1. Soit C′ l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C′ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D′ d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.

3. Pour tout nombre complexe z différent de -1, on note p le module de $z+1$ (c'est-à-dire $|z+1| = p$) et p' le module de $z' + i$ (c'est-à-dire $|z' + i| = p'$).

a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, on a :

$$pp' = \sqrt{5}.$$

b. Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ'), dont on précisera le centre et le rayon.

4. Pour tout nombre complexe z différent de -1, on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z - 2i}{z+1}$.

a. Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe ω.

b. Montrer que $z' = -i\omega$.

c. Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.

d. Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).

5. Représenter les ensembles (Γ), (F) et (Γ') en prenant 4 cm pour unité graphique.

Exercice 34

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2-i$.

Montrer qu'il existe un seul point D tel que f(D)=C.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \quad \text{et} \quad \left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) \quad [2\pi]$$

4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :

a. L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit située sur un cercle (Γ) de centre O, de rayon 1.

b. L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

Exercice 35

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = 2i$.

A tout complexe z différent de A on associe le complexe z' tel que :

$$z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$$

a. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
Montrer que B ∈ (E). Déterminer et construire l'ensemble (E).

b. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$. Déterminer et construire (F).

Problèmes de synthèse

Exercice 36

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$. On prendra une unité graphique de 3 cm. On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z du plan associe le point M' d'affixe z' avec $z' = \dfrac{(3+4i)z+5\,\bar{z}}{6}$.

1) On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.
   Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f.
   Placer les points A, B, C, A', B', C' dans le repère.
2) On pose $z = x+iy$ (avec x et y réels).
   Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
3) Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.
   Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?
4) Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f.
   Montrer que M' appartient à la droite (D).
5) a) Montrer que, pour tout nombre complexe z on a : $\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{z+\bar{z}}{6} + i\,\dfrac{z-\bar{z}}{3}$

   En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{z_A}$ est réel.

   b) En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
6) Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ?
   On pourra étudier deux cas, suivant que N appartient ou non à (D).
   Effectuer la construction sur la figure.

Exercice 37

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1+i\sqrt{3}$ et $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

Partie A

1) Donner la forme trigonométrique de z_A puis z_B. Placer les points A, B et C.
2) Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
3) Déterminer et construire l'ensemble D des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = -\dfrac{4}{z-2}$.

1) a) Résoudre dans ℂ l'équation $z' = -\dfrac{4}{z-2}$.

   b) En déduire les points associés aux points B et C.

   c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2) a) **Question de cours :**

Prérequis : Le module d'un nombre complexe z vérifie $|z|^2 = z\,\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

Démontrer que : ▸ Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.

▸ Pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de D, où D est l'ensemble défini à la question 3) de la partie A.
Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
Tracer Γ.

Exercice 38

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z différent de i associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{z - 1 + 2i}{z - i}$$

1) Calculer l'affixe a' du point A' image du point A d'affixe $a = 1 + 3i$ par f.
2) Déterminer l'affixe du point B qui a pour image par f, le point B' d'affixe $b' = 3i$.

Exercice 39

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) **Affirmation 1 :**
Le point d'affixe $(-1 + i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2) **Affirmation 2 :**
Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.

Exercice 40

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité sur la feuille annexe à rendre avec la copie est de 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sur la feuille annexe sera complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$

1) Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont les affixes sont solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.
3) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4) Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z) - 8| = 3$
Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Construire (F) sur le graphique. On indiquera comment tracer ce cercle.
5) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
   a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$$
   b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Exercice 41

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre ou trois propositions est exacte. Une réponse **exacte** rapporte 1 point ; une réponse **inexacte** enlève 0,5 point ; l'**absence** de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

1) Soit $z_1 = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

   a) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b) $\sqrt{12}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d) $\sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2) L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z, admet :
   a) une solution
   b) deux solutions
   c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
   d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+i| = |z-i|$.
   a) Γ est l'axe des abscisses.
   b) Γ est l'axe des ordonnées.
   c) Γ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

4) On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   a) Le triangle OBC est isocèle en O.
   b) Les points O, B, C sont alignés.
   c) Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

Exercice 42

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + \frac{1}{2}i, \quad b = -1 - i, \quad c = 3 + i, \quad d = 5 + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad e = 3 - 4i$$

1) **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2) **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.
3) **Affirmation 3 :** L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-i| = |z+1|$ est une droite.
4) **Affirmation 4 :** Le nombre complexe $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

Exercice 43

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -i z_M$.
On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que BM' = 2OI (propriété 2).

1) Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   a) Déterminer la forme algébrique de z_M.
   b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriété 1 et 2 à l'aide du graphique.

2) On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.
   a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
   d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   e) Montrer que BM' = 2OI.

Exercice 44

On considère l'équation (E) : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$
où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1) a) Montrer que (E) admet une solution réelle évidente, note z_1.
   b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait : $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b)$
2) Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2 + 2i$ et $1 - i$.

1) Représenter A, B et C.
2) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifter.
4) On donne le point D d'affixe 2. Quelle est la nature de OCDB ?

Exercice 45

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

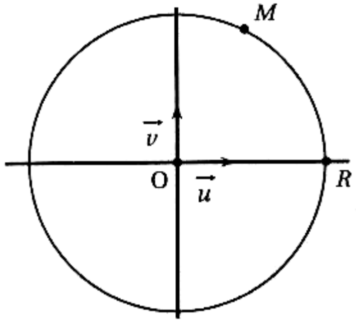
1) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :
   a) 3 **b)** i **c)** $3 + i$
2) Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :
   a) $|z| + 1$ **b)** $|z - 1|$ **c)** $|i\bar{z} + 1|$
3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :
   a) $-\dfrac{\pi}{3} + \theta$ **b)** $\dfrac{2\pi}{3} + \theta$ **c)** $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$
4) Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
   a) $n = 3$ **b)** $n = 6k + 3,\ k \in \mathbb{N}$ **c)** $n = 6k,\ k \in \mathbb{N}$
5) Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1. l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :
   a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre [AB] **c)** la droite perpendiculaire à (AB) passant par O
6) Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :
   a) $y = -x + 1$ **b)** $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ **c)** $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel
7) Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est :
   a) $1 - 4i$ **b)** $-3i$ **c)** $7 + 4i$
8) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1} = z$ est :
   a) $\{1 - i\}$ **b)** L'ensemble vide **c)** $\{1 - i\ ;\ 1 + i\}$

Annales du baccalauréat

Exercice 46 *Antilles-Guyane - 22 juin 2015*

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $\left[O\,;\, \vec{u}\right)$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z+|z|}{2}\right)$.

   Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif?
3. On suppose désormais que z_0n'est pas un nombre réel.
   a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
   b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

Exercice 47 *Métropole La réunion - 22 juin 2015*

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.
   a. Calculer le module et un argument du nombre a.
   b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   a. Montrer que $b' = 8$.
   b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.
   a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
   Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.
   b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST? Justifier ce résultat.

Exercice 48 *Asie - 16 juin 2015*

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O,\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :

a. $j^3 = 1$;

b. $j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 49 — *Polynésie - 12 juin 2015*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

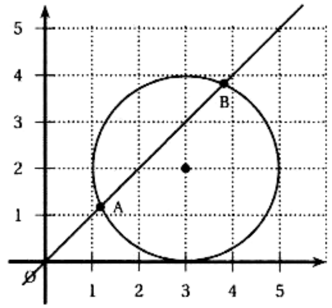
1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 50 — *Polynésie - 12 juin 2015*

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z - 1| = |z - i| \quad \text{et} \quad |z - 3 - 2i| \leqslant 2.$$



Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées (3 ; 2) et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.

Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].

2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^{1515}$ est un réel.

Exercice 51 — *Amérique du Nord - 2 juin 2015*

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n.

a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$.

d. Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
Représenter θ
Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

Exercice 52 *Nouvelle-Calédonie - 5 mars 2015*

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies, pour tout entier naturel n, par

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \sqrt{3}u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + \sqrt{3}v_n \end{array}\right. .$$

On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = u_n + \mathrm{i}v_n$.

On note a le nombre complexe $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = az_n$.

b. Écrire a sous forme exponentielle.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_n & = & 2^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \\ v_n & = & 2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) \end{array}\right.$$

Exercice 53 *Nouvelle-Calédonie - 17 novembre 2014*

Dans les questions **1.** et **2.**, le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1. **Affirmation 1 :**
   Le point d'affixe $(-1+\mathrm{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
2. **Affirmation 2 :**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \overline{z} + 2 - 4\mathrm{i} = 0$ admet une solution unique.

Exercice 54 *Antilles-Guyane - 11 septembre 2014*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie
   $$|f(z) - 8| = 3.$$
   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$
   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Exercice 55 *Métropole - 19 Juin 2014*

On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
   Calculer a^2 sous forme algébrique.
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. **Restitution organisée de connaissances**
On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in R$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x - iy$.
Démontrer que :
— Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
— Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Exercice 56 *Centres étrangers - 12 Juin 2014*

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 & = 16 \\ z_{n+1} & = \dfrac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. a) Calculer z_1, z_2 et z_3.
b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**.
c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
La suite (r_n) est-elle convergente ?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.
On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.
Ainsi $L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Exercice 57 *Liban - 27 Mai 2014*

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 58 *Pondichéry - 8 Avril 2014*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$.
2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   c. Que dire de la longueur $\text{O}A_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n+1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

   a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

   b. Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4. **a.** Démontrer que le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

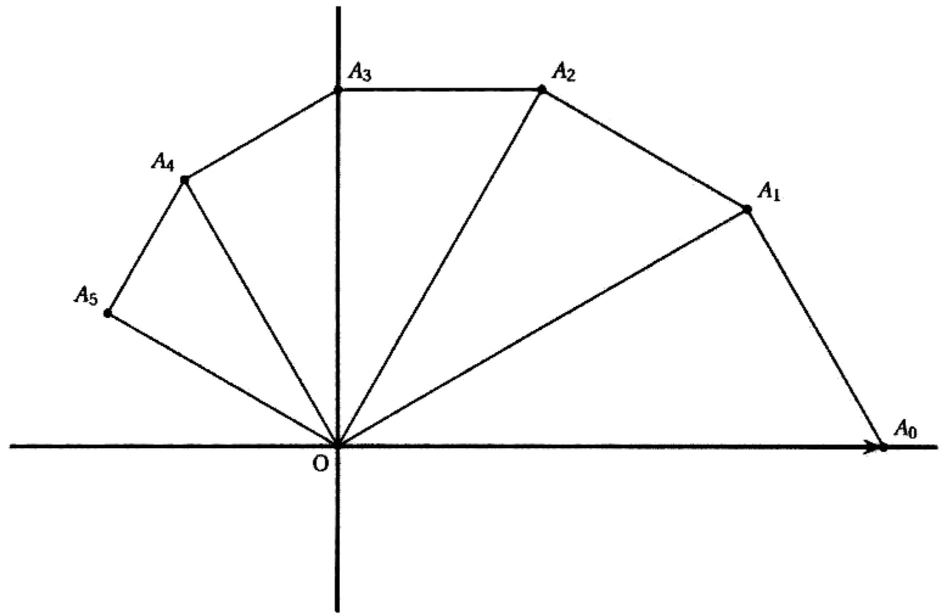
   b. On admet que $z_n = r_n\text{e}^{\text{i}\frac{n\pi}{6}}$.

   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

   c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.

   Les traits de construction seront apparents.

À compléter et à rendre avec la copie



Exercice 59 *Polynésie – 5 Septembre 2017*

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$.

1. Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z; les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M.
Montrer que le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}, \text{ avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right[\text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathcal{D}$ le plus proche de l'origine O du repère.

Exercice 60 *Métropole – 12 Septembre 2017*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M' est appelé image du point M.

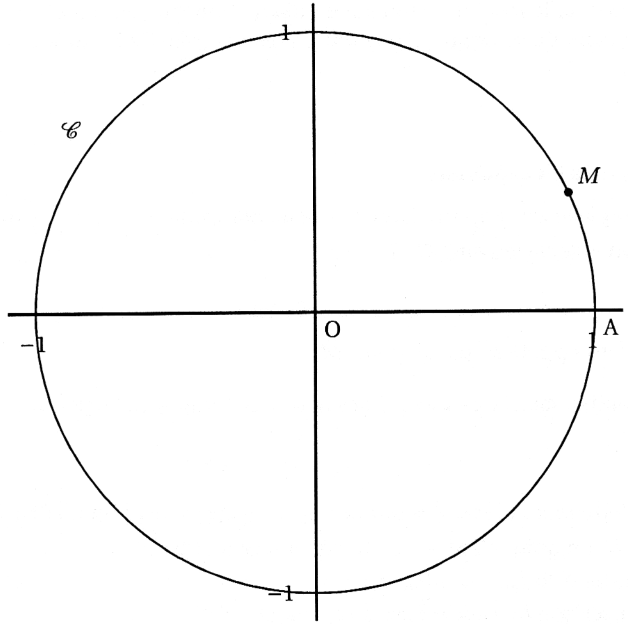
1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

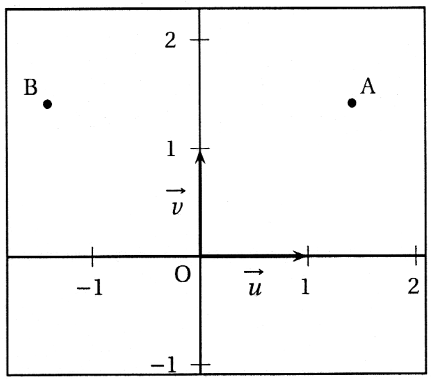
2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   a. Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.
   b. Sur la figure donnée en annexe page 7, on a représenté un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
   Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).
   c. Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?



Exercice 61 *Amérique du Sud– 21 Novembre 2017*

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_\text{B} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$



1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2. On considère l'équation

$$(E) : z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

Exercice 62 *Nouvelle Calédonie– 28 Novembre 2017*

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   b. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.
2. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

Exercice 63 *Nouvelle Calédonie– Mars 2019*

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.
Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

$$z\left(z^2 - 8z + 32\right) = 0.$$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient

$$|z-3| = |z+3|.$$

Affirmation 2 : L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n O et M_{n+3} sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{\pi}{4}$ et π.

Exercice 64 *Nouvelle Calédonie– Novembre 2018*

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - \mathrm{i}$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i}).$$

3. a. Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.
   b. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - \mathrm{i}| = 0.$$

   c. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?
4. a. Soit n un entier naturel. déterminer un argument de u_n.
   b. Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.
   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation réduite :

$$y = -x + 1.$$