Convexité et inflexion

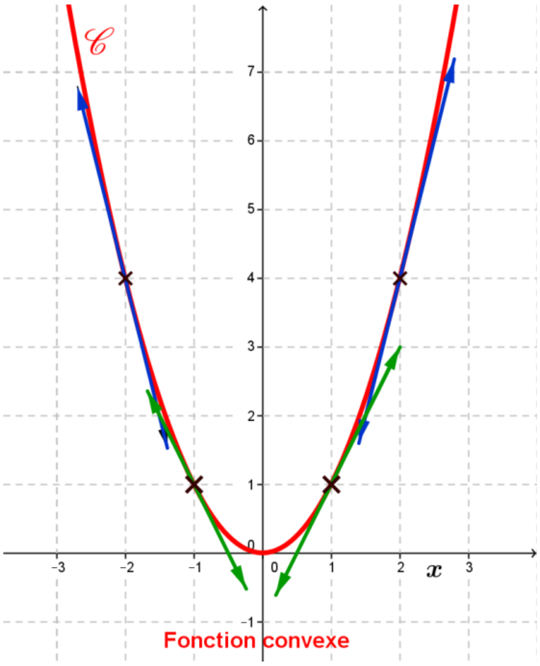
I) Convexité

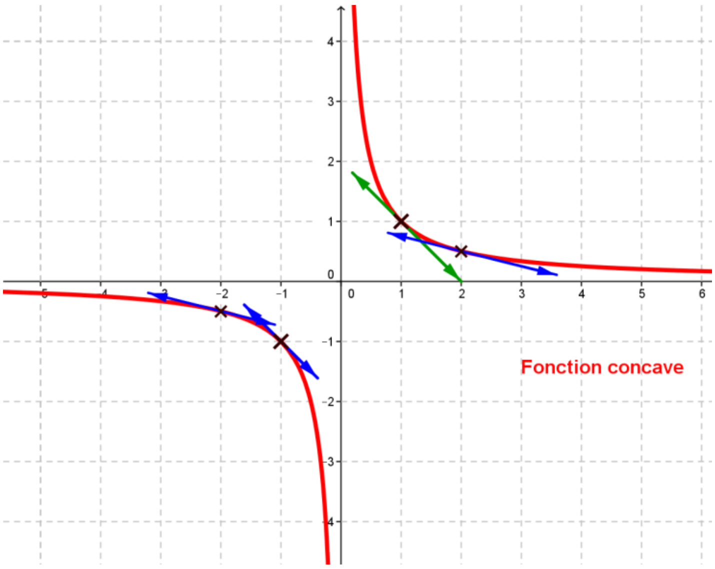
1) Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, représentée par sa courbe $\mathcal{C}$:

• La fonction f est convexe sur I si sa courbe $\mathcal{C}$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

• La fonction f est concave sur I si sa courbe $\mathcal{C}$ est située entièrement en-dessous de chacune de ses tangentes.





2) Propriété (admise)

• Une fonction f est convexe sur un intervalle I, si et seulement si, la dérivée f' est croissante sur I

• La fonction f est concave sur un intervalle I, si et seulement si la dérivée f' est décroissante sur I

Conséquences :

On note f'' la dérivée seconde de f (on dérive f puis on dérive f')

• Une fonction f est convexe sur un intervalle I, si et seulement si, la dérivée seconde f'' est positive sur I (en effet cela implique que f' est croissante sur I, sa dérivée étant positive sur cet intervalle)

• La fonction f est concave sur un intervalle I, si et seulement si la dérivée seconde f'' est négative sur I (en effet cela implique que f' est décroissante sur I, sa dérivée étant négative sur cet intervalle)

Exemples :

Exemple 1 : Soit f la fonction exponentielle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$ qui est aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = e^x$

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f'' est positive sur $\mathbb{R}$,
la fonction f est donc une fonction convexe sur $\mathbb{R}$

Exemple 2 : Soit f la fonction logarithme népérien définie et dérivable sur]0 ;+∞[

$f(x) = ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ Elle est aussi définie et dérivable sur]0 ;+∞[et $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

$\frac{-1}{x^2} < 0$ sur]0 ;+∞[donc f'' est négative sur]0 ;+∞[,
la fonction f est donc une fonction concave sur cet intervalle

Exemple 3 :Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f(x) = -2x^3 + 6x^2$

$f'(x) = -6x^2 + 12x$ Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = -12x + 12$

Résolvons l'équation : $-12x + 12 = 0$

$-12x = -12$ donc $x = \frac{-12}{-12} = 1$

De plus $-12x + 12 \geq 0$ pour $-12x \geq -12$ c'est-à-dire pour $x \leq 1$

Et $-12x + 120 \leq 0$ pour $-12x \leq -12$ c'est-à-dire pour $x \geq 1$

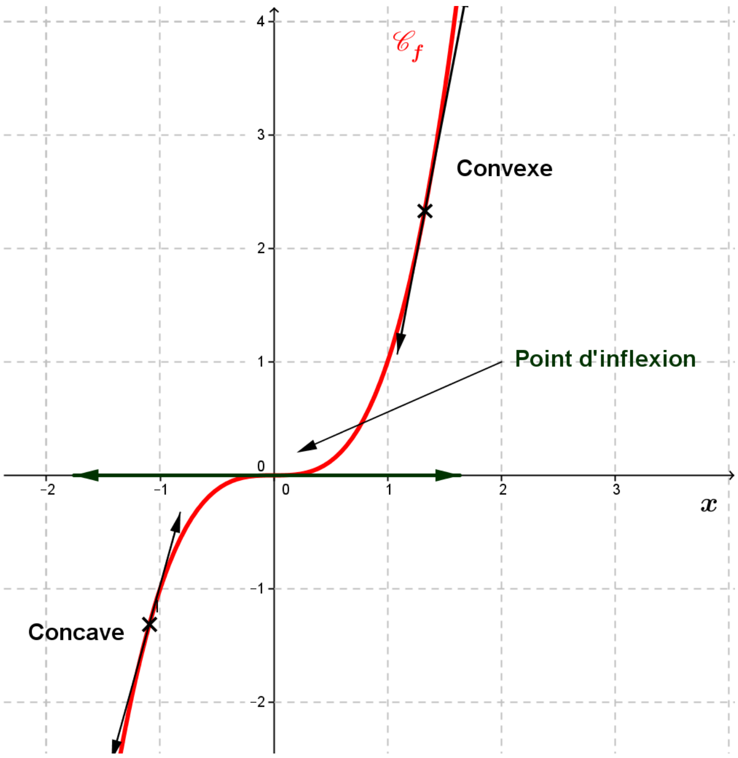
En conclusion $f''(x) \geq 0$ pour $x \leq 1$ et $f''(x) \leq 0$ pour $x \geq 1$

f est donc convexe sur $]-\infty; 1]$ et concave sur $[1 ; +\infty[$

II) Point d'inflexion

1) Définition

Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente



2) Lien avec la convexité

Dire que la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente en un point cela signifie que la fonction change de convexité en ce point.
Cela se traduit par un changement de signe de la dérivée seconde en ce point.

Exemples

Exemple 1 :

Nous avons tracé ci-dessus la représentation graphique de la fonction : $x \mapsto x^3$

Graphiquement nous voyons que sa courbe admet comme point d'inflexion l'origine du repère, nous allons le prouver par le calcul :

$f(x) = x^3$ La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ sa dérivée est $f'(x) = 3x^2$ qui est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est $\boldsymbol{f''(x) = 6x}$

$f''(x) > 0$ pour $x > 0$ donc f est convexe sur $[0 \; ; +\infty[$

$f''(x) < 0$ pour $x < 0$ donc f est concave sur $]-\infty \; ; 0]$

Elle change de convexité en 0, la courbe admet donc un point d'inflexion qui est l'origine du repère

Exemple 2 : Reprenons l'exemple 3 du paragraphe I)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $f(x) = -2x^3 + 6x^2$

Nous avons vu que : $f''(x) \geq 0$ pour $x \leq 1$ et $f''(x) \leq 0$ pour $x \geq 1$

$f''(x) = 0$ pour $x = 1$

f est donc convexe sur $]-\infty; 1]$ et concave sur $[1\,; +\infty[$ $f(1) = -2 + 6 = 4$

et sa courbe représentative admet un point d'inflexion en $A(1; 4)$

Sa courbe représentative est :