Tangente à une courbe. Dérivées.
Etude du sens de variation d'une fonction

On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I si elle est définie sur I et admet en chaque point de I un nombre dérivé.

I) Rappels

1) Tangente à une courbe en un point.

Soit f une fonction dérivable en a,, ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative et A le point de ($\mathcal{C}$) d'abscisse a.

La tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point A (a ; $f(a)$) est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

2) Equation de la tangente.

Soit f une fonction dérivable en *a*, (C) sa courbe représentative et A le point de (C) d'abscisse *a*.

La tangente à la courbe (C) au point A a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

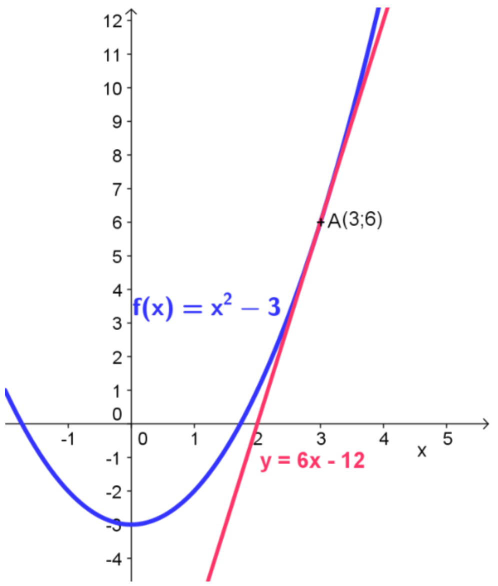
Remarque : La tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point A est la droite qui « approche » le mieux la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage du point A.

Exemples

Exemple 1 : Donner une équation de la tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ au point d'abscisse 3

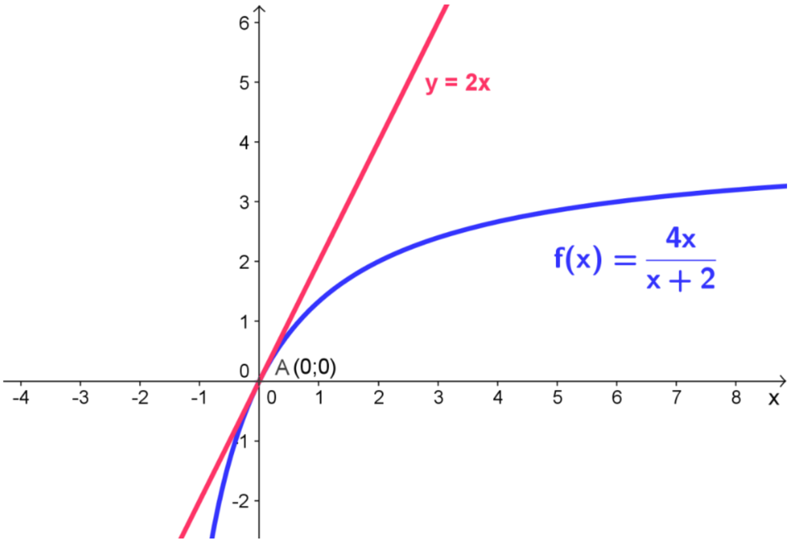
On a vu précédemment que $f'(3) = 6$ de plus $f(3) = 6$ donc une équation de cette tangente est :

$y = 6(x - 3) + 6$ soit $y = 6x - 12$



Exemple 2 : Donner une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ au point d'abscisse 0.

On a vu précédemment que $f'(0) = 2$ de plus $f(0) = 0$ donc une équation de cette tangente est : $y = 2x$



3) Fonction dérivée.

Une fonction f est dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) D si, et seulement si elle est dérivable pour tout réel $a \in$ D

Si f est dérivable sur D, on appelle fonction dérivée de f sur D la fonction notée f' définie sur D par : $a \to f'(a)$

Exemple:

Si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors pour tout $a \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{-(x-a)}{xa}}{x-a} = -\frac{1}{xa} \text{ pour } x \neq 0$$

Donc pour tout $a \neq 0$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\frac{1}{a^2}$$

f est dérivable sur]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[et sa fonction dérivée est $f' : a \mapsto -\frac{1}{a^2}$

II) Dérivées usuelles

Fonction f :	***Dérivable sur*** :	***Fonction dérivée*** f' :
$f(x) = k\ (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n (n \in N)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -sin(x)$

III) Dérivées et opérations.

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur l'ensemble D (D étant un intervalle ou une réunion d'intervalles) et λ est un nombre réel on a :

Fonction	***Dérivable sur***	***Dérivée***
$u + v$	**D**	$u' + v'$
λu	**D**	$\lambda u'$
uv	**D**	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	**D** $\cap \{x \ / \ v(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	**D** $\cap \{x \ / \ v(x) \neq 0\}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

• **Exemple 1 :** Calculer la dérivée de la fonction f

$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+5x+2}{2x-3}}$ Pour $\boldsymbol{x \neq \frac{3}{2}}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{u}{v}}$

$\boldsymbol{u(x) = x^2 + 5x + 2}$ donc $\boldsymbol{u'(x) = 2x + 5}$

$\boldsymbol{v(x) = 2x - 3}$ donc $\boldsymbol{v'(x) = 2}$

Pour tout $x \neq \frac{3}{2}$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+5)(2x-3)-2(x^2+5x+2)}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2-6x+10x-15-2x^2-10x-4}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$$

Donc f' est la fonction définie sur $]-\infty\,;\frac{3}{2}[\,\cup\,]\frac{3}{2}\,;+\infty[$ par : $f'(x) = \frac{2x^2-6x-19}{(2x-3)^2}$

• **Exemple 2 :** Calculer la dérivée de la fonction g:

$g(x) = (2x + 5)(6x - 2)$ Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$\boldsymbol{g(x) = u\,v}$ avec :

$\boldsymbol{u(x) = 2x + 5}$ donc $\boldsymbol{u'(x) = 2}$

$\boldsymbol{v(x) = 6x - 2}$ donc $\boldsymbol{v'(x) = 6}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = u'v + uv' = 2(6x - 2) + 6(2x + 5) = 12x - 4 + 12x + 30 = 24x + 26$$

Donc g' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g'(x) = 24x + 26$

IV) Lien entre le sens de variations et dérivées

1) Propriété:

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

• Si la dérivée est strictement positive sur l'intervalle I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

• Si la dérivée est strictement négative sur l'intervalle I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

• Si la dérivée est nulle en toute valeur de l'intervalle I, alors la fonction f est constante sur I.

Remarque : Si la dérivée s'annule en une seule valeur sur un intervalle, mais garde un signe constant, la fonction reste strictement monotone sur cet intervalle.
C'est le cas de la fonction $f(x) = x^3$
Sa fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et comme un carré est toujours positif alors $f'(x) \geq 0$,
Cette fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exemples :

Exemple1 :

Soit $f(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ /$\left\{\frac{4}{5}\right\}$ par : $f(x) = \frac{3x}{5x-4}$

Déterminons son sens de variation

● Tout d'abord, calculons la fonction dérivée f' de la fonction f.

Pour $\boldsymbol{x \neq \frac{4}{5}}$ $\quad \boldsymbol{f(x) = \frac{u}{v}}$

$\boldsymbol{u(x) = 3x}$ donc $\boldsymbol{u'(x) = 3}$

$\boldsymbol{v(x) = 5x - 4}$ donc $\boldsymbol{v'(x) = 5}$

Pour tout $x \neq \frac{4}{5}$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv\prime}{v^2} = \frac{3(5x-4) - 15x}{(5x-4)^2} = \frac{-12}{(5x-4)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-12}{(5x-4)^2}}$$

● Déterminons ensuite le signe de la fonction dérivée f' :

Pour tout $x \neq \frac{4}{5}$:

$-12 < 0$ et $(5x-4)^2 \geq 0$ donc $\frac{-12}{(5x-4)^2}$ >0 donc :

Pour tout $x \neq \frac{4}{5}$: $f'(x) < 0$

● Conclusion : La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ /$\left\{\frac{4}{5}\right\}$

Exemple2 :

Soit $f(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 12x - 1$. Déterminons son sens de variation.

● Tout d'abord, calculons la fonction dérivée f' de la fonction f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -3x^2 + 12$

● Déterminons ensuite le signe de la fonction dérivée f' :

$-3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x-2)(x+2)$

Faisons un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-3(x-2)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $f'(x) \leq 0$ sur]-∞ ; -2] ∪ [2 ; +∞[et $f'(x) \geq 0$ sur [-2 ; 2]

• Conclusion :

La fonction f est décroissante sur]-∞ ; -2] ∪ [2 ; +∞[et croissante sur [-2 ; 2]