Annales 2011-2016 : espace

Exercice 1 correction Antilles 2011

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\ ;\ -4\ ;\ 1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$.
On considère la droite D′ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1-t \\ y &=& 2+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z &=& 1-t \end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D′. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D′, distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H′ le point d'intersection des droites D′ et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D′ sont sécants en H′. Une figure est donnée en **annexe** .

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ 3)$.

(a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.

(b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+2y+3z-4=0$.

3. (a) Démontrer que le point H′ a pour coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

(b) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. (a) Déterminer les coordonnées du point H.

(b) Calculer la longueur HH′.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

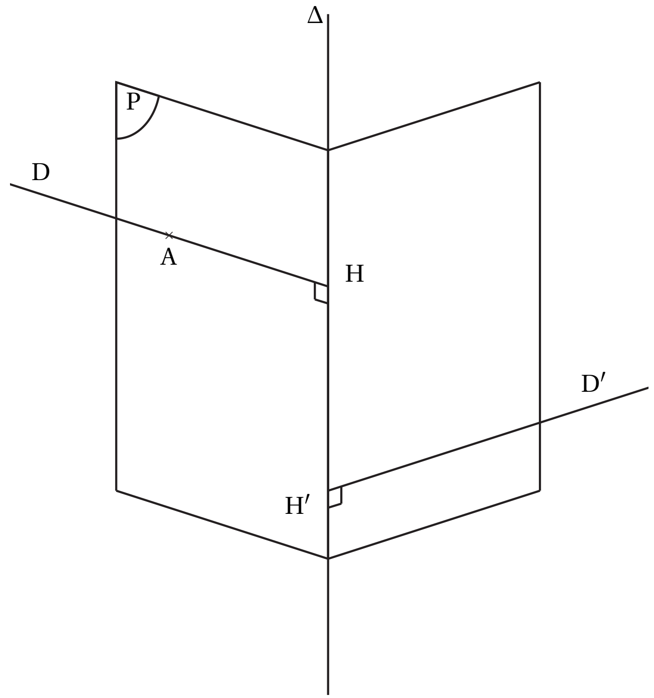
L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M′ appartenant à D′, $MM' \geqslant HH'$.

(a) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

(b) En déduire que $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 \geqslant \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2$ et conclure.

La longueur HH′ réalise donc le minimum des distances entre une point de D et une point de D′. On l'appelle distance entre les droites D et D′.

Annexe



EXERCICE 2 correction Antilles septembre 2011

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
A $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, B $(1\ ;\ -6\ ;\ -1)$ et C $(2\ ;2\ ;2)$.

1. (a) Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

(b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x-y+z-4=0$.

(a) Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

(b) Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr}x&=&1+t\\y&=&-3+2t\\z&=&t,\end{array}\right.\qquad t\in\mathbb{R}.$$

(a) Montrer que le point I appartient à la droite D.

(b) Montrer que le point I appartient à la sphère S.

(c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

EXERCICE 3 correction **Asie 2011**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère $\left(D\ ;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.

Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

$A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ B(1\ ;\ 1\ ;\ 0)\ C(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ D(0\ ;0\ ;\ 0)\ E(1\ ;0\ ;\ 1)\ F(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\ C(0\ ;\ 1\ ;\ 1)\ H(0\ ;0\ ;\ 1)$

(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

(c) En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

(d) Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(e) Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

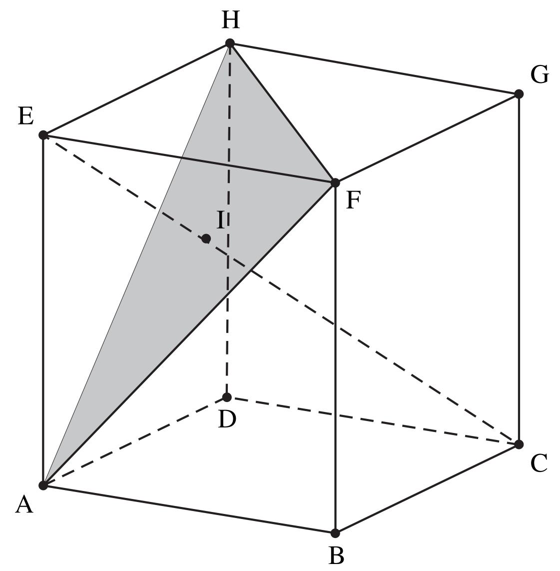
Que représente le point I pour le triangle AFH ?

2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Définitions :

- un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

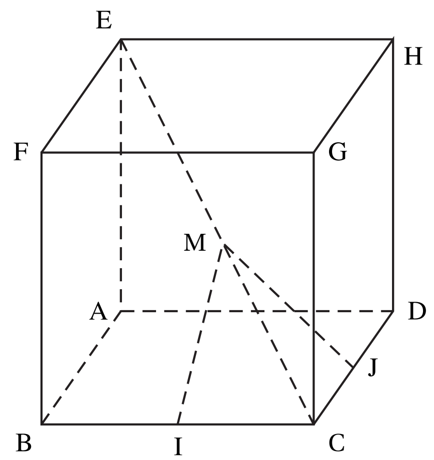
Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



Exercice 4 correction Centres Étrangers 2011

Commun à tous les candidats

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. (a) Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

(b) Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], tel que les coordonnées du point M soient $(1-t~;~1-t~;~t)$.

2. (a) Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].

(b) En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

(c) Exprimer IM^2 en fonction de t.

3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.
On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$.

(a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0~;~\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

(b) En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

(c) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

(d) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.

(e) Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

Exercice 5 correction **Polynésie septembre 2011**

Partie A

On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace, $\text{EF}^2 = \overrightarrow{\text{EF}}^2 = \overrightarrow{\text{EF}} \cdot \overrightarrow{\text{EF}}$.
Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a :

$$\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = 2\text{MI}^2 + \frac{1}{2}\text{AB}^2.$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que

$$\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = \text{AB}^2.$$

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives : $3x + 4y + z - 1 = 0$ et $x - 2y - z + 5 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1\ ;\ 0\ ;\ 4)$ et $(3\ ;\ -4\ ;\ 2)$.

1. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.

On nomme (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

(a) Montrer que le point A appartient à la droite (Δ).

(b) Montrer que $\vec{u}\,(1\ ;\ -2\ ;\ 5)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

(c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ).

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = \text{AB}^2$.

Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite (Δ). On précisera les coordonnées de ces points.

Exercice 6 correction Antilles septembre 2012

Commun à tous les candidats

$\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.
On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -t\\ z &=& 2t\end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par l'équation $x+y+2z-1=0$.
Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $B(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$ et de rayon 1.
Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix.
Il est attribué pour chaque question $0,5$ point si la réponse est exacte et $0,5$ point si la justification est correcte.

1. La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont :

(a) parallèles ;

(b) perpendiculaires ;

(c) non parallèles et non perpendiculaires.

2. Soit $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}'$ admet pour équation cartésienne :

(a) $-2y+z+2=0$;

(b) $2x-z=0$;

(c) $x-y-z=0$.

3. La droite Δ, intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan d'équation $2x-z=0$, admet pour représentation paramétrique :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -3t+1\\ z &=& 2t\end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$;

(b) $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -t\\ z &=& 2t\end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$;

(c) $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -5t+1\\ z &=& 2t\end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$.

4. L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :

(a) un point ;

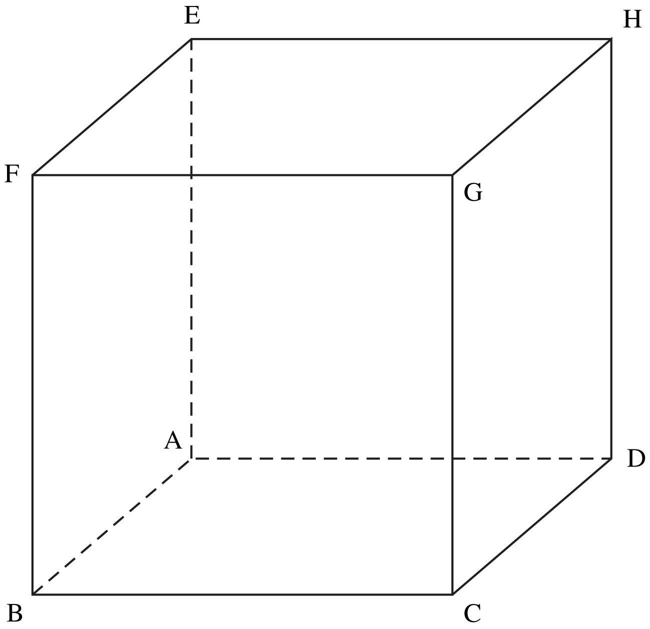
(b) l'ensemble vide ;

(c) un cercle.

Exercice 7 correction Centres Étrangers 2012

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère les points $I\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $J\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $L\,(a\,;\,1\,;\,0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. \quad ,\ t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

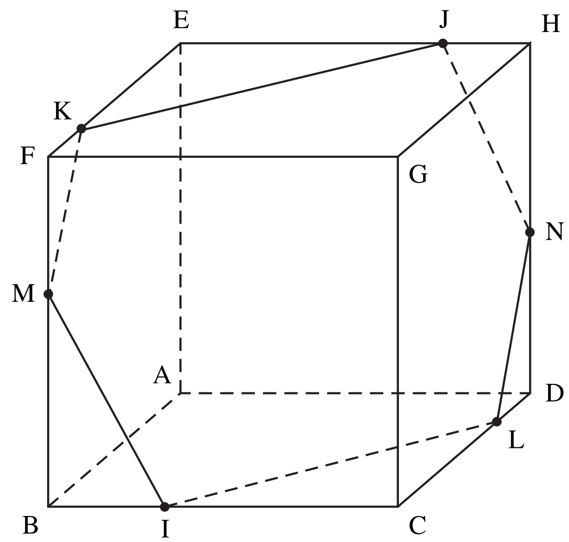
Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

(a) Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(8\,;\,9\,;\,5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

(b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.

(c) En déduire les coordonnées des points M et N

Exercice 8 correction **Pondichéry 2012**

Commun à tous les candidats

Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère :

- les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations :

$$\mathcal{P} : x-y-z-2=0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : x+y+3z=0.$$

- la droite $\mathcal{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3-2t \\ y &=& 2t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Proposition 2
La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathcal{P}$.
Proposition 3
L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1-t' \\ y &=& -1-2t' \\ z &=& t' \end{array}\right. \qquad t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4
Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont coplanaires.

EXERCICE 9 correction **Amerique du Nord 2013**

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C $(2\ ;\ -1\ ;\ -2)$ et D $(7\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$.

(a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

(d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

(a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

(b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.$$

(c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 10 correction Amerique du Sud 2013

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).

3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $K\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.

5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.

EXERCICE 11 correction **Antilles septembre 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et soit P un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.
Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\,;\,-1\,;\,1),\quad B(4\,;\,-3\,;\,0) \text{ et } C(-1\,;\,-2\,;\,-1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 3t-1\\ z &=& -2t+8\end{array}\right.$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

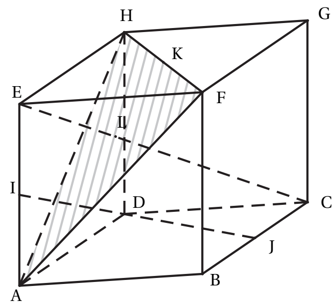
1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5=0$.
4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(11\,;\,-1\,;\,4)$.

Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5=0$.

EXERCICE 12 correction **Antilles 2013**

Commun à tous les candidats

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:
ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
On appelle $\mathcal{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment [AE],
le point J est le milieu du segment [BC],
le point K est le milieu du segment [HF],
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathcal{P}$.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. (a) Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.

(b) Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.

(c) Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.

(d) Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

2. (a) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 0.

(b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à (-1).

(c) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 1.

(d) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.

3. Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:

(a) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$.

(b) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.

(c) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.

(d) Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.

4. (a) $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

(b) $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

(c) $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

(d) $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

5. (a) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.

(b) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.

(c) $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.

(d) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

EXERCICE 13 correction **Centres Étrangers 2013**

Commun à tous les candidats

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points A $(12\ ;\ 0\ ;\ 0)$, B $(0\ ;\ -15\ ;\ 0)$, C $(0\ ;\ 0\ ;\ 20)$, D $(2\ ;\ 7\ ;\ -6)$, E $(7\ ;\ 3\ ;\ -3)$;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x+y-2z-5=0$

Affirmation 1
Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x+y+2z-24=0$$

Affirmation 2
Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9-3t \\ y & = & 0 \\ z & = & 5+5t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3
La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4
La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

EXERCICE 14 correction Liban 2013

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A $(1\,;\,-1\,;\,2)$, B $(3\,;\,3\,;\,8)$, C $(-3\,;\,5\,;\,4)$ et D$(1\,;\,2\,;\,3)$.
On note $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+1\\ y &=& 2t-1\\ z &=& 3t+2\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

et $\mathcal{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& k+1\\ y &=& k+3\\ z &=& -k+4\end{array}\right., k \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :
Proposition **a.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
Proposition **b.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.
Proposition **c.** Le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.
Proposition **d.** Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales.

Question 2 :
Proposition **a.** Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}'$.
Proposition **b.** Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
Proposition **c.** Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.
Proposition **d.** Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Question 3 :
Proposition **a.** Les points A, D et C sont alignés.
Proposition **b.** Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition **c.** Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition **d.** Le point D est le milieu du segment [AB].

Question 4 :
On note $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :
Proposition **a.** $\vec{n}\,(-1\,;\,5\,;\,4)$
Proposition **b.** $\vec{n}\,(3\,;\,-1\,;\,2)$
Proposition **c.** $\vec{n}\,(1\,;\,2\,;\,3)$
Proposition **d.** $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$

EXERCICE 15 correction **Métropole 2013**

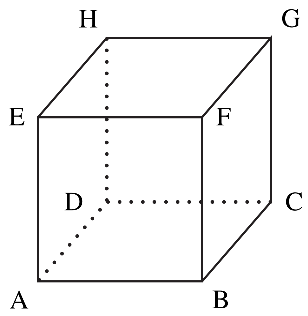
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Proposition 1 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ est une droite.

2. Proposition 2 : Le nombre complexe $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

3. Soit ABCDEFGH un cube.



Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+y+3z+4=0$. On note S le point de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ -2)$.

Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1+3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 16 correction **Pondichéry 2013**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2+t+2t' \\ y & = & -t-2t' \\ z & = & -1-t+3t' \end{array}\right.$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2+t \\ y & = & -t \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$

On donne les points de l'espace $\mathrm{M}(-1\,;\,2\,;\,3)$ et $\mathrm{N}(1\,;\,-2\,;\,9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+2t' \\ y & = & 1-t+t' \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+t' \\ y & = & 1-t-2t' \\ z & = & 1-t-3t' \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t+t' \\ y & = & 1-2t+2t' \\ z & = & -1-t' \end{array}\right.$

2. **(a)** La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $\mathrm{A}(-8\,;\,3\,;\,2)$.

(b) La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.

(c) La droite (D) est une droite du plan (P).

(d) La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

3. **(a)** La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.

(b) La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.

(c) La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.

(d) La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

4. **(a)** Les plans (P) et (S) sont parallèles.

(b) La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & -2-t \\ z & = & -3-t \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).

(c) Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).

(d) Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

EXERCICE 17 correction **Amerique du Nord 2014**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.

Construire le point L

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.

On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

(a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

(b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.

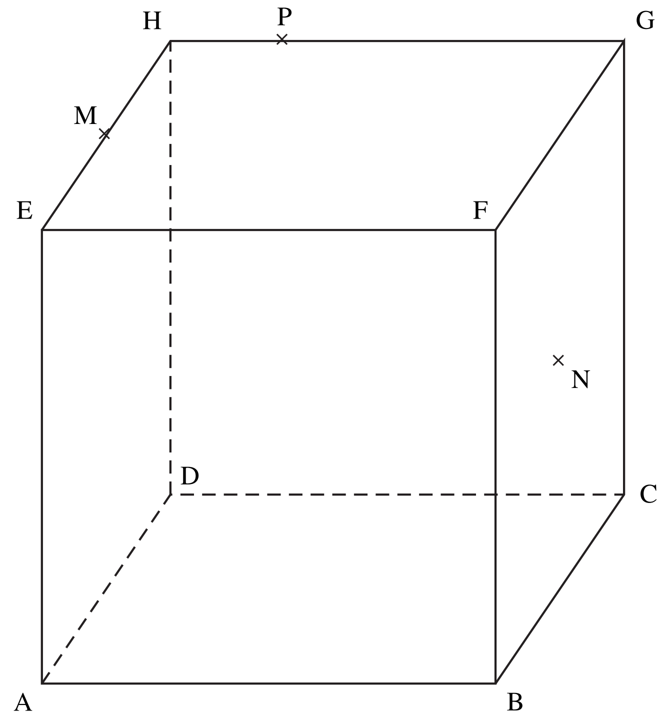
2. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.

Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

Annexe

À rendre avec la copie



Exercice 18 correction Amerique du Sud 2014

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'enlève pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A $(2\ ;\ 5\ ;\ -1)$, B$(3\ ;2\ ;1)$ et C $(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$. Le triangle ABC est :

(a) rectangle et non isocèle

(b) isocèle et non rectangle

(c) rectangle et isocèle

(d) équilatéral

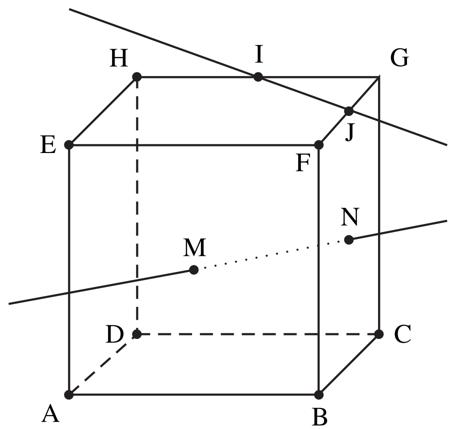
2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A $(2\ ;\ 5\ ;\ -1)$. Une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan P et passant par A est :

a. $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 2+2t\\ y &=& 5+t\\ z &=& -1+3t\end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 2+2t\\ y &=& -1+5t\\ z &=& 3-t\end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 6-2t\\ y &=& 3+t\\ z &=& 5-3t\end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+2t\\ y &=& 4-t\\ z &=& -2+3t\end{array}\right.$

3. Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :

a. l'ensemble vide **b.** la médiatrice du segment [AB] **c.** le cercle de diamètre [AB] **d.** la droite (AB)

4. La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.



Les droites (IJ) et (MN) sont :

(a) perpendiculaires

(b) sécantes, non perpendiculaires

(c) orthogonales

(d) parallèles

EXERCICE 19 correction **Antilles 2014**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 2 ; 5), B $(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$, C $(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$ et D $(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

1. **Proposition 1 :** Les points A, B et C définissent un plan.

2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.

Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x-2z+9=0$.

3. **Proposition 3 :** Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{2}t-5 \\ y & = & -3t+14 \\ z & = & -\frac{3}{2}t+2 \end{array}\right. \qquad t\in\mathbb{R}$$

4. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-y+5z+7=0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation cartésienne $-3x-y+z+5=0$.

Proposition 4 : Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

Exercice 20 correction Asie 2014

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A $(1\,;\,-1\,;\,-1)$, B$(1\,;1\,;1)$, C$(0\,;3\,;1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z+5=0$.

Question 1

Soit $\mathcal{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$ est :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& -1-t\\ z &=& 1-t\end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t\\ y &=& 1-t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5+4t\\ y &=& -3-2t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4-2t\\ y &=& -2+t\\ z &=& 3-4t\end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$

Question 2

Soit $\mathcal{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& -3-t\\ z &=& 2-2t\end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$.

a. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas sécants
b. La droite $\mathcal{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
c. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point E$\left(\frac{1}{3}\,;\,-\frac{7}{3}\,;\,\frac{10}{3}\right)$.
d. La droite $\mathcal{D}_2$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent au point F$\left(\frac{4}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\,;\,\frac{22}{3}\right)$.

Question 3

a. L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.
b. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.
c. Le plan $\mathcal{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.
d. Le plan $\mathcal{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4

Une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. 22,2 ° **b.** 0,4 ° **c.** 67,8 ° **d.** 1,2 °

Exercice 21 correction Centres Étrangers 2014

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$\text{A}(1\,;\,2\,;\,7),\quad \text{B}(2\,;\,0\,;\,2),\quad \text{C}(3\,;\,1\,;\,3),\quad \text{D}(3\,;\,-6\,;\,1) \text{ et } \text{E}(4\,;\,-8\,;\,-4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\vec{u}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

(a) Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$x-2y+z-4=0$.

(c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3. On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2t+3 \\ y &=& -4t+5 \\ z &=& 2t-1 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

(a) La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

(b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

EXERCICE 22 correction **Liban 2014**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$
et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5 + 3t \end{cases}$$
On donne les points $\mathrm{A}(1\ ;\ 1;\ 0)$, $\mathrm{B}(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $\mathrm{C}(7\ ;1\ ;\ -2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + t \end{cases}$

Proposition 2 :
Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :
Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :
La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ au point E de coordonnées $(8;\ -3;\ -4)$.

Proposition 5 :
Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Exercice 23 correction Métropole 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).

(a) Donner les coordonnées des points D et F.

(b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

(d) Calculer les coordonnées du point H.

(e) Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.

Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

(a) Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

(b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.

En déduire que $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

(d) Conclure.

EXERCICE 24 correction **Métropole septembre 2014**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A\left(1~;~-\sqrt{3}~;~0\right)~;~B\left(1~;~\sqrt{3}~;~0\right)~;~C(-2~;~0~;~0)~;~D\left(0~;~0~;~2\sqrt{2}\right).$$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x+z\sqrt{2}=4$.

2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & t\\ y & = & 0\\ z & = & t\sqrt{2}\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$$

(a) Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

(b) Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD).

3. **(a)** On note L le milieu du segment [AC].

Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

(b) Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

EXERCICE 25 correction **Nouvelle Calédonie 2014**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On donne les points $A(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $C(-5\ ;\ 5\ ;\ 0)$ et $D(11\ ;\ 1\ ;\ -2)$.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. **(a)** Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

(b) Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.

(c) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (3 ; 1 ; 4) est un vecteur normal au plan (IJK).
En déduire une équation cartésienne de ce plan.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.

(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).

(b) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (BD).

(c) Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?

Exercice 26 correction **Polynésie 2014**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5\ ;\ -5\ ;\ 2), B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0), C(0\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et } D(6\ ;\ 6\ ;\ -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

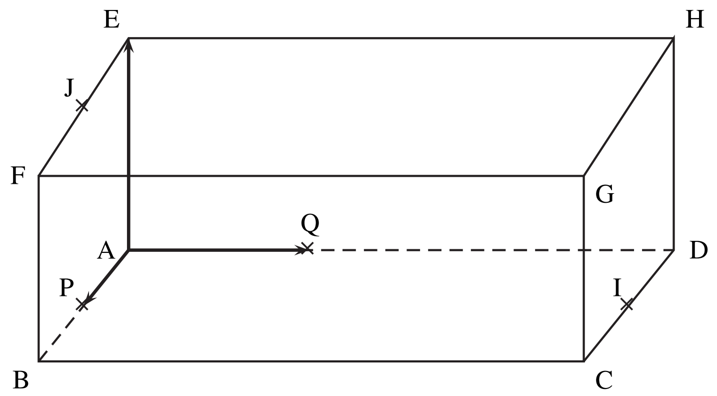
5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, *où* $\mathcal{B}$ *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur correspondante.*

6. On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

EXERCICE 27 correction Nouvelle Calédonie mars 2014

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].

4. **(a)** Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

(b) Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1\\ y &=& t\\ z &=& 3t-4\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

(c) Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.

(d) Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

Exercice 28 correction **Métropole septembre 2015**

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $B(-2\ ;\ 2\ ;\ -1)$.
- la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. (a) Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

(b) Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-2+u\ ;\ 1+u\ ;\ -1-u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et passe par le point M.

4. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\ ;\ 3-3u\ ;\ -1)$.

5. (a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.

(b) Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?

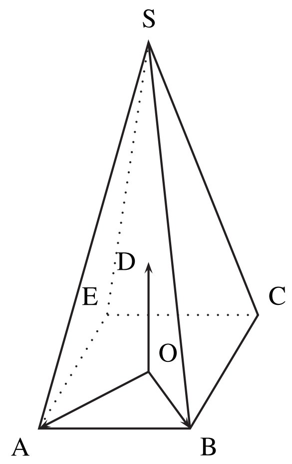
6. (a) Exprimer MN^2 en fonction de u.

(b) En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

Exercice 29 correction AmeriqueNordS2015-exo-1.tex

Commun à tous les candidats

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0\,;0\,;3)$ dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe, (à rendre avec la copie)**.

2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe, (à rendre avec la copie)**.

3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\,;\,-\frac{1}{6}\,;\,0\right)$.

Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$.

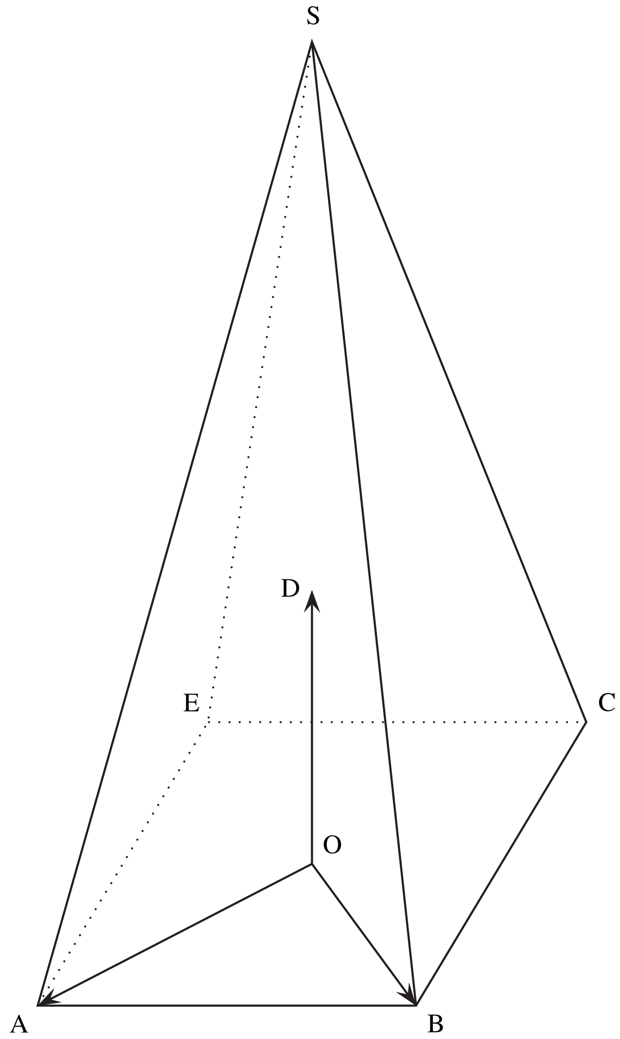
Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

Annexe


S
D
E
C
O
A
B

Exercice 30 correction Asie 2015

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x+y+z-5=0$ et $7x-2y+z-2=0$.

1. Affirmation 1 : les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. Affirmation 2 : les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & t \\ y & = & 2t+1 \\ z & = & -3t+4 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

3. Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.

On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.

Affirmation 3 : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle [0,658 ; 0,771].

4. On considère l'algorithme suivant :

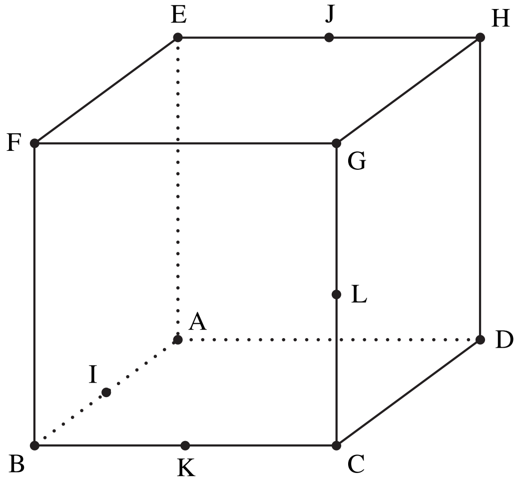
VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a<b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a~;~b]$

TRAITEMENT	Lire a et b
	Tant que $b-a>0,3$
	    x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	    Si $f(x)f(a)>0$, alors a prend la valeur x
	        sinon b prend la valeur x
	    Fin Si
	Fin Tant que
	Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Affirmation 4 : si l'on entre $a=1$, $b=2$ et $f(x)=x^2-3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.

EXERCICE 31 correction Liban 2015

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. **(a)** Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

EXERCICE 32 correction **Métropole 2015**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A $(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, B $(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, C $(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$, D $(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées :
$\mathrm{M}_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $\mathrm{N}_t(11\ ;\ 0,8t\ ;\ 1+0,6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

(b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.

(c) Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point E $(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

(d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

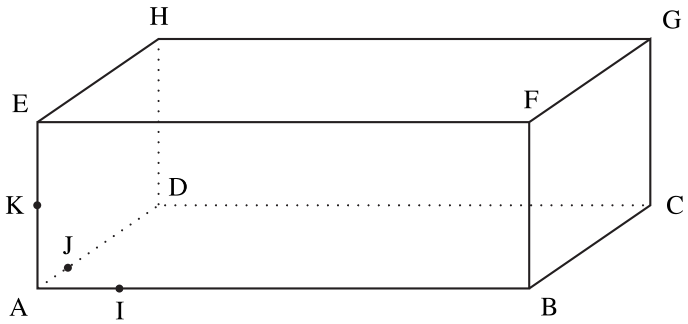
2. (a) Montrer que $\mathrm{M}_t\mathrm{N}_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

(b) À quel instant t la longueur $\mathrm{M}_t\mathrm{N}_t$ est-elle minimale ?

Exercice 33 correction Polynésie 2015

Commun à tous les candidats

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.
I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).

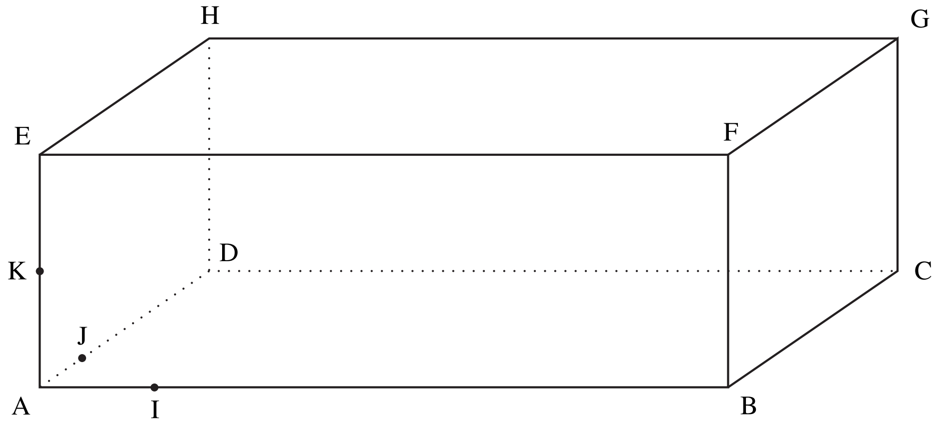
2. Déterminer une équation du plan (IJG).

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie**). On ne demande pas de justification.

Annexe

À rendre avec la copie

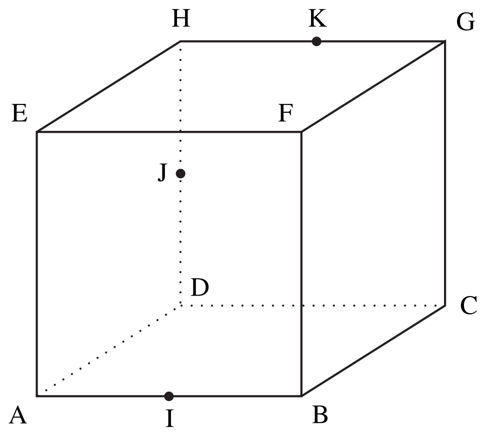


EXERCICE 34 correction **Polynésie septembre 2015**

Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].

On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

EXERCICE 35 correction **Pondichéry 2015**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $P\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

(a) Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

(b) À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

5. On considère le vecteur $\vec{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ normal au plan (MNP).

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

(b) On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

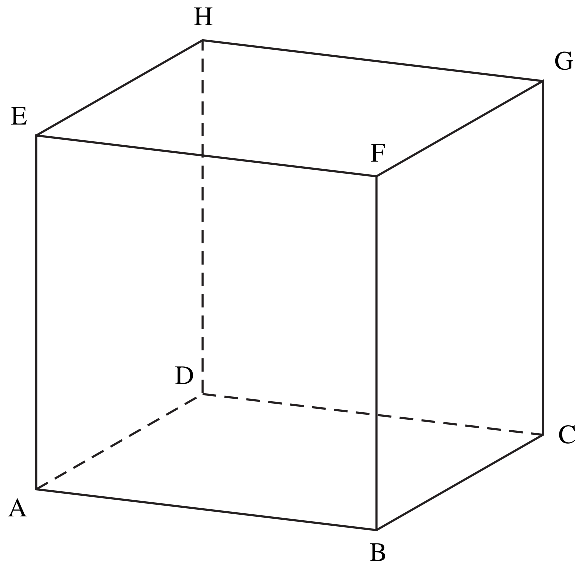
6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

(a) Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\,\frac{24}{35}\,;\,\frac{23}{35}\right)$.

(b) On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.

Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

ANNEXE à remettre avec la copie



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

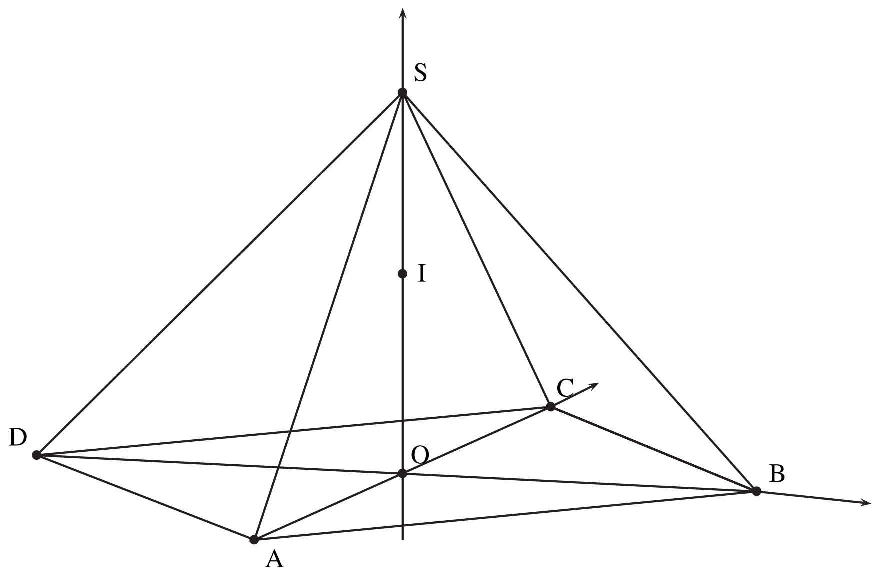
Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

Exercice 36 correction **Amerique du Nord 2016**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec $OB = 1$.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment [SO].

(a) Déterminer les coordonnées du point K.

(b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

(c) On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).

Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

(d) Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

(a) Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

(b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

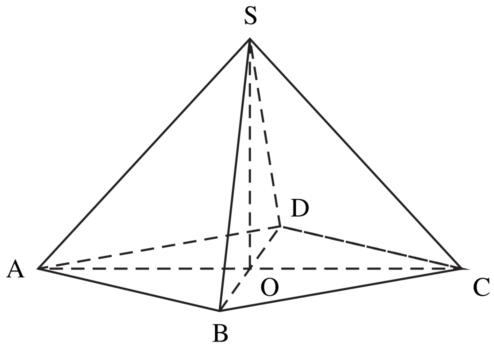
(c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

Exercice 37 correction AmeriqueSudS2016-exo-4.tex

Commun à tous les candidats

Partie A : un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm. On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Partie B : dans un repère

On considère le repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OS}\right)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].

(a) Justifier que $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,-3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

(a) Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).

(b) Calculer les coordonnées du point H.

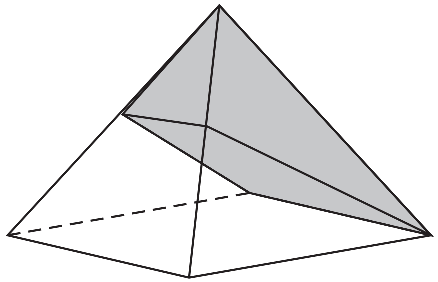
(c) Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$

Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Partie C : partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet.
C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

Exercice 38 correction Antilles 2016

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1.

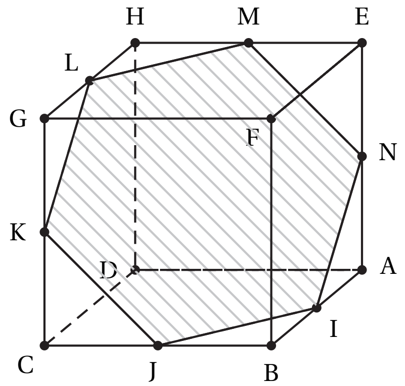
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :

$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$,

$H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

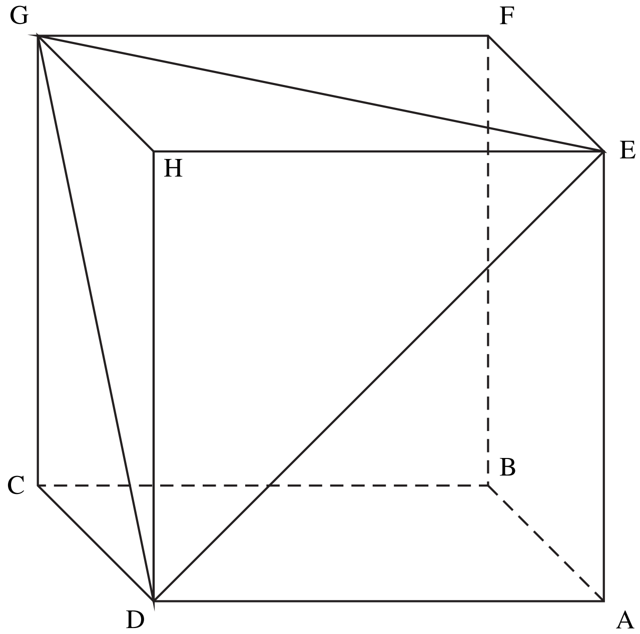
(b) En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre FBGE.

Exercice 39 correction **Antilles septembre 2016**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé $\left(B\,;\,\overrightarrow{BA},\,\overrightarrow{BC},\,\overrightarrow{BF}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).

2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).

4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.

5. Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.

EXERCICE 40 correction Asie 2016

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé.

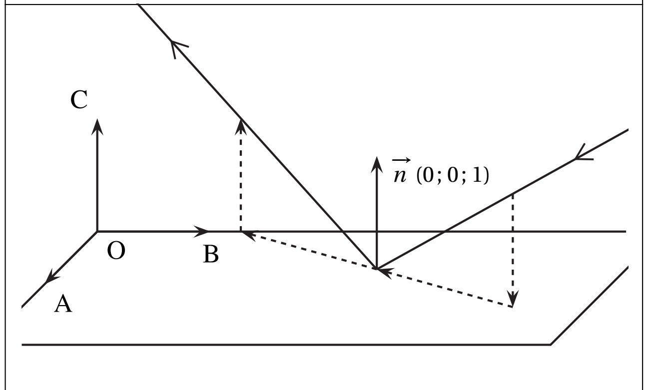
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(a\,;\,b\,;\,-c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(-a\,;\,b\,;\,c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(a\,;\,-b\,;\,c)$;

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1. *Propriété des catadioptres*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}\,(-2\,;\,-1\,;\,-1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $I_1\,(2\,;\,3\,;\,0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}\,(-2\,;\,-1\,;\,1)$ et passant par le point I_1.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan* (OBC)

(a) Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

(b) Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

(c) Soit I_2 le point de coordonnées $(0\,;\,2\,;\,1)$.

Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$ passant par le point $I_2\,(0\,;\,2\,;\,1)$.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC)

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,-2\,;\,0)$, et on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

(a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

(b) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

(c) Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

EXERCICE 41 correction Liban 2016

Commun à tous les candidats

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. (a) Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

(b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

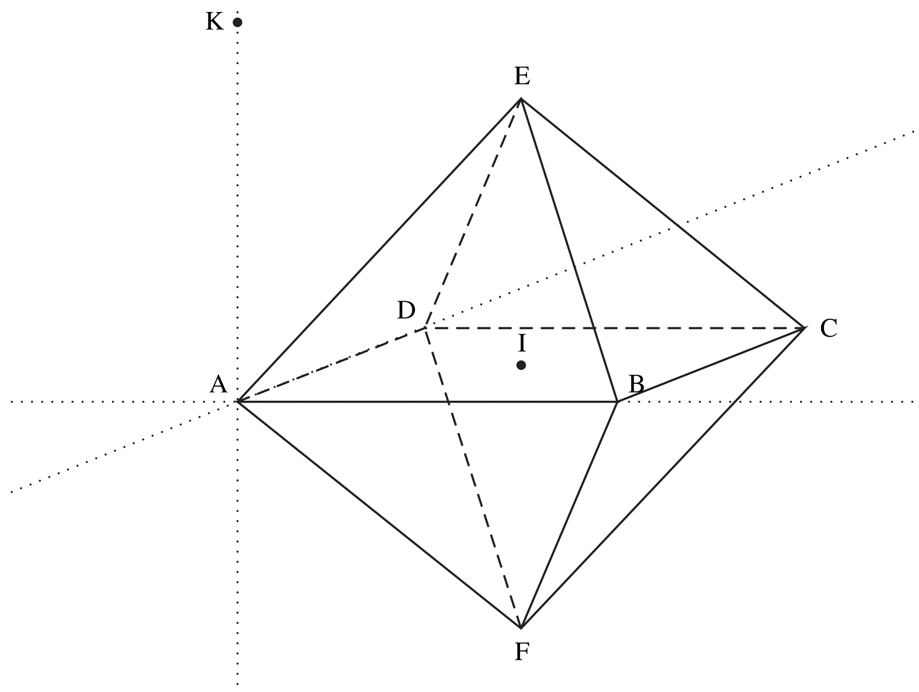
2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

(a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

(b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

(c) Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

Annexe



EXERCICE 42 correction **Métropole 2016**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

$$A(1\ ;\ 2\ ;\ 3), B(3\ ;\ 0\ ;\ 1), C(-1\ ;\ 0\ ;\ 1), D(2\ ;\ 1\ ;\ -1), E(-1\ ;\ -2\ ;\ 3) \text{ et } F(-2\ ;\ -3, 4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\overrightarrow{n}(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 43 correction Nouvelle Calédonie 2017

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).
On considère les points

$$A(-1\,;\,-1\,;\,0),\ B(6\,;\,-5\,;\,1),\ C(1\,;\,2\,;\,-2) \text{ et } S(13\,;\,37\,;\,54).$$

1. **(a)** Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

(b) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

(c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. **(a)** Déterminer la nature du triangle ABC.

(b) Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. **(a)** Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

(b) La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.

Déterminer les coordonnées du point H.

4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

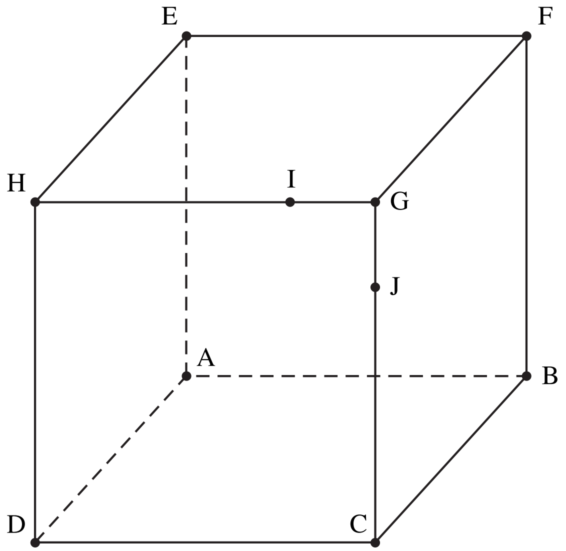
$$\frac{\textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}}{3}.$$

EXERCICE 44 correction Nouvelle Calédonie novembre 2016

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{\text{HI}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{HG}}$ et $\overrightarrow{\text{JG}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{CG}}$.



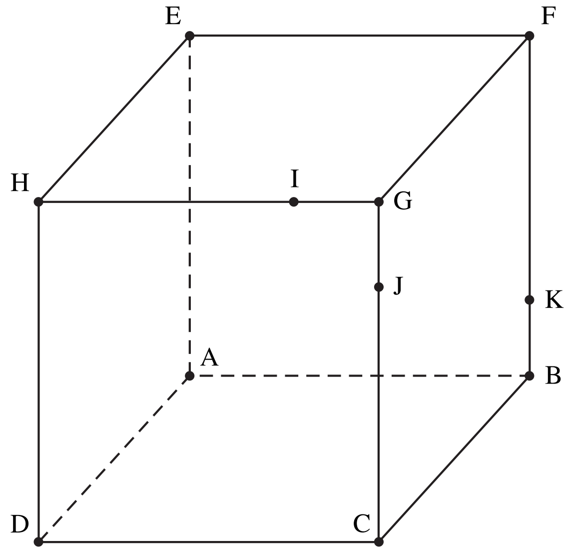
1. Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].

2. Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).

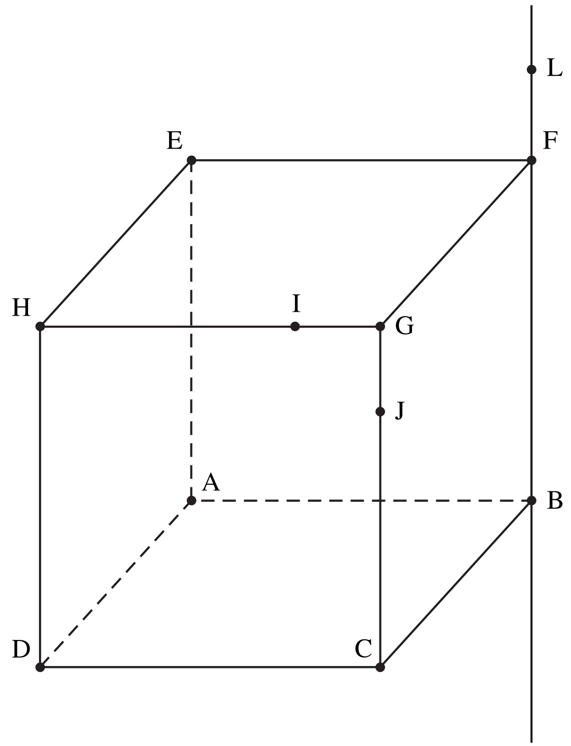
3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.

ANNEXE de l'exercice 4

Exercice 4, question 1



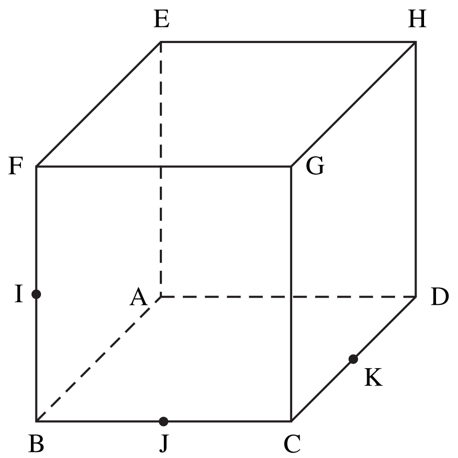
Exercice 4, question 2


L
E
F
H
I
G
J
A
B
D
C

EXERCICE 45 correction Pondichéry 2016

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

(b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

(a) Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

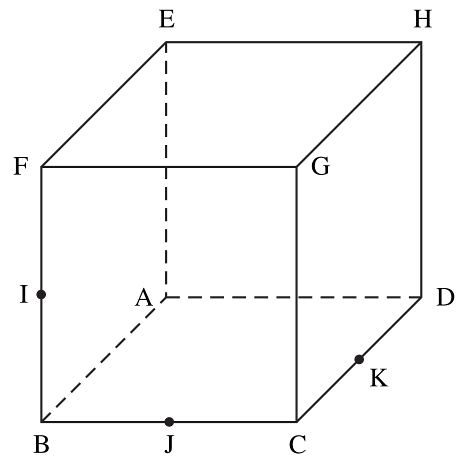
(b) Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $M\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que pour ce point $M\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$:

(a) M appartient au plan (IJK).

(b) La droite (IM) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

Annexe



Correction

Exercice 1 énoncé Antilles 2011

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 1 \times 1 - 3 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$, donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$. La droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}\,(-1\,;\,1;\,-1)$ et $\overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, donc $\overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{w}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ dirigent respectivement D et D$'$ et sont orthogonaux à $\overrightarrow{w}$ qui est donc un vecteur directeur de Δ.

2. (a) $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 3 - 6 + 3 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$; de même, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = 3 - 3 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{w}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ n'étant pas colinéaires, ils forment une base du plan P, et le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc normal à ce plan.

(b) P a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(3\,;\,2\,;\,3)$. Une équation cartésienne de P est donc : $3x+2y+3z+d=0$, où d est un réel à déterminer. Comme $\mathrm{A}(3\,;\,-4\,;\,1) \in \mathrm{P}$, on a : $3\times3+2\times(-4)+3\times1+d=0$, d'où $d=-4$. Une équation cartésienne de P est donc : $3x+4y+3z-4=0$.

3. (a) H$'$ est un point de D$'$, il existe donc un réel t tel que $\mathrm{H}'(-1-t\,;\,2+t\,;\,1-t)$. Par ailleurs $\mathrm{H}' \in \mathrm{P}$, donc $3(-1-t)+4(2+t)+3(1-t)-4=0$, d'où, en développant, $-4t=0$ puis $t=0$, ce qui donne $\mathrm{H}'(-1\,;\,2\,;\,1)$.

(b) La droite Δ passe par $\mathrm{H}'(-1\,;\,2\,;1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{w}\,(1\,;\,0\,;\,-1)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1+s \\ y &=& 2 \qquad (s\in\mathbb{R}) \\ z &=& 1-s \end{array}\right.$$

4. (a) $\mathrm{H} \in \mathrm{D}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \lambda\overrightarrow{u}$, d'où l'on déduit $\mathrm{H}(3+\lambda\,;\,-4-3\lambda\,;\,1+\lambda)$. De plus H est un point commun aux droites D et Δ, il existe donc une valeur de s et une valeur de λ telles que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -1+s &=& 3+\lambda \\ 2 &=& -4-3\lambda \\ 1-s &=& 1+\lambda \end{array}\right.$$

L'équation du milieu donne $\lambda=-2$ et les deux autres donnent alors $s=2$; on en déduit que $\mathrm{H}(1\,;\,2\,;\,-1)$.

(b) $\mathrm{HH}' = \sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

5. (a) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{\mathrm{MH}} + \overrightarrow{\mathrm{HH}'} + \overrightarrow{\mathrm{H}'\mathrm{M}'}$. Posons $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{MH}} + \overrightarrow{\mathrm{H}'\mathrm{M}'}$, alors $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HH}'}$ car $(\mathrm{MH}) \perp (\mathrm{HH}')$ et $(\mathrm{H}'\mathrm{M}') \perp (\mathrm{HH}')$.

(b) $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{\mathrm{HH}'} + \overrightarrow{v}$, donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right)^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\right)^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{HH}'} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^{\,2}$, comme $\overrightarrow{\mathrm{HH}'} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, il reste $\mathrm{MM}' = \mathrm{HH}'^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$, d'où : $\mathrm{MM}'^2 \geqslant \mathrm{HH}'^2$.

La plus petite distance possible entre deux points de D et de D$'$ est donc obtenue pour les points H et H$'$. La distance entre les droites D et D$'$ est donc égale à $2\sqrt{2}$.

EXERCICE 2 énoncé Antilles septembre 2011

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) $\overrightarrow{AB}(2\,;\,-8\,;\,-2)$, $\overrightarrow{AC}(3\,;\,0\,;\,1)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont les trois points distincts A, B et C définissent un plan.

(b) On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2-8+6=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=3-3=0$.

Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc un vecteur normal au plan (ABC).

(c) On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(ABC) \iff 1x+1y-3z+d=0$. En particulier $C(2\,;\,2\,;\,2)\in(ABC) \iff 1\times2+1\times2-3\times2+d=0 \iff d=2$.

Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(ABC) \iff x+y-3z+2=0$.

2. (a) Le vecteur $\vec{p}(1\,;\,-1\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (P).

Or $\vec{n}$ et $\vec{p}$ ne sont pas colinéaires, ce qui signifie que les plans (ABC) et P ne sont pas parallèles donc sécants.

(b) $M(x\,;\,y\,;\,z)\in D \iff M(x\,;\,y\,;\,z)\in \left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z+2 &=& 0\\ x-y+z-4 &=& 0\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3t-2\\ x-y &=& -t+4 \quad (1)\\ z &=& t\end{array}\right. \implies 2x=2t+2 \iff x=t+1$.

En remplaçant dans l'équation (1) $y=x+z-4=z+1+z-4=2t-3$.

Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z)\in D \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+1\\ y &=& 2t-3\\ z &=& t\end{array}\right.$

3. (a) Le point de D correspondant à $t=1$ est le point I.

(b) Calculons $\Omega I^2=(2-3)^2+(-1-1)^2+(1-3)^2=1+4+4=9$, donc $\Omega I=3$: le point I appartient à la sphère S.

(c) Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à S si et seulement si $\Omega M^2=9 \iff (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$.

Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à D et à S si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& -3+2t\\ z &=& t\\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 &=& 9\end{array}\right. \implies$

$(1+t-3)^2+(-3+2t-1)^2+(t-3)^2=9 \iff t^2+4-4t+4t^2+16-16t+t^2+9-6t=9 \iff 6t^2-26t+20=0 \iff 3t^2-13t+10=0$.

On sait que I appartient à S donc $t=1$ est une des des solutions de l'équation du second degré.

Or $3t^2-13t+10=(t-1)(3t-10)$; donc l'autre solution est donnée par $3t-10=0 \iff t=\dfrac{10}{3}$, valeur du paramètre qui conduit à $J\left(\dfrac{13}{3}\,;\,\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\right)$.

Exercice 3 énoncé Asie 2011

1. (a) Une représentation paramétrique de la droite (EC) c'est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_E + t \times x_{\overrightarrow{EC}} \\ (\ y & = & y_E + t \times y_{\overrightarrow{EC}} \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & z_E + t \times z_{\overrightarrow{EC}} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & 0+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$$

car E(1 ;0 ; 1) et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Une équation cartésienne du plan (AFH) est de la forme

$ax+by+cz+d=0$, avec $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan donc normal à $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FH}$

or $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc avec le produit scalaire de $\overrightarrow{N}$ et de $\overrightarrow{AF}$: $b+c=0$
donc avec le produit scalaire de $\overrightarrow{N}$ et de $\overrightarrow{HF}$: $a+b=0$;

donc $c=-b; a=-b$ donc $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} -b \\ b \\ -b \end{pmatrix}$, tous les vecteurs $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{N_{-1}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc l'équation du plan (AFH) c'est $x-y+z+d=0$ reste à trouver d, or ce plan passe par A(1 ; 0 ; 0) donc $1+d=0$ donc $d=-1$, (AFH) a pour équation $x-y+z-1=0$

(c) Les coordonnées du point I sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & 0+t \\ z & = & 1-t \\ 1-t-t+1-t & = & 1 \end{array}\right.$$

,donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} t & = & \frac{1}{3} \\ x & = & \frac{2}{3} \\ y & = & \frac{1}{3} \\ z & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

puis comme $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EI} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{N_{-1}}$ et vu que $I \in$ (AFH), le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

(d) La distance du point E au plan (AFH) est égale à $EI = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

left(on peut aussi calculer cette distance avec la formule $d(E\ ;\ (AFH)) = \dfrac{|ax_E+by_E+cz_E+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

c'est $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$)

(e) La droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF) si et seulement si le produit scalaire de $\overrightarrow{HI}$ et de $\overrightarrow{AF}$ est nul,

or $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$, on fait le produit scalaire on trouve $\frac{1}{3}+\frac{-1}{3}=0$

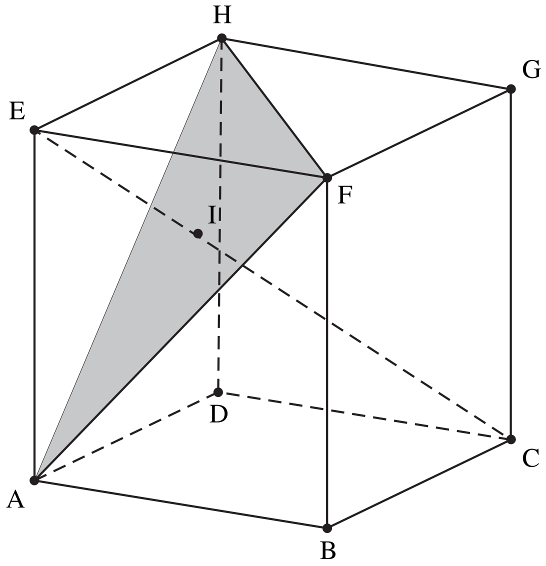
donc
La droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

Le point I est dans le plan du triangle AFH et la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF) donc (HI) est l'une des hauteurs du triangle AFH, pour prouver que I est l'orthocentre du triangle AFH prouvons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (HF), on fait le produit scalaire de $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on trouve $\frac{-1}{3}+\frac{1}{3}=0$;

I est l'orthocentre du triangle AFH et comme ce triangle est équilatéral de côté de longueur $\sqrt{2}$, le point I est point de rencontre de « toutes les droites » du triangle AFH

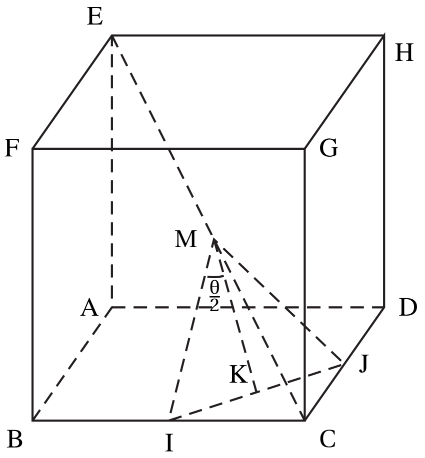
2. Le triangle AFH est équilatéral de côté $\sqrt{2}$ donc son aire (formule $\mathcal{A}$ (ABC) $= \frac{ab\sin(C)}{2}$) donc $\dfrac{(\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ or l'aire de AEH c'est celle d'une demi face du cube c'est $\dfrac{1}{2}$ donc le tétraèdre est ni de type 1 ni de type 3. Reste à voir s'il est de type 2 or par exemple $\overrightarrow{EA}$ s'écrit $\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IA}$, et l'arête opposée à [EA] c'est [HF] et $\overrightarrow{EI}$ est orthogonal à toute la face (AFH) donc $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{HF}$ car (AI) est l'une des hauteurs du triangle AFH donc [EA] et [HF] sont orthogonales et il en de même avec les deux autres couples d'arêtes : ([EF] et [AH]) et ([EH] et [AF])

le tétraèdre EAFH est dit de type 2 car les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux


H
G
E
F
I
D
C
A
B

Exercice 4 énoncé Centres Étrangers 2011

Commun à tous les candidats



1. (a) C(1 ; 1 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 1) ; I$\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$; J$\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

(b) $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (CE) \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CE}) \iff \begin{cases} x-1 &= -\alpha \\ y-1 &= -\alpha \\ z-0 &= \alpha \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x &= 1-\alpha \\ y &= 1-\alpha \\ z &= \alpha \end{cases}$ Finalement :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in [CE] \iff$ il existe $\alpha \in [0\ ;\ 1]$ tel que : $\begin{cases} x &= 1-\alpha \\ y &= 1-\alpha \\ z &= \alpha \end{cases}$

Pour $\alpha = 0$, le point est en C, pour $\alpha = 1$ le point est en E.

2. (a) Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient au plan médiateur de [IJ] s'il est équidistant de I et de J, c'est-à-dire si $MI = MJ$ ou $MI^2 = MJ^2 \iff (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 \iff x^2+1-2x+y^2+\frac{1}{4}-y+z^2 = x^2+\frac{1}{4}-x+y^2+1-2y+z^2 \iff -x+y=0 \iff y=x$ équation du plan médiateur.

Il est évident que C et E ont leurs coordonnées qui vérifient cette équation.

(b) Les coordonnées de M vérifient pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$ l'équation du plan médiateur donc $MI = MJ$ et le triangle MIJ est isocèle en M.

(c) On a $IM^2 = (1-t-1)^2 + \left(1-t-\frac{1}{2}\right)^2 + (t-0)^2 = t^2 + \frac{1}{4} + t^2 - t + t^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.

3. (a) Sur l'intervalle [0 ă; π] la fonction sinus est croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ avec un maximum en $\frac{\pi}{2}$. Donc la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

(b) Dans le triangle IMJ, soit K le milieu de [IJ]. Le triangle étant isocèle en M la droite (MK)est médiane et donc aussi hauteur. Le triangle IMK est donc rectangle en K et par définition $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{IK}{MI}$. Par définition de la fonction inverse le sinus est maximal quand le dénominateur IM est minimal.

(c) On a $f(t) = 3\left(t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{12}\right) = 3\left[\left(t-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{12}\right]$

$= 3\left[\left(t-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{18}\right]$.

La forme canonique du trinôme montre que le minimum de la fonction est obtenu pour $x = \frac{1}{6}$ et que ce minimum est égal à $f\left(\frac{1}{6}\right) = 3 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$.

(d) On a vu (question 2. c.) que $IM^2 = f(t)$ et que le minimum de IM^2, donc de IM correspond au maximum de l'angle $\widehat{IMJ}$. Donc le point M_0 de [EC] correspondant à la valeur du paramètre $t_0 = \frac{1}{6}$ est le point unique correspondant à la valeur maximale de l'angle $\widehat{IM_0J}$

(e) Géométriquement, on sait que la distance d'un point M à une droite (EC) est obtenue avec le projeté orthogonal du point M sur la droite (EC).

Donc le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

Exercice 5 énoncé **Polynésie septembre 2011**

Partie A

1. En utilisant l'égalité de Chasles avec le point I,
$\mathrm{MA}^2=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)=\mathrm{MI}^2+\mathrm{IA}^2+2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}$.

De même $\mathrm{MB}^2=\mathrm{MI}^2+\mathrm{IB}^2+2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}$.

Par somme on obtient :

$\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=2\mathrm{MI}^2+\mathrm{IA}^2+\mathrm{IB}^2+2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}=$
$2\mathrm{MI}^2+\dfrac{\mathrm{AB}^2}{4}+\dfrac{\mathrm{AB}^2}{4}+2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)}_{=\vec{0}}=2\mathrm{MI}^2+\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2$.

2. En utilisant le résultat précédent :

$\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=\mathrm{AB}^2\iff 2\mathrm{MI}^2+\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2=\mathrm{AB}^2\iff 2\mathrm{MI}^2=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2\iff$
$\mathrm{MI}^2=\dfrac{1}{4}\mathrm{AB}^2\iff\mathrm{MI}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$.

Les points M sont à la distance $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ du point fixe I milieu de [AB] : l'ensemble (E) est donc la sphère de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$.

Partie B

1. $\vec{p}\,(3\,;\,4\,;\,1)$ et $\vec{q}\,(1\,;\,-2\,;\,-1)$ sont des vecteurs normaux respectivement à (P) et (Q).
Or $\vec{p}$ et $\vec{q}$ ne sont pas colinéaires car leurs cordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les plans ne sont pas parallèles : ils sont sécants en (Δ).

(a) A appartient à la droite (Δ) si et seulement s'il appartient aux deux plans (P) et (Q).

$\mathrm{A}\,(-1\,;\,0\,;\,4)\in\mathrm{P})\iff 3\times(-1)+4\times0+1\times4-1=0$: vrai ;

$\mathrm{A}\,(-1\,;\,0\,;\,4)\in\mathrm{Q})\iff 1\times(-1)-2\times0-1\times4+5=0$: vrai.

Conclusion A est un point de (Δ).

(b) On a $\vec{u}\cdot\vec{p}=1\times3+(-2)\times4+5\times1=8-8=0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{p}$ sont orthogonaux.
$\vec{u}\cdot\vec{q}=1\times1+(-2)\times(-2)+5\times(-1)=5-5=0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{q}$ sont orthogonaux .

Donc le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) commune aux deux plans (P) et (Q).

On peut aussi considérer le point C de cordonnées :

$(-1+1=0\,;\,0-2=-2\,;\,4+5=9)$ et montrer que ce point appartient lui aussi à (P) et à (Q) donc à (Δ) et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{u}$ ...

(c) On sait que la droite est définie par le point A et un de ses vecteurs directeurs $\vec{u}$.

On a donc $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Delta)\iff$ il existe $t\in\mathbb{R}/\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\vec{u}\iff$
$\begin{cases}x+1&=&1t\\y-0&=&-2t\\z+4&=&5t\end{cases}\iff\begin{cases}x&=&t-1\\y&=&-2t\\z&=&5t-4\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, système d'équations paramétriques de la droite (Δ).

Autre méthode (plus compliquée) :

$\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Delta)\iff\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{P})\cap(\mathrm{Q})\iff\begin{cases}3x+4y+z-1&=&0\\x-2y-z+5&=&0\end{cases}$

$\iff\begin{cases}3x+4y&=&-z+1\\x-2y&=&z-5\end{cases}\iff\begin{cases}3x+4y&=&-z+1\\3x-6y&=&3z-15\end{cases}\implies 10y=-4z+16\iff y=-\dfrac{2}{5}z+\dfrac{8}{5}$

En reportant dans l'équation de (Q) on obtient :

$x-2y-z+5=0\iff x=2y+z-5=-\dfrac{4}{5}z+\dfrac{16}{5}+z-5=\dfrac{1}{5}z-\dfrac{9}{5}$. D'où en posant $z=t\,(t\in\mathbb{R})$

$\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)\in(\Delta)\iff\begin{cases}x&=&\dfrac{1}{5}t-\dfrac{9}{5}\\y&=&-\dfrac{2}{5}t+\dfrac{8}{5}\\z&=&t\end{cases}$

2. Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de (Δ) ; en utilisant ses coordonnées paramétriques on a :

$\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=\mathrm{AB}^2\iff(-1-t+1)^2+(0+2t)^2+(4-5t+4)^2+(t-4)^2+(-2t+4)^2+(5t+2)^2=(3+1)^2+(-4)^2+(2-4)^2\iff t^2+4t^2+25t^2+64-80t=16+16+4\iff 60t^2-4t0=0\iff 15t^2-t=0\iff t(15t-1)=0$.

Il y a donc deux solutions : l'une correspondant à $t=0$ et donnant le point $\mathrm{M}_1(-1\,;\,0\,;\,4)$, soit le point A, l'autre correspondant à $t=\dfrac{1}{15}$ donnant le point $\mathrm{M}_2\left(-\dfrac{14}{15}\,;\,-\dfrac{2}{15}\,;\,\dfrac{13}{3}\right)$.

Exercice 6 énoncé **Antilles septembre 2012**

Commun à tous les candidats

1. La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$; le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

   Ces vecteurs ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux, donc la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont non parallèles et non perpendiculaires.

2. L'équation a est à rejeter : les points de $\mathcal{D}$ ont des coordonnées qui ne vérifient pas cette équation.

   Le plan d'équation $2x - z = 0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}(2\ ;\ 0\ ;-1)$.

   Or $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 2 + 0 - 2 = 0$. Ces deux plans sont bien perpendiculaires.

   Comme $2t - 2t = 0$ tout point point de $\mathcal{D}$ appartient au plan $\mathcal{P}'$ d'équation

   $2x - z = 0$.

3. Soit $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, $2x - z = 0$ étant une équation de $\mathcal{P}'$; donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-1 & = & 0\\ 2x-z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z-1 & = & 0\\ 2x-z & = & 0\\ x & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t\\ y+2z & = & 1-t\\ z & = & 2t\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t\\ y & = & 1-5t\\ z & = & 2t\end{array}\right.$$. Réponse c.

4. Calculons la distance du centre de la sphère au plan :

$$d(\mathrm{B}\ ;\ \mathcal{P}) = \frac{|1-1+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,48 < 1 \text{ (rayon du cercle).}$$

   L'intersection de la sphère et du plan est donc un cercle. Réponse c.

Exercice 7 énoncé Centres Étrangers 2012

Partie A

1. La droite (IJ) passe par $\mathrm{I}\left(1\,;\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, et elle est dirigée par $\vec{\mathrm{IJ}}\left(-1\,;\frac{1}{3}\,;\,1\right)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases} x = 1-1\times t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times t \\ z = 0+1\times t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, soit

$\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

2. La droite qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1-t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$, passe par le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$, c'est-à-dire K ; le vecteur de coordonnées $\left(a-\frac{3}{4}\,;\,1\,;\,-1\right)$ en est un vecteur directeur. Or $\vec{\mathrm{KL}}\left(a-\frac{3}{4}\,;\,1\,;\,-1\right)$. C'est donc bien une représentation paramétrique de (KL).

3. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet une solution unique pour $(t,\ t')$.

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z = t \\ x = \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z = t \\ 1-t = \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3}+\frac{t}{3} = t' \\ t = 1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z = t \\ 1-(1-t') = \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3}+\frac{1-t'}{3} = t' \\ t = 1-t' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z = t \\ t' = \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3}+\frac{1-t'}{3} = t' \\ t = 1-t' \end{cases}$$

On obtient finalement $\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3}+\frac{t}{3} \\ z = t \\ \frac{1}{2} = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ t' = \frac{1}{2} \\ t = 1-t' \end{cases}$ qui a une solution si et seulement si $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.

Remarque : *Au passage,on a trouvé les coordonnées du point d'intersection des deux droites* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. *On a* $t = t' = \frac{1}{2}$ *et on reporte pour avoir* x, y, z.

Partie B

1. D'après la question précédente, dans ce cas, les diagonales (IJ) et (KL) du quadrilatère IKJL sont sécantes en un point Ω. On vérifie que $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ est bien le milieu de [IJ] et [KL].

Rappel de la formule : le milieu de [IJ] *a pour coordonnées* $\left(\frac{x_I+x_J}{2},\frac{y_I+y_J}{2},\frac{z_I+z_J}{2}\right)$.

On vérifie sans problème que l'on a bien $\left(\frac{x_I+x_J}{2},\frac{y_I+y_J}{2},\frac{z_I+z_J}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et aussi $\left(\frac{x_K+x_L}{2},\frac{y_K+y_L}{2},\frac{z_K+z_L}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Les diagonales du quadrilatère IKJL se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

On pouvait aussi montrer que $\vec{\mathrm{IK}}$ *et* $\vec{\mathrm{LJ}}$ *ont les mêmes coordonnées.*

2. (a) Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK) si et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs directeurs **non colinéaires** de ce plan.

Comme $\mathrm{I, J, K}$ définissent ce plan, ils sont non alignés et les vecteurs $\vec{\mathrm{IJ}}$ et $\vec{\mathrm{IK}}$ ne sont pas colinéaires.

Le repère étant orthonormé, on peut utiliser l'expression analytique du produit scalaire.

$\vec{\mathrm{IJ}}\left(-1\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 1\right)$ et donc $\vec{\mathrm{IJ}} \bullet \vec{n} = -1 \times 8 + \frac{1}{3} \times 9 + 1 \times 5 = 0$.

Les vecteurs $\vec{\mathrm{IJ}}$ et $\vec{n}$ sont bien orthogonaux.

De même : $\vec{\mathrm{KL}}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ -1\right)$ et donc $\vec{\mathrm{KL}} \bullet \vec{n} = -\frac{1}{2} \times 8 + 1 \times 9 - 1 \times 5 = 0$.

$\vec{n}$ est bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaire de (IJK), il est bien normal à ce plan.

(b) Le plan (IJK) a donc une équation cartésienne de la forme $8x + 9y + 5z + d = 0$. Comme le point I appartient à ce plan, ses coordonnées doivent vérifier cette équation :

$8 \times 1 + 9 \times \frac{1}{3} + 5 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -11$ ...

(c) *Je détaille le cas de* M. *Une manière de répondre à cette question est de chercher une représentation paramétrique de* (BF) *qui passe par* $\mathrm{B}(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ *et est dirigée par* $\vec{\mathrm{BF}}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

M est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF). Ses coordonnées (x, y, z) doivent donc être solutions du système formé par les trois équations issues d'une représentation paramétrique de (BF) et l'équation $8x + 9y + 5z + d = 0$ du plan (IJK) :

$$\begin{cases} x = 1 + 0 \times t \\ y = 0 + 0 \times t \\ z = 0 + 1 \times t \\ 8x + 9y + 5z - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \\ 8 \times 1 + 9 \times 0 + 5 \times t - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{5} \\ t = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Les coordonnées du point M sont $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{3}{5}\right)$.

De même, les coordonnées de N sont solutions de

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \times t \\ y = 1 + 0 \times t \\ z = 0 + 1 \times t \\ 8x + 9y + 5z - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \\ 8 \times 0 + 9 \times 1 + 5 \times t - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \frac{2}{5} \\ t = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Les coordonnées du point N sont $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \frac{2}{5}\right)$.

Une autre manière de répondre, est d'utiliser l'équation du plan (IJK) *donnée dans la question précédente.*

EXERCICE 8 énoncé Pondichéry 2012

Commun à tous les candidats

Proposition 1

Un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de la droite $\mathcal{D}$ a pour cordonnées $(-2\,;\,2\,;\,2)$;
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ normal au plan $\mathcal{P}$ a pour cordonnées $(1\,;\,-1\,;\,-1)$.
Comme $\overrightarrow{d}=-2\overrightarrow{u}$, les vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, donc la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. VRAIE

Proposition 2

Calculons la distance de O au plan $\mathcal{P}$:

$$d(\text{O},\,\mathcal{P})=\frac{|-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\neq 2$$

La distance n'étant pas égale au rayon de la sphère, la sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 2 n'est pas tangente au plan $\mathcal{P}$.

Rem. Comme $\dfrac{2}{\sqrt{3}}<2$, on peut dire que la sphère et le plan sont sécants.

Proposition 3

Un point $\text{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$ si ses coordonnées vérifient les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-z-2 &=& 0\\ x+y+3z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& z+2\\ x+y &=& -3z\end{array}\right. \implies \text{(par somme) } 2x=-2z+2 \iff x=-z+1.$$

En reportant dans la première équation on obtient :

$-z+1-y=z+2 \iff -2z-1=y$.

Finalement en posant $z=t'$, on a :

$$\text{M}(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{P}\cap\mathcal{P}' \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t'\\ y &=& -1-2t'\\ z &=& t'\end{array}\right. \quad \text{VRAIE}$$

Remarque : on peut aussi vérifier que les points de Δ appartiennent aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Proposition 4

Un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de la droite $\mathcal{D}$ a pour cordonnées $(-2\,;\,2\,;\,2)$;
Un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de la droite Δ a pour cordonnées $(-1\,;\,-2\,;\,1)$;
$\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles ; si elles sont sécantes il existe un point $\text{M}(x\,;\,y\,:\,z)$ dont les cordonnées vérifient les deux représentations paramétriques soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3-2t &=& 1-t'\\ 2t &=& -1-2t'\\ 1+2t && t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t' &=& 2t+4\\ 2t' &=& -1-2t\\ t' &=& 1+2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1+2t &=& 2t+4\\ 2(1+2t) &=& -1-2t\\ t' &=& 1+2t\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 0t &=& 3\\ 6t &=& -3\\ t' &=& 1+2t\end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution : les droites $\mathcal{D}$ et Δ n'étant ni parallèles ni sécantes ne sont pas coplanaires. FAUSSE

Exercice 9 énoncé **Amerique du Nord 2013**

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B(1 ; 3 ; 0), C $(2\ ;\ -1\ ;\ -2)$ et D $(7\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

1. Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On a $\overrightarrow{AB}(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\ ;\ -5\ ;\ -3)$. On a : $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-1}{-5}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$.

(a) Démontrons que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u} = 1\times 2+(-1)\times(-1)+(-1)\times 3 = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u} = 2\times 2+(-5)\times(-1)+(-3)\times 3 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{u}$.

La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC)

(b) De ce qui précède, on déduit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à (ABC).

Une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $2x-y+3z+d=0$.

Comme le point A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient :

$2\times 0+(4)\times(-1)+(1)\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=1$.

On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $2x-y+3z+1=0$.

(c) Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ.

Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et contient le point D $(7\ ;\ -1\ ;\ 4)$, une représentation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

(d) Déterminons les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Les coordonnées de H sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2x-y+3z+1 &=& 0 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2x-y+3z+1 &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2(2t+7)-(-t-1)+3(3t+4)z+1 &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ t &=& -2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ y &=& 1 \\ z &=& -2 \\ t &=& -2 \end{array}\right.$$

Le point H a pour coordonnées $H(3;\ 1;\ -2)$

3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

(a) Démontrons que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

Le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x+y+z=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Le plan $\mathcal{P}_\in$ d'équation $x+4y+2=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1\ ;\ 4\ ;\ 0)$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont pas parallèles ; ils sont sécants.

(b) Vérifions que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$

Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x+4y+2 &=& 0 \\ y &=& y \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+4y+2 & = & 0 \\ y & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -x-y \\ x & = & -4t-20 \\ y & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 3t+2 \\ x & = & -4t-20 \\ y & = & t \end{array}\right.$$

On en déduit que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}.$$

(c) On déduit de la représentation paramétrique précédente que la droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\,(-4\ ;\ 1\ ;\ 3)$.

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$.

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = 0$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont parallèles .

Exercice 2 **5 points**

EXERCICE 10 énoncé **Amerique du Sud 2013**

Commun à tous les candidats

1. Dans le repère donné, A a pour coordonnées $(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$.

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$.

La droite (FD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$ de coordonnées $(1,-1,1)$; de plus elle passe par le point $D(0,1,0)$.

La droite (FD) a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1,-1,1)$. Ce vecteur est un vecteur normal au plan (BGE) s'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$ directeurs du plan (BGE).

$\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées $(1,0,-1)$; $\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 1\times 1 + (-1)\times 0 + 1\times(-1) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EB}$.

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(1,1,0)$; $\vec{n}.\overrightarrow{BG} = 1\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EG}$.

Donc le vecteur $\vec{n}\,(1,-1,1)$ est normal au plan (BGE).

Le plan (BGE) a pour vecteur normal $\vec{n}$ et passe par le point B ; c'est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\vec{n} \perp \overrightarrow{BM}$.

$\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x-1,y,z)$;

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BM} \iff 1\times(x-1) + (-1)\times y + 1\times z = 0 \iff x-y+z-1=0$.

L'équation cartésienne du plan (BGE) est $x-y+z-1=0$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est égal au vecteur $\vec{n}$ qui est normal au plan (BGE) donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).

Les coordonnées (x,y,z) du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (BGE) sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ x-y+z-1 = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ t-(1-t)+t-1 = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ 3t = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) au point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4. Les segments [BE], [EG] et [BG] sont tous les trois des diagonales de carrés de côtés 1 ; donc $BE = EG = BG = \sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

Soit H le milieu de [EG] ; ce point est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BGE de côté $a = \sqrt{2}$.

Dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (relations dans un triangle rectangle) ; donc dans le triangle équilatéral BEG, la hauteur $BH = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BEG vaut $\frac{EG\times BH}{2} = \frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Le volume d'un tétraèdre est $\frac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

D'après les questions précédentes, le volume du tétraèdre BEGD est $\frac{\text{aire(BEG)}\times KD}{3}$.

Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

$$KD^2 = (x_D - x_K)^2 + (y_D - y_K)^2 + (z_D - z_K)^2 = \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = \frac{12}{9}$$

donc $KD = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{3}$.

Exercice 3 **5 points**

EXERCICE 11 énoncé **Antilles septembre 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Partie B

1. Affirmation 1 : Δ est orthogonale à toute droite du plan P. Δ a pour vecteur directeur $\delta(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(4\ ;\ -2\ ;\ -1)$.

La droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-1\ ;\ -1\ ;\ -2)$.

Or $\delta\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4-6+2=0$ et $\delta\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -1-3+4=0$.

Donc Δ est orthogonale à deux droites (AB) et (AC) sécantes du plan P : elle est orthogonale à ce plan. **VRAIE**.

2. Affirmation 2 : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

On a vu que Δ et (AB) étaient orthogonales, donc elles ne sont pas parallèles.

Si elles sont coplanaires elles sont donc sécantes en un point.

En traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t'\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on obtient une équation cartésienne de la droite (AB) : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4t' \\ y &=& -2t'-1 \\ z &=& -t'+1 \end{array}\right.$ avec t' appartenant à $\mathbb{R}$.

S'il existe un point commun aux deux droites ses coordonnées vérifient le système :

$\left\{\begin{array}{lcl} t &=& 4t' \\ 3t-1 &=& -2t'-1 \\ -2t+8 &=& -t'+1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t &=& 4t' \\ 12t' &=& -2t' \\ -8t' &=& -t'-7 \end{array}\right.$ système qui n'a manifestement pas de solution. **FAUSSE**

3. Affirmation 3 : Le plan P a pour équation cartésienne $x+3y-2z+5=0$.

On a $4+3\times(-3)-2\times 0+5=0 \iff -5=0$, qui signifie que les coordonnées de B ne vérifient pas cette équation de plan. **FAUSSE**

4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5=0$.

O n'appartient pas au plan : si la droite D est parallèle au plan, elle est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{n}(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ normal au plan.

Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} = 11-3-8=0$. Les vecteurs sont bien orthogonaux, la droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x+3y-2z+5=0$. **VRAIE**

EXERCICE 12 énoncé **Antilles 2013**

Commun à tous les candidats

1. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.

Par l'absurde : si (IJ) et (EC) étaient coplanaires, alors, le point J appartiendrait au plan (ECI) c'est-à-dire au plan (ECA), ce qui est faux.

2. La bonne réponse est $\boxed{\text{c}}$.

Dans le repère mentionné dans le sujet, on a $\overrightarrow{\text{AF}}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{\text{BG}}\,(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$, d'où

$\overrightarrow{\text{AF}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$.

3. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$. On le vérifie en injectant les coordonnées des points A, F et H dans l'équation $x + y - z = 0$.

4. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.

Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\,(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$, or $\overrightarrow{\text{EC}}\,(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$. Par conséquent $\overrightarrow{\text{EC}}$ est normal à $\mathcal{P}$, et comme $\overrightarrow{\text{EL}}$ et $\overrightarrow{\text{EC}}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{\text{EL}}$ est de ce fait aussi normal à $\mathcal{P}$.

5. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$.

On a $\overrightarrow{\text{EC}}\,(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $\text{E}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$; une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z & = & 1 - t \end{array}\right.$. Le point L a donc pour coordonnées $\text{L}(t\ ;\ t\ ;\ 1-t)$, et comme $\text{L} \in \mathcal{P}$ alors : $t + t - (1 - t) = 0$ d'où l'on tire $t = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $\text{L}\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$, d'où le résultat.

EXERCICE 13 énoncé **Centres Étrangers 2013**

Commun à tous les candidats

Affirmation 1

Un vecteur normal au plan P a pour coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$.
Un vecteur normal au plan dont une équation est $2x+y+2z-24=0$ a pour coordonnées $(2\,;\,1\,;\,2)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le s plans ne sont pas parallèles.
Affirmation fausse.

Affirmation 2

Pour $t=-1$ on trouve les coordonnées de A et pour $t=3$ celles de C.
Affirmation vraie.

Affirmation 3

La droite (DE) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{DE}}(5\ ;\ -4\ ;\ 3)$ et on a vu que $\overrightarrow{u}(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$ est un vecteur normal au plan P.
Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=10-4-6=0$, donc la droite (DE) est parallèle au plan P. Comme les cordonnées de E ne vérifient pas l'équation de P ($4+7+12-5=0$ est une égalité fausse, la droite (DE) est strictement parallèle au plan (P).

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).
Affirmation fausse.

Exercice 14 énoncé **Liban 2013**

Question 1 :

Réponse d

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{d}\,(1,\ 2,\ 3)$, un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{d'}\,(1,\ 1,\ -1)$. $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{d'}=1+2-3=0$.
Ces deux vecteurs sont orthogonaux, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc orthogonales.
Aussi par élimination : la a. est fausse car les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, b. est fausse car il n'y a pas de point d'intersection et c. est fausse car C n'est pas sur D.

Question 2 :

Réponse c

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\,(1,1,-1)$.
Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$.
Ce qui entraîne que ce plan est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.

Question 3 :

Réponse c

$\mathrm{AB}=\sqrt{4+16+36}=\sqrt{56}=2\sqrt{14},\quad \mathrm{AC}=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56},\quad \mathrm{BC}=\sqrt{36+4+16}=\sqrt{56}$
Ces trois distances sont égales, il en résulte que le triangle ABC est équilatéral.

Question 4 :

Réponse b

Pour déterminer lequel de ces vecteurs est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$, il suffit de vérifier si ces vecteurs sont orthogonaux à deux vecteurs de $\mathcal{P}'$ qui sont non colinéaires.
Prenons $\overrightarrow{d'}\,(1,\ 1,\ -1)$ et $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{AD}'}$, où $\mathrm{A}\,(1,\ -1,\ 2)$ et D' est un point de $\mathcal{D}'$, par exemple celui de coordonnées $(1,\ 3,\ 4)$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AD}'}\,(0,\ 4,\ 2)$.
On vérifie que $\overrightarrow{d'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}'}$ ne sont pas colinéaires, et on constate que, dans le second cas :

$$\overrightarrow{d'}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{\mathrm{AD}'}\cdot\overrightarrow{n}=0$$

Ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(3,\ -1,\ 2)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$.

EXERCICE 15 énoncé **Métropole 2013**

Commun à tous les candidats

1. Vrai : Si on pose A, le point d'affixe i et B le point d'affixe -1 dans le plan complexe, alors puisque M est le point d'affixe z, on a : $|z-i| = |z_M - z_A| = AM$. De même $|z+1| = MB$, et donc l'ensemble des points M recherché est l'ensemble des points équidistants de A et de B, c'est à dire la médiatrice du segment $[AB]$, c'est donc bien une droite.

2. Faux : On remarque que $1+i\sqrt{3} = 2\times\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. En utilisant les propriétés des modules et des arguments des nombres complexes, on a : $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4 = 2^4\times e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Un argument du nombre complexe étudié est donc $\frac{4\pi}{3}$ qui n'est congru ni a 0 ni à π modulo 2π, donc le nombre n'est pas réel.

3.

Méthode 1 **Vrai :** Après avoir choisi un repère orthonormé, calculons le produit scalaire p des deux vecteurs :

$p = \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG} = \left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}\right)\cdot\overrightarrow{BG}$, d'après la relation de Chasles.

$p = \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BG}$, par distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs.

Par ailleurs, les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux, car ce dernier est orthogonal à la face BCGF qui contient le premier vecteur.

De plus les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont également orthogonaux, car ils sont construits sur les diagonales d'un carré BCGF, qui sont perpendiculaires entre elles (comme toutes les diagonales de losanges).

Finalement, p est la somme de deux produits scalaires nuls, donc p est lui même nul, ce qui, par définition signifie que les droites (BC) et (CG) sont orthogonales.

Méthode 2 : Les faces BCGF et AEHD sont des carrés, donc les segments $[BG]$ et $[FC]$ d'une part, $[ED]$ et $[AH]$ d'autre part sont perpendiculaires.

Le plan médiateur de $[BG]$ contient donc les points E, D, C, F.

Donc en particulier (BC) et (CG) sont orthogonales

Méthode 3 : En prenant le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on trouve que

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. D'où $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG} = 0$ et la conclusion.

4. Vrai : La droite dont on nous propose une représentation paramétrique est dirigée par un vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1 ; 1 ; 3)$, c'est à dire par un vecteur qui est normal à $\mathcal{P}$, d'après l'équation de celui-ci.

Comme de plus, le point S est sur cette droite dont on nous donne la représentation paramétrique (c'est le point de paramètre -1 sur cette droite), on peut en déduire que la représentation paramétrique donnée est bien celle de la droite décrite.

Autre méthode : Avec $t\in\mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 2+t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 1+3t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+1+t\\ y &=& -2+1+t\\ z &=& -2+3+3t\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+(1+t)\\ y &=& -2+(1+t)\\ z &=& -2+3(1+t)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+t')\\ y &=& -2+t'\\ z &=& -2+3t'\end{array}\right.$ (en posant $t' = 1+t$) qui traduit bien la relation $\overrightarrow{SM} = t'\overrightarrow{n}$ soit une équation de la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ contenant S.

Exercice 16 énoncé Pondichéry 2013

Commun à tous les candidats

Les bonnes réponses sont **b. c. a. b.**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$ et donc, par propriété, il a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+t+2t' \\ y &=& 0-t-2t' \\ z &=& -1-t+3t'\end{array}\right.$

Par propriété, le plan (S) passe par F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$ et a pour vecteurs de base $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+t \\ y &=& -t \\ z &=& -1-t\end{array}\right.$

Par propriété, la droite (D) passe par F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, elle est donc clairement contenue dans le plan (S) pour la valeur $t'=0$.

On donne les points de l'espace M$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et N$(1\,;\,-2\,;\,9)$.

1. La bonne réponse est **b.** en excluant les trois autres ou en vérifiant directement.

a. N'est pas un plan mais une droite.

c. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+t' \\ y &=& 1-t-2t' \\ z &=& 1-t-3t'\end{array}\right.$ passe par $(0\,;1\,;1)\notin$ (P) **d.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t+t' \\ y &=& 1-2t+2t' \\ z &=& -1-t'\end{array}\right.$ passe par $(1\,;\,1\,;\,-1)\notin$(P) **b.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+2t' \\ y &=& 1-t+t' \\ z &=& -1-t\end{array}\right.$ passe par le point A$(0\,;1\,;\,-1)$ qui est élément de (P) car $0-2+3\times(-1)+5=0$ et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$ donc $\overrightarrow{n}$ normal à deux vecteurs non colinéaires du plan est normal au plan. On a bien une représentation paramétrique du plan (P).

2. La bonne réponse est **c.** « La droite (D) est une droite du plan (P). »

Remplaçons, pour t quelconque, les coordonnées d'un point de la droite dans l'équation du plan (P). Quel que soit $t\in\mathbb{R}$, $-2-t-2\times(-t)+3\times(-1-t)+5=-2-3+5+t+2t-3t=0$, donc tout point de Δ appartient à (P), la droite est contenue dans (P).

3. La bonne réponse est **a.** « La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales. »

$\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{\text{MN}}\cdot\overrightarrow{u}=1+2-3=0$ prouve que (MN) est orthogonale à (D).

4. La bonne réponse est **b.** « La droite (Δ) et la droite d'intersection de (P) et (S). »

On vérifie que la droite Δ est contenue dans chacun des deux plans (qui ne sont pas confondus par ailleurs).

. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t-2\times(-2-t)+3\times(-3-t)+5=t+4+2t-9-3t+5=0$ prouve $(\Delta)\subset(\text{P})$.

. Soit E le point de Δ de paramètre $t=0$: E$(0\,;\,-2\,;\,-3)$ et soit F le point de paramètre $t=-2$: F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$. On reconnaît le point de (S) de paramètre $(t=0,\ t'=0)$ donc F $\in$ (S).

Montrons que E $\in$ (S).

Résolvons le système $\left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& -2+t+2t' \\ -2 &=& -t-2t' \\ -3 &=& -1-t+3t'\end{array}\right.$

En additionnant les lignes (1) et (3) on obtient $5t'=0$ donc $t'=0$ et en remplaçant dans les trois équations on obtient bien une seule valeur de $t=2$.

GCela prouve que E $\in$ (P) pour ($t=2$, $t'=0$).

Conclusion : les points E et F sont dans (S), donc la droite (Δ) est entièrement contenue dans (S).

La droite (Δ) étant simultanément contenue dans les deux plans (non confondus) est la droite d'intersection.

(*Remarque* : Les réponses **a.** et **c.** pouvaient être éliminées de manière directe, mais la réponse **b.** exclut aussi la réponse **d.**).

EXERCICE 17 énoncé **Amerique du Nord 2014**

Commun à tous les candidats

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes ; on appelle L leur point d'intersection.

2. (a) Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires dans le plan (BCG) d'où les constructions de T et Q.

(b) On cherche l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\mathrm{L}\in(\mathrm{MP})\Longrightarrow \mathrm{L}\in(\mathrm{MNP})\\ \mathrm{N}\in(\mathrm{MNP})\end{array}\right\}\Longrightarrow(\mathrm{LN})\subset(\mathrm{MNP})\\ \mathrm{Q}\in(\mathrm{LN})\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathrm{Q}\in(\mathrm{MNP})\\ \mathrm{Q}\in[\mathrm{BF}]\Longrightarrow \mathrm{Q}\in(\mathrm{ABF})\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathrm{Q}\in(\mathrm{MNP})\cap(\mathrm{ABF})$$

Les droites (MP) et (EF) du plan (EFG) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes ; on appelle R leur point d'intersection.

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{R}\in(\mathrm{MP})\Longrightarrow \mathrm{R}\in(\mathrm{MNP})\\ \mathrm{R}\in(\mathrm{EF})\Longrightarrow \mathrm{R}\in(\mathrm{ABF})\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathrm{R}\in(\mathrm{MNP})\cap(\mathrm{ABF})$$

Les plans (MNP) et (ABF) ont deux points en commun, Q et R ; ils ne sont pas confondus car $\mathrm{P}\in(\mathrm{MNP})$ et $\mathrm{P}\notin(\mathrm{ABF})$.

Ces deux plans sont donc sécants et comme Q et R appartiennent aux deux plans, l'intersection des deux plans (MNP) et (ABF) est la droite (QR).

3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).

La section du cube par le plan (MNP) est le pentagone MPTQS.

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On a A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

1. M est le milieu du segment [EH] donc M a pour coordonnées $\left(\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{1+1}{2}\right)=\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$;

N est le milieu du segment [FC] donc n a pour coordonnées $\left(\frac{1+1}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{1+0}{2}\right)=\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$;

$\mathrm{P}(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie $\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}$, on a donc : $\left\{\begin{array}{l}x-0=\frac{1}{4}\\ y-1=0\\ z-1=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ y=1\\ z=1\end{array}\right.$ Donc $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4};1;1\right)$.

2. Pour calculer les coordonnées du point L, on écrit les systèmes de représentations paramétriques des droites (MP) et (FG).

(MP) passe par $\mathrm{M}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}k\\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k\\ z=1\end{array}\right.$ où $k\in\mathbb{R}$

(FG) passe par F(1 ; 0 ; 1) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{FG}}\,(0\,;\,1\,;\,0)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=k'\\ z=1\end{array}\right.$ où $k'\in\mathbb{R}$

On détermine l'intersection de ces deux droites :

$$\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{4}k & =1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k & =k'\\ 1 & =1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}k=4\\ k'=\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

Donc le point L a pour coordonnées $\left(1;\frac{5}{2};1\right)$.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{TP}.\overrightarrow{TN}$

$$\overrightarrow{TP}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\0\\\frac{3}{8}\end{pmatrix}.\overrightarrow{TN}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{8}\end{pmatrix}=-\frac{3}{4}\times0+0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{8}\times\left(-\frac{1}{8}\right)\neq0$$

Le triangle TPN n'est pas rectangle en T .

EXERCICE 18 énoncé **Amerique du Sud 2014**

Commun à tous les candidats

1. b.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A $(2\ ;\ 5\ ;\ -1)$, B$(3\,;\,2\,;\,1)$ et C $(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$.

$\mathrm{AB}^2 = (3-2)^2 + (2-5)^2 + (1+1)^2 = 1+9+4 = 14$

$\mathrm{AC}^2 = (1-2)^2 + (3-5)^2 + (-2+1)^2 = 1+4+1 = 6$

$\mathrm{BC}^2 = (1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2 = 4+1+9 = 14$

Donc le triangle ABC est isocèle non rectangle.

2. c.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A $(2\ ;\ 5\ ;\ -1)$.

Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\,(2; -1; 3)$, donc toute droite perpendiculaire au plan P aura un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{n}$, ce qui élimine les propositions **a.** et **b.**

On cherche si le point A appartient à la droite dont la représentation paramétrique est en **c.**; on résout le système : $\begin{cases} 2 = 6-2t \\ 5 = 3+t \\ -1 = 5-3t \end{cases}$

Ce système a pour solution $t = 2$ donc la bonne réponse est **c.**

3. c.

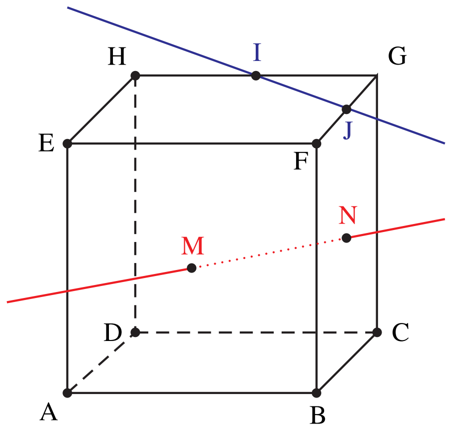
Soit A et B deux points distincts du plan.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 &\iff \overrightarrow{\mathrm{MA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MB}} \\ &\iff \text{MAB est un triangle rectangle en M} \\ &\iff \text{M appartient au cercle de diamètre [AB]} \end{aligned}$$

4. c.

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG]. Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.

Les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales; il suffit pour s'en convaincre de regarder le cube du dessus :



Choisissons le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$

Les points I, J, M et N ont respectivement comme coordonnées :

$\left(\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$, $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right.$

I et J ont la même cote : ils appartiennent au plan d'équation $z = 1$;

M et N ont la même cote : ils appartiennent au plan d'équation $z = \frac{1}{2}$. Ces deux plans sont parallèles et distincts, donc les droites (IJ) et (MN) ne sont ni perpendiculaires ni sécantes. Les réponses **a.** et **b.** sont fausses.

On a $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$; ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles. La reponse **d.** est fausse.

Or $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MN}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$: les vecteurs sont orthogonaux et les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales. Réponse **c.**

Exercice 19 énoncé Antilles 2014

Commun à tous les candidats

1. La proposition est **fausse** ; en effet, on a : $\overrightarrow{AB}\,(-2\ ;\ 4\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(6\ ;\ -12\ ;\ 3)$, ces deux vecteurs sont colinéaires (car $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$), donc les trois points A, B et C sont alignés et ne définissent pas un plan.

2. La proposition est **vraie** car on vérifie aisément que les coordonnées de chacun des points A, B et D vérifient l'équation $x-2z+9=0$.

3. La proposition est **fausse** : la droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\frac{3}{2}\ ;\ -3\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$, ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, il ne peut diriger (AC).

4. La proposition est **fausse** : le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, le plan $\mathcal{P}'$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}'(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles.

EXERCICE 20 énoncé Asie 2014

Commun à tous les candidats

Question 1 - c.

On peut éliminer rapidement les réponses **a.** et **d.** car les vecteurs directeurs des droites proposées ne sont pas colinéaires au vecteur $\vec{u}$.

La représentation paramétrique donnée en **c.** est une droite qui contient le point A pour la valeur $t = -1$.

Question 2 - c.

Le plus efficace pour répondre à cette question est de résoudre le système $\left\{\begin{array}{r c l} x &=& 1+t \\ y &=& -3-t \\ z &=& 2-2t \\ 2x+y-z+5 &=& 0 \end{array}\right.$

qui donne $-\dfrac{2}{3}$ comme valeur à t et qui conduit au point E.

Question 3 - d.

On appelle $\overrightarrow{n}\,(2\,;1\,;-1)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

On montre successivement que $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{\text{AB}} = 0$ et $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{\text{AC}} = 0$ ce qui prouve que les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles. Or A $\notin \mathcal{P}$ donc les plans sont strictement parallèles.

Question 4 - a.

On utilise l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}}\,.\,\overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos\widehat{\text{BAC}} \iff 12 = \sqrt{8} \times \sqrt{21} \times \cos\widehat{\text{BAC}}$

donc $\cos\widehat{\text{BAC}} \approx 0{,}9258$ ce qui correspond à $22,2$ ř.

Exercice 21 énoncé Centres Étrangers 2014

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

A(1 ; 2 ; 7), B(2 ; 0 ; 2), C(3 ; 1 ; 3), D(3 ; −6 ; 1) et E(4 ; −8 ; −4).

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. (a) $\overrightarrow{u}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur normal au plan (ABC) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 1-2b-5c=0$; et

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 2-b-4c=0$.

Il faut donc résoudre le système :

$\begin{cases}1-2b-5c &= 0\\ 2-b-4c=0\end{cases} \iff \begin{cases}1-2b-5c &= 0\\ -4+2b+8c &= 0\end{cases} \implies -3+3c=0 \iff c=1$; en remplaçant dans la deuxième équation on a $b=2-4c=2-4=-2$.

(b) On sait que si $\overrightarrow{u}(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC), une équation de ce plan est : $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(ABC) \iff x-2y+z+d=0$.

Or $A(1\ ;\ 2\ ;\ 7)\in(ABC) \iff 1-4+7+d=0 \iff d=-4$.

Donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(ABC) \iff x-2y+z-4=0$.

(c) $D(3\ ;\ -6\ ;\ 1)\in(ABC) \iff 3+12+1-4=0 \iff 12=0$: cette égalité est fausse : le point D n'appartient pas au plan (ABC).

3. (a) Cette droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}(2\ ;\ -4\ ;\ 2)$ et le le vecteur $\overrightarrow{u}(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ lui est normal au plan (ABC). Or $\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{u}$: le vecteur $\overrightarrow{w}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ est lui aussi normal au plan (ABC).

(b) Le point commun , s'il existe, a ses coordonnées qui vérifient les équations de la droite et l'équation du plan, soit :

$\begin{cases}x &= 2t+3\\ y &= -4t+5\\ z &= 2t-1\\ x-2y+z-4 &= 0\end{cases} \implies 2t+3-2(-4t+5)+2t-1-4=0 \iff 2t+3+8t-10+2t-1-4=0 \iff 12t-12=0 \iff t=1$.

En remplaçant dans les équations de la droite, on obtient :

$x=2+3=5$, $y=-4+5=1$, $z=2-1=1$.

H(5 ; 1 ; 1).

4. On a $\overrightarrow{DE}(1\ ;\ -2\ ;\ -5)$.

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}$; donc la droite (DE) est parallèle à la droite (AB) donc la droite (DE) est parallèle au plan (ABC), et on a vu que D n’appartientpas au plan (ABC), donc la droite (DE) est strictement parallèle au plan (ABC).

EXERCICE 22 énoncé Liban 2014

Proposition 1 : VRAIE

Il suffit de vérifier que les coordonnées des deux points A et B vérifient le système formé des trois équations paramétriques.
Pour $t=2$ on retrouve les coordonnées du point A, et pour $t=1$ celles du point B.

Proposition 2 : VRAIE

$\mathcal{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ de coordonnées $(2,\ 1,\ 3)$ et (AB) par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ de coordonnées $(-2,\ 1,\ 1)$.
Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{d}=-4+1+3=0$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{d}$ sont donc orthogonaux, les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont donc orthogonales.

Proposition 3 : FAUSSE

Pour savoir si ces deux droites sont coplanaires, il suffit de savoir si elles sont sécantes, car étant orthogonales elles ne pourront pas être parallèles.
Pour cela on résout le système

$$\begin{cases} 2t = 5-2t' & (1)\\ 1+t = -1+t' & (2)\\ -5+3t = -2+t' & (3)\end{cases}$$

En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient $2t-6=-1$ soit $t=\dfrac{5}{2}$.
On remplace dans (2) : $t'=-2+t=-2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$.
On vérifie dans (1) : $2t=5$, alors que $5-2t'=5-1=4$. Ce qui signifie que ce système n'a pas de solution.
Puisque ces deux droites sont orthogonales et non sécantes, elles seront donc non coplanaires.

Proposition 4 : FAUSSE

On vérifie facilement que $\mathrm{E}\in\mathcal{P}$, mais $\mathrm{E}\notin\mathcal{D}$.
En effet, si on résout le système

$$\begin{cases} 8=2t\\ -3=1+t\\ -4=-5+3t\end{cases}$$

On trouve que $t=4$ dans la première équation, valeur qui ne convient pas dans la seconde équation.

Proposition 5 : VRAIE

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ont pour coordonnées respectives $(2,\ -1,\ -1)$ et $(6,\ 0,\ -2)$, d'où

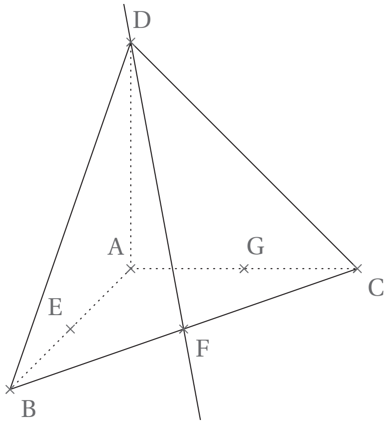
$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2+1-3=0 \quad\text{et}\quad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6+0-6=0$$

$\overrightarrow{n}$ est donc normal au plan (ABC).
$\mathcal{P}$ et (ABC) ayant un vecteur normal commun sont donc parallèles.

EXERCICE 23 énoncé **Métropole 2014**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Tout d'abord, une figure :



1. (a) Commençons par des coordonnées "évidentes", puisque liées au repère : $A(0\,;\,0\,;\,0)$; $B(1\,;\,0\,;\,0)$; $C(0\,;\,1\,;\,0)$ et $D(0\,;\,0\,;\,1)$.
Puisque F est le milieu de $[BC]$, on en déduit que ses coordonnées sont la moyenne de celles des points B et C, donc $F\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

(b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$ sont donc : $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-1\right)$.

Si on appelle M_t le point de paramètre t sur la droite (DF), défini tel que $\overrightarrow{DM_t}=t\overrightarrow{DF}$, alors la représentation paramétrique de la droite (DF) est donnée par : $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \\ z=1-t \end{cases}\quad t\in\mathbf{R}$.

(c) Puisque le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à (DF), alors un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est le vecteur $2\overrightarrow{DF}$, de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,-2)$. Une équation cartésienne du plan sera alors de la forme $x+y-2z+d=0$, où d est un nombre réel. Comme ledit plan doit contenir le point A, le réel d doit être choisi de sorte que les coordonnées de A vérifient l'équation, donc :
$0+0-2\times 0+d=0$, ce qui donne $d=0$.
Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc : $x+y-2z=0$.

(d) Le point H est un point de (DF), mais c'est aussi un point de $\mathcal{P}$, donc ses coordonnées sont celles d'un point de paramètre t dans la représentation paramétrique, qui vérifie également l'équation du plan :

$$\begin{aligned} M_t\in\mathcal{P} &\iff \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t-2(1-t)=0\\ &\iff 3t-2=0\\ &\iff t=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Le point de paramètre t sur la droite (DF) est sur le plan $\mathcal{P}$ si et seulement si le paramètre t est $\frac{2}{3}$, ce qui nous indique que le point H est le point de coordonnées : $\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,;\,1-\frac{2}{3}\right)$, c'est à dire : $H\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$

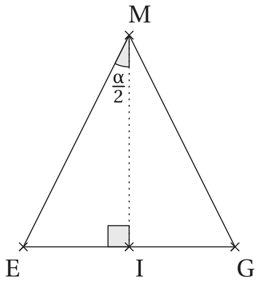
(e) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$:
$\overrightarrow{HE}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;\,0-\frac{1}{3}\,;\,0-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{6}\,;\,-\frac{1}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$
$\overrightarrow{HG}=\left(0-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;\,0-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$.
Comme on travaille avec un repère orthonormé, le produit scalaire des deux vecteurs peut être obtenu avec ces coordonnées, et on a :
$\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\times\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{-1}{3}\times\frac{-1}{3}=\frac{-1}{18}+\frac{-1}{18}+\frac{1}{9}=0$.
Comme le produit scalaire des deux vecteurs est nul, ceux ci sont orthogonaux, et donc l'angle $\widehat{EHG}$ est bien droit.

2. On reconnaît dans le point M décrit, le point de paramètre t dans la représentation paramétrique de la droite (DF) donnée à la question **1. b.**.

(a) Le point E est le milieu du segment $[AB]$, donc ses coordonnées sont $E\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$ donc le vecteur $\overrightarrow{ME}$ a pour coordonnées :
$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\,;\,0-\frac{1}{2}t\,;\,0-(1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{ME}\left(\frac{1}{2}(1-t)\,;\,-\frac{1}{2}t\,;\,t-1\right)$.
On a donc $ME^2=\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{ME}=\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(t-1\right)^2$
$ME^2=\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+\frac{t^2}{4}+t^2-2t+1=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$
On a bien prouvé $ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$

(b) On procède de façon analogue pour calculer le carré de la distance MG : Le point G est le milieu du segment $[AC]$, donc ses coordonnées sont $E\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ donc le vecteur $\overrightarrow{MG}$ a pour

coordonnées :
$\overrightarrow{MG}\left(0-\frac{1}{2}t\ ;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\ ;\ 0-(1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{MG}\left(-\frac{1}{2}t\ ;\ \frac{1}{2}(1-t)\ ;\ t-1\right)$.
On a donc $MG^2=\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG}=\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+\left(t-1\right)^2$
$MG^2=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+t^2-2t+1=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$
On a bien prouvé $MG^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}=ME^2$. Deux nombres ont le même carré quand ils sont égaux ou opposés, or ME et MG étant des distances, ils ne peuvent être opposés, donc $ME=MG$ et donc le triangle MEG est bien isocèle en M.
Visualisons la situation dans le plan (MEG) :



On nomme I le pied de la hauteur issue de M dans ce triangle. Le triangle étant isocèle en M, cette hauteur est aussi une bissectrice de l'angle $\widehat{EMG}$, donc on peut dire que dans le triangle EMI, rectangle en I, l'angle $\widehat{EMI}$ a donc une mesure égale à $\frac{\alpha}{2}$, et donc le sinus de cet angle est égal au quotient de la longueur du côté opposé à l'angle par celle de l'hypoténuse, soit : $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{IE}{ME}$, ce qui donne : $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=IE$, or IE est la moitié de EG, puisque (IM), la hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle est aussi la médiane issue de ce sommet, donc I est le milieu de [EG].
La distance EG peut être calculée en utilisant les coordonnées de E et G, puisque le repère est orthonormé :
$EG=\sqrt{(x_G-x_E)^2+(y_G-y_E)^2+(z_G-z_E)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
La distance IE étant la moitié de cette distance EG, on arrive bien à l'égalité attendue : $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) Puisque α désigne la mesure en radians d'un angle géométrique, on peut en déduire que cette mesure varie dans l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ et donc que le nombre $\frac{\alpha}{2}$ varie dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est strictement croissante, donc comme la fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{2}$ l'est aussi, plus la mesure α est élevée, plus le nombre $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ l'est aussi.
La réciproque est vraie également : puisque la fonction est strictement croissante, plus l'image est élevée, plus l'antécédent l'est aussi.
On a donc prouvé que la valeur α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ l'est aussi.

Comme le produit de $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ par la distance ME est constant, et que les deux facteurs sont positifs, pour que l'un des facteurs soit maximal, il faut et il suffit que l'autre soit minimal, donc cela prouve $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal quand la distance ME est minimale.
Enfin, la distance ME étant nécessairement positive, et étant donné que la fonction carré est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on sait que ME est minimal si et seulement si ME^2 l'est aussi.
En conclusion, en utilisant ces différentes équivalences, on en déduit que la mesure α est maximale quand ME^2 est minimal.

(d) Le polynome de degré 2 qu'est $\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$ a un coefficient dominant positif, donc son extremum sera un minimum, et celui ci sera atteint pour $t=\frac{-\frac{-5}{2}}{2\frac{3}{2}}=\frac{5}{6}$.

La position du point M telle que la mesure de l'angle soit maximale est celle atteinte pour le paramètre $t=\frac{5}{6}$, soit pour M de coordonnées : $M\left(\frac{5}{12}\ ;\ \frac{5}{12}\ ;\ \frac{1}{6}\right)$.

Ce qui suit est hors-sujet : On a alors $ME^2=\frac{3}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5}{2}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{4}=\frac{5}{24}$.
On en déduit alors que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\sqrt{\frac{24}{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$, ce qui, à l'aide de la calculatrice donne $\alpha\approx 1,7722$ soit un angle d'environ 101,5°.

Exercice 24 énoncé **Métropole septembre 2014**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées : $A\left(1\,;\,-\sqrt{3}\,;\,0\right)$; $B\left(1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0\right)$; $C(-2\,;\,0\,;\,0)$; $D\left(0\,;\,0\,;\,2\sqrt{2}\right)$

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(0;2\sqrt{3};0\right)$; le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\left(-1;\sqrt{3};2\sqrt{2}\right)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les trois points A, B, D définissent un plan.

La relation $4x+z\sqrt{2}=4$ est de la forme $ax+by+cz=d$, c'est donc une équation d'un plan $\mathcal{P}$.

- $4x_A+z_A\sqrt{2}=4\times 1=4$ donc $A\in\mathcal{P}$
- $4x_B+z_B\sqrt{2}=4\times 1=4$ donc $B\in\mathcal{P}$
- $4x_D+z_D\sqrt{2}=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$ donc $D\in\mathcal{P}$

Donc $\mathcal{P}$ est le plan (ABD) qui a pour équation $4x+z\sqrt{2}=4$.

2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x=t\\ y=0\\ z=t\sqrt{2}\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$

(a) En prenant $t=0$, on trouve $\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z=0\end{array}\right.$ donc le point O appartient à $\mathcal{D}$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1;0;\sqrt{2}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\left(2;0;2\sqrt{2}\right)$ donc $\overrightarrow{CD}=2\vec{u}$ ce qui entraîne que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à (CD).

(b) Le point G d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD) a des coordonnées $(x;y;z)$ qui vérifient : $\left\{\begin{array}{r} x=t\\ y=0\\ z=t\sqrt{2}\\ 4x+z\sqrt{2}=4\end{array}\right.$

Donc $4t+t\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4 \iff 6t=4 \iff t=\dfrac{2}{3}$. Le point G a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3};0;\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

3. (a) On note L le milieu du segment [AC] ;

L a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_C}{2};\dfrac{y_A+y_C}{2};\dfrac{z_A+z_C}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2};0\right)$; le vecteur $\overrightarrow{BO}$ a pour coordonnées $\left(-1;-\sqrt{3};0\right)$.

Donc $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BO}$; les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires donc les points B, O et L sont alignés.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\left(-3;\sqrt{3};0\right)$.

On calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{BL}$ et de $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{BL}.\overrightarrow{AC}=-\dfrac{3}{2}\times(-3)+\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt{3}+0=\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

On peut donc dire que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

(b) La droite (BL) passe par le milieu de [AC] et est perpendiculaire à (AC) donc c'est la médiatrice de [AC], donc $BA=BC$.

- $BA^2=(x_A-x_B)^2+\left(y_A-y_B\right)^2+(z_A-z_B)^2=\left(-2\sqrt{3}\right)^2=12$
- $CA^2=(x_A-x_C)^2+\left(y_A-y_C\right)^2+(z_A-z_Z)^2=(1+2)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2=9+3=12$

Donc $BA^2=CA^2$ donc $BA=CA$.

On peut en déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Donc son cercle circonscrit est aussi son centre de gravité ; il est situé aux $\dfrac{2}{3}$ d'une médiane en partant du sommet.

Or on a vu que $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BO}$ donc on peut en déduire que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4. On a déjà vu que $AB=AC=BC=\sqrt{12}$; on calcule les longueurs des autres arêtes du tétraèdre :

- $DA^2=(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=1+3+8=12$
- $DB^2=(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=1+3+8=12$
- $DC^2=2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=4+8=12$

Donc les six arêtes du tétraèdre ABCD ont la même longueur, donc le tétraèdre ABCD est régulier.

Exercice 25 énoncé Nouvelle Calédonie 2014

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On donne les points A $(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, B $(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, C $(-5\ ;\ 5\ ;\ 0)$ et D $(11\ ;\ 1\ ;\ -2)$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD]. Le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. (a) Le point I est le milieu de [AB] donc a pour coordonnées $\left(\frac{1+1}{2};\frac{0+2}{2};\frac{-1+3}{2}\right) = (1;1;1)$.

Le point J est le milieu de [CD] donc a pour coordonnées $\left(\frac{-5+11}{2};\frac{5+1}{2};\frac{0-2}{2}\right) = (3;3;-1)$.

Le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-5-1;5-2;0-3) = (-6;3;-3)$ donc $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-2;1;-1)$.

Donc $\left\{\begin{array}{l} x_K - x_B = -2\\ y_K - y_B = 1\\ z_K - z_B = -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_K = -2+1\\ y_K = 1+2\\ z_K = -1+3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_K = -1\\ y_K = 3\\ z_K = 2\end{array}\right.$

Donc le point K a pour coordonnées $(-1;3;2)$.

(b) Les points I, J et K définissent un plan si et seulement si ces trois points ne sont pas alignés. On va donc regarder si les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(3-1;3-1;-1-1) = (2;2;-2)$.

Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $(-1-1;3-1;2-1) = (-2;2;1)$.

Or $x_{\overrightarrow{IJ}} \times (-1) = x_{\overrightarrow{IK}}$ et $y_{\overrightarrow{IJ}} \times (-1) \neq y_{\overrightarrow{IK}}$; donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires.

Les trois points I, J et K définissent un plan.

(c) Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (3 ; 1 ; 4) est un vecteur normal au plan (IJK) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}.\overrightarrow{IJ} = 3\times 2+1\times 2+4\times(-2) = 0 \Longrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{IJ}\\ \vec{n}.\overrightarrow{IK} = 3\times(-2)+1\times 2+4\times 1 = 0 \Longrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{IK}\end{array}\right\}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

Le plan (IJK) est alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux.

Si M a pour coordonnées $(x;y;z)$, le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $(x-1;y-1;z-1)$.

$\overrightarrow{IM}\perp\vec{n} \iff \overrightarrow{IM}.\vec{n} = 0 \iff 3(x-1)+1(y-1)+4(z-1) = 0 \iff 3x+y+4z-8 = 0$.

Le plan (IJK) a pour équation $3x+y+4z-8 = 0$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x+y+4z-8 = 0$.

(a) La droite (BD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BD}$ de coordonnées $(11-1;1-2;-2-3) = (10;-1;-5)$.

La droite (BD) passe par le point B et a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(10;-1;-5)$ donc elle a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+10t\\ y = 2-t\\ z = 3-5t\end{array}\right.$ où $t\in\mathbb{R}$

(b) Pour chercher si le plan $\mathcal{P}$ et la droite (BD) sont sécants, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+10t\\ y = 2-t\\ z = 3-5t\\ 3x+y+4z-8 = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1+10t\\ y = 2-t\\ z = 3-5t\\ 3(1+10t)+(2-t)+4(3-5t)-8 = 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 1+10t\\ y = 2-t\\ z = 3-5t\\ 9+9t = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1-10\\ y = 2+1\\ z = 3+5\\ t = -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -9\\ y = 3\\ z = 8\\ t = -1\end{array}\right.$$

Donc la droite (BD) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point L de coordonnées $(-9;3;8)$.

(c) Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(10;-1;-5)$, et le vecteur $\overrightarrow{LB}$ a pour coordonnées $(1-(-9);2-3;3-8) = (10;-1;-5)$. Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{LB}$ sont égaux donc le point L est le symétrique du point D par rapport au point B.

Exercice 26 énoncé **Polynésie 2014**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5;-5;2),\quad B(-1;1;0),\ C(0;1;2),\quad \text{et } D(6;6;-1)$$

1. Nature du triangle BCD :

$$\begin{cases} BC^2=(0-(-1))^2+(1-1)^2+(2-0)^2=5 \\ CD^2=(6-0)^2+(6-1)^2+(-1-2)^2=70 \\ BD^2=(6-(-1))^2+(6-1)^2+(-1-0)^2=75 \end{cases} \Longrightarrow BD^2=BC^2+CD^2 \Longrightarrow \text{BCD est rectangle en C}$$

2. Son aire est : $\dfrac{BC\times CD}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{14}$.

(a) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=1\times(-2)+0\times3+2\times1=0 \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=6\times(-2)+5\times3+(-3)\times1=0$$

Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires (BCD est un triangle rectangle non aplati), $\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), il en est un vecteur normal.

(b) Équation cartésienne du plan (BCD) :

- L'équation est de la forme $-2x+3y+z+d=0$;
- B appartient au plan, donc $-2(-1)+3(1)+(0)+d=0 \Longleftrightarrow d=-5$;
- une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x+3y+z-5=0$.

3. Représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) (donc de vecteur directeur $\vec{n}$) et passant par le point A :

$$\begin{cases} x=5-2t \\ y=-5+3t \\ z=2+t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (BCD).

$$\begin{cases} x=5-2t \\ y=-5+3t \\ z=2+t \\ -2x+3y+z-5=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=5-2t \\ y=-5+3t \\ z=2+t \\ -2(5-2t)+3(-5+3t)+(2+t)-5=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=5-2(2)=1 \\ y=-5+3(2)=1 \\ z=2+2=4 \\ t=2 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de H sont : $(1;1;4)$.

5. Volume du tétraèdre ABCD :

[AH] est la hauteur du tétraèdre, car A est sur la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et H est l'intersection de $\mathcal{D}$ et (BCD), donc la projection orthogonale de A sur (BCD).

$\mathcal{B}=5\sqrt{7}$; $h=AH=\sqrt{(5-1)^2+(-5-1)^2+(2-4)^2}=4\sqrt{14}$; donc :

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h=\frac{1}{3}\times4\sqrt{14}\times\frac{5}{2}\sqrt{14}=\frac{140}{3}$$

6. Mesure de l'angle $\widehat{BAC}$:

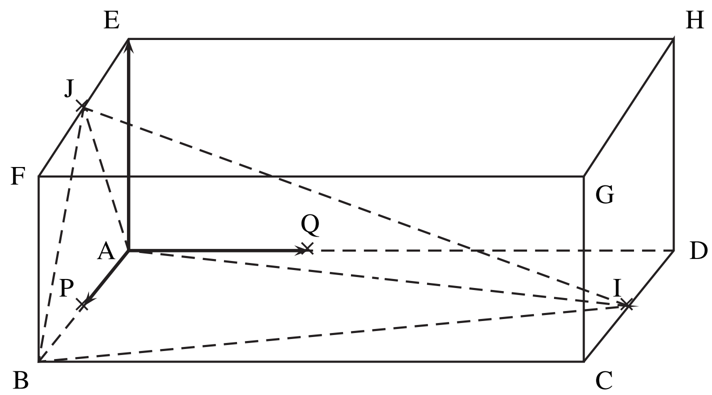
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\6\\-2\end{pmatrix};\ AB=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-2)^2}=\sqrt{76};\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix};\ AB=\sqrt{(-5)^2+6^2+(0)^2}=\sqrt{61};$$

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{(-6)\times(-5)+6\times6+(-2)\times0}{\sqrt{76}\times\sqrt{61}}=\frac{66}{\sqrt{4636}}\simeq0,97\Longrightarrow \text{mes}\widehat{BAC}\simeq14,2 \text{ au dixième de}$$

Exercice 27 énoncé Nouvelle Calédonie mars 2014

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Les points A, B et I appartiennent au plan (ABC) ; comme J est sur l'arête [EF] qui est strictement parallèle au plan (ABC), le point J n'appartient pas au plan (ABC).

Donc les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2. Le plan médiateur (P_1) du segment [AB] est le plan perpendiculaire à [AB] passant par le milieu P de [AB] ; c'est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ soient orthogonaux.

Dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}\right)$, A a pour coordonnées $(0;0;0)$ et B a pour coordonnées $(2;0;0)$, donc $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2;0;0)$.

Le point M a pour coordonnées $(x;y;z)$ et le point P a pour coordonnées $(1;0;0)$, donc $\overrightarrow{PM}$ a pour coordonnées $(x-1;y;z)$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PM} = 0 \iff (x-1)\times 2 + y\times 0 + z\times 0 = 0 \iff x-1=0$

Le plan (P_1) a pour équation $x-1=0$.

On peut aussi justifier que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (PIJ) et que les trois points P, I et J ont pour abscisse 1 ; donc une équation du plan (PIK) est $x=1$.

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y-z-4=0$.

D'après le texte, $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AQ}$; or le point Q a pour coordonnées $(0;1;0)$ donc le point D a pour coordonnées $(0;3;0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$; or $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2;0;0)$ donc $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2;3;0)$. Ce sont aussi les coordonnées du point C.

Le point I est le milieu de [CD] donc le point I a pour coordonnées $\left(\frac{0+2}{2};\frac{3+3}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ soit $(1;3;0)$.

On calcule de même les coordonnées du point J, milieu de [EF], et on trouve $(1;0;1)$

Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient au plan médiateur de [IJ] si et seulement si IM = JM autrement dit $IM^2 = JM^2$.

$IM^2 = (x-1)^2+(y-3)^2+z^2$; $JM^2 = (x-1)^2+y^2+(z-1)^2$

$IM^2 = JM^2 \iff (x-1)^2+(y-3)^2+z^2 = (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \iff y^2-6y+9+z^2 = y^2+z^2-2z+1 \iff -6y+2z+8=8 \iff 3y-z-4=0$

Le plan médiateur de [IJ] a pour équation $3y-z-4=0$ donc c'est le plan (P_2).

4. (a) Le plan (P_1) d'équation $x-1=0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1;0;0)$.

Le plan (P_2) d'équation $3y-z-4=0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $(0;3;-1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles.

Les plans (P_1) et (P_2) sont donc sécants.

(b) Pour déterminer la droite d'intersection des plans (P_1) et (P_2), on résout le système

$\left\{\begin{array}{r} x-1=0 \\ 3y-z-4=0 \end{array}\right.$ que l'on écrit $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=y \\ z=3y-4 \end{array}\right.$

Donc la droite (Δ) d'intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=t \\ z=3t-4 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

(c) Un point de (Δ) a pour coordonnées $(1\,;t\,;3t-4)$ où t est un réel.

On va donc chercher une valeur de t pour laquelle $\Omega\mathrm{A} = \Omega\mathrm{I}$, le point Ω étant un point de (Δ), autrement dit pour laquelle $\Omega\mathrm{A}^2 = \Omega\mathrm{I}^2$.

$\Omega\mathrm{A}^2 = (-1)^2 + (-t)^2 + (-3t+4)^2$; $\Omega\mathrm{I}^2 = (1-1)^2 + (3-t)^2 + (-3t+4)^2$

$\Omega\mathrm{A}^2 = \Omega\mathrm{I}^2 \iff (-1)^2 + (-t)^2 + (-3t+4)^2 = (1-1)^2 + (3-t)^2 + (-3t+4)^2 \iff 1+t^2 = 9-6t+t^2 \iff 6t = 8 \iff t = \dfrac{4}{3}$

Le point Ω de (Δ) tel que $\Omega\mathrm{A} = \Omega\mathrm{I}$, correspond au paramètre $t = \dfrac{4}{3}$ et a donc pour coordonnées $\left(1\,;\dfrac{4}{3}\,;3\times\dfrac{4}{3}-4\right)$ c'est-à-dire $\left(1\,;\dfrac{4}{3}\,;0\right)$.

(d) Le point Ω appartient à la droite (Δ) donc il appartient à la fois à (P_1) et à (P_2).

(P_1) est le plan médiateur de [AB] et $\Omega \in (\mathrm{P}_1)$ donc $\Omega\mathrm{A} = \Omega\mathrm{B}$.

(P_2) est le plan médiateur de [IJ] et $\Omega \in (\mathrm{P}_2)$ donc $\Omega\mathrm{I} = \Omega\mathrm{J}$.

De plus $\Omega\mathrm{A} = \Omega\mathrm{J}$; donc $\Omega\mathrm{A} = \Omega\mathrm{B} = \Omega\mathrm{I} = \Omega\mathrm{J}$:

le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

Exercice 28 énoncé **Métropole septembre 2015**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0\,;\,1\,;\,-1)$ et $B(-2\,;\,2\,;\,-1)$.
- la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. La droite (AB) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires doc tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2-0; 2-1; -1-(-1) = (-2;1;0)$.

$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-0; y-1; z-(-1) = (x; y-1; z+1)$.

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k \\ y-1 &=& k \\ z+1 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k \\ y &=& 1+k \\ z &=& -1 \end{array}\right.$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k \\ y &=& 1+k \\ z &=& -1 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{R}$

2. (a) La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\,(-2;1;0)$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(1;1;-1)$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

(b) Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel t et un réel k tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2+t &=& -2k \\ 1+t &=& 1+k \\ -1-t &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2 &=& -2k \\ 0 &=& k \\ t &=& 0 \end{array}\right.$$ Il n'y a donc pas de solution.

Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.

Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-z-3u=0$.

$x_M + y_M - z_M - 3u = -2+u+1+u-(-1-u)-3u = -2+u+1+u+1+u-3u = 0$ donc $M \in \mathcal{P}$

Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\,(1;1;-1)$, qui est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$; donc le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.

4. Pour déterminer si le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont sécants, on résout le système

$$\left\{\begin{array}{l} x=-2k \\ y=1+k \\ z=-1 \\ x+y-z-3u=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2k \\ y=1+k \\ z=-1 \\ -2k+1+k+1-3u=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2(2-3u) \\ y=1+2-3u \\ z=-1 \\ 2-3u=k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-4+6u \\ y=3-3u \\ z=-1 \\ 2-3u=k \end{array}\right.$$

Donc le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont sécants au point $N(-4+6u; 3-3u; -1)$.

5. (a) La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale en M au plan $\mathcal{P}$; donc la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à toute droite du plan $\mathcal{P}$ passant par M, donc elle est perpendiculaire à la droite (MN) contenue dans $\mathcal{P}$ puisque $N \in \mathcal{P}$.

(b) La droite (MN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$ de coordonnées

$(-4+6u-(-2+u); 3-3u-(1+u),; -1-(-1-u)) = (-2+5u; 2-4u; u)$.

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2;1;0)$.

Les droites (MN) et (AB) sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{AB}$ est nul.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = (-2+5u)\times(-2)+(2-4u)\times 1 + u\times 0 = 4-10u+2-4u = 6-14u$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff 6-14u=0 \iff \dfrac{3}{7} = u$

De plus, les droites (MN) et (AB) sont sécantes en M ; elles sont donc perpendiculaires si et seulement si $u = \dfrac{3}{7}$.

6. (a) $MN^2 = \|\overrightarrow{MN}\|^2 = (-2+5u)^2+(2-4u)^2+u^2 = 4-20u+25u^2+4-16u+16u^2+u^2 = 42u^2-36u+8$

(b) MN^2 est un trinôme du second degré en u de la forme au^2+bu+c, et le coefficient de u^2 est $a=42>0$; ce polynôme admet donc un minimum pour $u = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-36}{2\times 42} = \dfrac{3}{7}$.

La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal, c'est-à-dire pour $u = \dfrac{3}{7}$.

Exercice 29 énoncé **AmeriqueNordS2015-exo-1.tex**

1. On peut utiliser ici le théorème de Thalès pour prouver que $\overrightarrow{BU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BS}$ et ainsi construire le point. Pour cela considérons le triangle SOB.

Nous savons que (DU) est parallèle à (OB) car D et U partagent la même cote et O et B sont également de même cote. Nous savons également que $\dfrac{OD}{OS} = \dfrac{1}{3}$, là encore en raison de la cote de D et S. On en déduit, par application de l'antique théorème, que $\dfrac{BU}{BS} = \dfrac{OD}{OS} = \dfrac{1}{3}$.

2. Considérons les plans (AUE) et (BCS). Ces plans sont sécants en la droite (UV). Or, (BC), incluse dans (BCS), est parallèle à (AE), incluse dans (AEU) ; puisque $ABCE$ est un carré.
Par application du théorème du toit, on en déduit que (UV) est parallèle à (BC). Cette dernière propriété permet de construire le point V.

3. Il nous faut prouver d'une part que K appartient à (AE) et d'autre part que (KU) est perpendiculaire à (AE).

On lit les coordonnées de $A\,(1\,;0\,;0)$ et celles de $E\,(0\,;-1\,;0)$ et on calcule ainsi $\overrightarrow{A}E\,(-1\,;-1\,;0)$.
D'autre part on détermine $\overrightarrow{A}K\left(\frac{-1}{6}\,;\frac{-1}{6}\,;0\right)$.

On en déduit que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AE}$, ce qui prouve que K est un point de $[AE]$.

Déterminons les coordonnées de U. On a démontré dans la question 1 que $\overrightarrow{BU} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BS}$, ce qui donne un système portant sur les coordonnées de U :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_u - 0 & = & \frac{1}{3}(0-0) \\ y_u - 1 & = & \frac{1}{3}(0-1) \\ z_u & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_u & = & 0 \\ y_u & = & \frac{2}{3} \\ z_u & = & 1 \end{array}\right.$$

On peut maintenant déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{K}U\left(-\frac{5}{6}\,;\frac{5}{6}\,;1\right)$.

On obtient ainsi, sachant que le repère est orthonormé : $\overrightarrow{K}U\cdot\overrightarrow{A}E = \dfrac{-5}{6}\times(-1)+\dfrac{5}{6}\times(-1)+1\times 0 = 0$, ce qui permet de conclure. Le point K est bien le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

Remarque. *On pouvait également déterminer une équation paramétrique de* (BS) *afin de calculer les coordonnées de* U.
Une telle méthode revient à chercher le réel t *tel que* $\overrightarrow{BU} = t\overrightarrow{BS}$ *avec la cote de* U *égale à* 1.

Partie B

1. Il suffit de s'assurer que les points A, E et U vérifient bien l'équation proposée.

Pour le point A, on a bien $3\times1-3\times0+5\times0-3=0$.

De même pour le point E, il est clair que $3\times0-3\times(-1)+5\times0-3=0$.

Et enfin, pour le point U, on vérifie mentalement que $3\times0-3\times\dfrac{2}{3}+5\times1-3=0$.

Cette équation de plan convient donc.

2. Puisque l'on a muni l'espace d'un repère orthonormé, on déduit de l'équation cartésienne proposée les coordonnées d'un vecteur normal au plan (EAU). Notons $\overrightarrow{n}\,(3\,;-3\,;5)$ ce vecteur.

C'est un vecteur directeur de (d) puisque (d) est orthogonale au plan (EAU). À partir des coordonnées du point S et de celles de ce vecteur, on en déduit une équation paramétrique de (d) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & -3t \\ z & = & 3+5t \end{array}\right. \qquad t\in\mathbb{R}$$

3. Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de ce point satisfont simultanément une équation paramétrique de (d) ainsi qu'une équation cartésienne du plan (EAU). On cherche donc x, y, z et t tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & -3t \\ z & = & 3+5t \\ 0 & = & 3x-3y+5z-3 \end{array}\right.$$

À partir de l'équation cartésienne du plan, en substituant x, y et z on en déduit le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & -3t \\ z & = & 3+5t \\ 0 & = & 3(3t)-3(-3t)+5(3+5t)-3 \end{array}\right.$$

La dernière équation permet de déterminer $t = \dfrac{-12}{43}$ et, par suite, on peut déterminer les coordonnées de $H\left(\frac{-36}{43}\,;\frac{36}{43}\,;\frac{69}{43}\right)$.

4. Le plan (EAU) coupe le tétraèdre $SABCE$ en un prisme $ABUECV$ d'une part et un tétraèdre $SAUVE$ d'autre part. Il nous faut donc déterminer si ces deux solides ont le même volume ; ce qui revient à déterminer si le volume de l'un des deux solides correspond à la moitié de celui de $SABCE$.

Or toutes les questions précédentes nous ont permis de rassembler des éléments permettant de calculer le volume du tétraèdre SAUVE. Nous connaissons en effet l'aire de sa base $\mathcal{A}_{\text{AUVE}} = \frac{5\sqrt{43}}{18}$. Reste à calculer sa hauteur SH. On a ainsi :

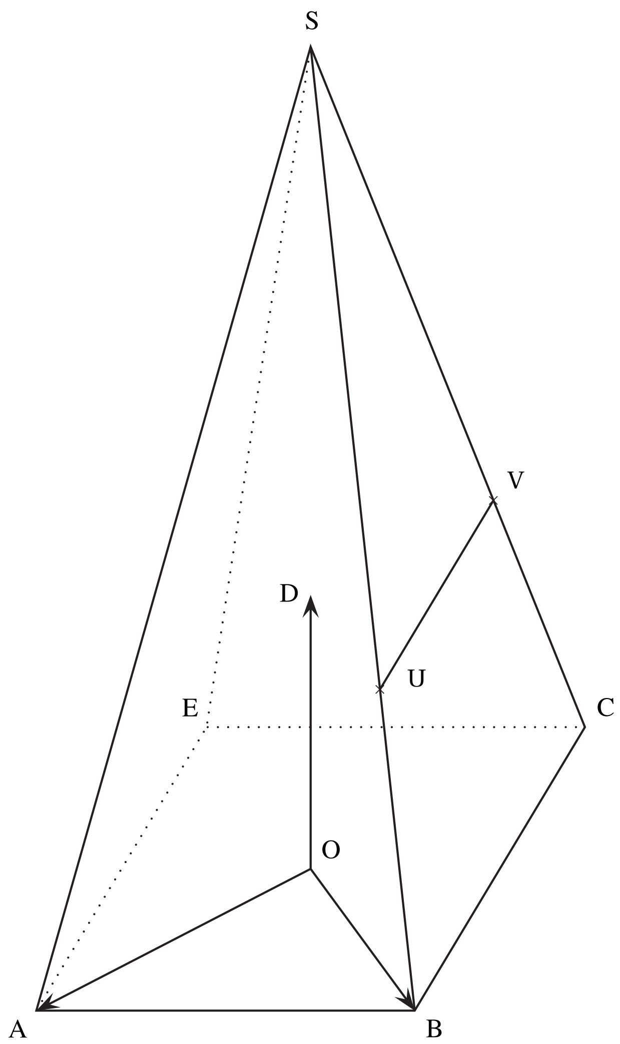
$$\begin{aligned} \text{SH} &= \sqrt{\left(\frac{-36}{43}-0\right)^2+\left(\frac{36}{43}-0\right)^2+\left(3-\frac{69}{43}\right)^2} \\ &= \frac{12}{\sqrt{43}} \end{aligned}$$

Le volume du tétraèdre SAUVE est donc $\mathcal{V}_{\text{SAUVE}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{AUVE}} \times \text{SH}$, ce qui donne après calcul : $\mathcal{V}_{\text{SAUVE}} = \frac{10}{9}$.

Pour finir, déterminons le volume de la grande pyramide SABCE. On peut, par application du théorème de Pythagore au triangle ABO rectangle en O prouver que $\text{AB} = \sqrt{2}$. Sa base a donc pour aire $\text{AB}^2 = 2$. D'autre part, sa hauteur est $\text{SO} = 3$. Le volume de la grosse pyramide est donc $\mathcal{V}_{\text{SABCE}} = \frac{1}{3}\text{AB}^2 \times \text{SO} = 2$.

On constate que $\frac{1}{2}\mathcal{V}_{\text{SABCE}} \neq \mathcal{V}_{\text{SAUVE}}$, ce qui permet de conclure.

Annexe



Exercice 30 énoncé **Asie 2015**

Commun à tous les candidats

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x+y+z-5=0$ et $7x-2y+z-2=0$.

1. Affirmation 1 : les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

Le plan $\mathcal{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$: $(1;1;1)$ et le plan $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$: $(7;-2;1)$.

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=7-2+1=6\neq 0$ donc ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux et donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires.

Affirmation 1 : FAUSSE

2. Affirmation 2 : les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 2t+1\\ z &=& -3t+4\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

On a vu dans la question précédente que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ avaient respectivement pour vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$: $(1;1;1)$ et $\overrightarrow{n_2}$: $(7;-2;1)$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont donc sécants.

Soit d la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 2t+1\\ z &=& -3t+4\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$.

Pour voir si cette droite est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, il suffit de déterminer deux points de cette droite et de vérifier s'ils appartiennent aux deux plans.

- En remplaçant t par 0 dans la représentation paramétrique de la droite d, on obtient le point $A(0;1;4)$. Or $x_A+y_A+z_A-5=0+1+4-5=0$ donc $A\in\mathcal{P}_1$, et $7x_A-2y_A+z_A-2=0-2+4-2=0$ donc $A\in\mathcal{P}_2$. On peut dire que $A\in\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.
- En remplaçant t par 1 dans la représentation paramétrique de la droite d, on obtient le point $B(1;3;1)$. Or $x_B+y_B+z_B-5=1+3+1-5=0$ donc $B\in\mathcal{P}_1$, et $7x_B-2y_B+z_B-2=7-6+1-2=0$ donc $B\in\mathcal{P}_2$. On peut dire que $B\in\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.

L'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est la droite (AB) de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 2t+1\\ z &=& -3t+4\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : VRAIE

3. Affirmation 3 : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle $[0,658;0,771]$.

Le joueur gagne avec une fréquence de $f=\dfrac{223}{312}\approx 0,7147$.

L'échantillon est de taille $n=312>30$; $n\times f=223>5$ et $n\times(1-f)=89>5$.

Donc on peut déterminer l'intervalle de confiance au seuil 95 % :

$$\mathrm{I}=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\frac{223}{312}-\frac{1}{\sqrt{312}};\frac{223}{312}+\frac{1}{\sqrt{312}}\right]\approx[0,658;0,771].$$

Affirmation 3 : VRAIE

Remarque du correcteur -- En fait, les deux bornes de l'intervalle ont pour valeurs approchées à 10^{-4} les nombres 0,658 1 et 0,771 4 ; la règle veut que l'on arrondisse par défaut la borne inférieure, et par excès la borne supérieure, pour que l'intervalle obtenu contienne l'intervalle donné par la formule ; l'intervalle obtenu serait alors $[0,658;0,772]$ ce qui rendrait l'affirmation fausse.

Mais était-ce vraiment l'intention du concepteur du sujet de « jouer » sur la troisième décimale ? Il faudrait, pour en être sûr, avoir les consignes de correction.

4. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a<b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

TRAITEMENT	Lire a et b
	Tant que $b-a>0,3$
	    x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	    Si $f(x)f(a)>0$, alors a prend la valeur x
	    sinon b prend la valeur x
	    Fin Si
	Fin Tant que
	Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Affirmation 4 : si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.

On fait tourner l'algorithme avec les valeurs de a, de b et l'expression de f données dans le texte, et on va décrire ce qui se passe à chaque étape en affichant l'état des variables a, b et x :

	a	b	x
a reçoit la valeur 1	1		
b reçoit la valeur 2	1	2	
$b - a = 1 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1	2	
x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2} = 1,5$	1	2	1,5
$f(a) = 1^2 - 3 = -2$	1	2	1,5
$f(x) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1	2	1,5
$f(x) \times f(a) > 0$ donc a prend la valeur $x = 1,5$	1,5	2	1,5
fin du tant que	1,5	2	1,5
$b - a = 0,5 > 0,3$ donc on entre dans la boucle	1,5	2	1,5
x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2} = 1,75$	1,5	2	1,75
$f(a) = 1,5^2 - 3 = -0,75$	1,5	2	1,75
$f(x) = 1,75^2 - 3 = 0,0625$	1,5	2	1,75
$f(x) \times f(a) < 0$ donc b prend la valeur $x = 1,75$	1,5	1,75	1,75
fin du tant que	1,5	1,75	1,75
$b - a = 0,25 \leqslant 0,3$ donc on n'entre pas dans la boucle	1,5	1,75	1,75
On affiche $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1,5+1,75}{2} = 1,625$	1,5	1,75	1,75

Affirmation 4 : FAUSSE

Il s'agit de l'algorithme de recherche par dichotomie de la solution positive de l'équation $x^2 - 3 = 0$.

Exercice 31 énoncé Liban 2015

1. (a) De $I\left(\frac{1}{2}~;~0~;~0\right)$, $J\left(0~;~\frac{1}{2}~;~1\right)$ et $K\left(1~;~\frac{1}{2}~;~0\right)$, on déduit :

$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}~;~1\right)$ et $\overrightarrow{JK}\,(1~;~0~;~-1)$.

D'autre part $\overrightarrow{FD}\,(-1~;~1~;~-1)$ et :

$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$ et $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{JK} = -1+1=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est normal à ce plan.

(b) D'après la question précédente : $M(x~;~y~;~z) \in (IJK) \iff -x+y-z+d=0$.

En particulier $I \in (IJK) \iff -\frac{1}{2}+d=0 \iff d=\frac{1}{2}$.

Donc $M(x~;~y~;~z) \in (IJK) \iff -x+y-z+\frac{1}{2}=0 \iff x-y+z-\frac{1}{2}=0$.

2. On a $M(x~;~y~;~z) \in (FD) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{FM} = t\overrightarrow{FD} \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 & = & -t\\ y-0 & = & t\\ z-1 & = & -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t\\ y & = & t\\ z & = & 1-t\end{array}\right.$.

3. $M(x~;~y~;~z)$ appartient à (FK) et à (IJK) si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite et celle du plan soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t\\ y & = & t\\ z & = & 1-t\\ x-y+z-\frac{1}{2} & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow 1-t-t+1-t-\frac{1}{2}=0 \iff -3t+\frac{3}{2}=0 \iff t=\frac{1}{2}.$$

D'où les coordonnées de $M\left(\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}\right)$.

4. $IJ^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=\frac{6}{4}$; de même $IK^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{2}{4}$ et $JK^2=1^2+0^2+1^2=2$.

Or $\frac{6}{4}+\frac{2}{4}=2 \iff IJ^2+IK^2=JK^2$ égalité qui montre d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle IJK est rectangle en I.

L'aire du triangle (IJK) est donc égale à :

$\mathcal{A}(IJK) = \dfrac{1}{2}\times IJ\times IK = \dfrac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\mathcal{V}(FIJK) = \dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}(IJK)\times FM$.

$FM^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \Rightarrow FM=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\mathcal{V}(FIJK) = \dfrac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$.

6. Vérifions si $L\left(1~;~1~;~\frac{1}{2}\right)$ appartient au plan IJK :

$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ est vraie, donc les quatre loints I, J, K et L sont coplanaires.

Vérifions si (IJ) est parallèle à (KL) :

$\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}~;~1\right)$ et $\overrightarrow{KL}\left(0~;~\frac{1}{2}~;~\frac{1}{2}\right)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites coplanaires (IJ) et (KL) sont sécantes.

Exercice 32 énoncé Métropole 2015

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A\,(0\,;\,-1\,;\,5)$, $B\,(2\,;\,-1\,;\,5)$, $C\,(11\,;\,0\,;\,1)$, $D\,(11\,;\,4\,;\,4)$.

1. (a) Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=2\overrightarrow{OI}$.

La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

(b) On a $x_C=x_D=11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ d'équation $\boxed{x=11}$.

(c) (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ donc (AB) est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Le point d'intersection E a des coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ qui vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

On doit avoir : $\begin{cases}x=11\\x=t\\y=-1\\z=5\end{cases}$ donc $\boxed{E(11\,;\,-1\,;\,5)}$.

(d) Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=5\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et une représentation paramétrique de (CD) est $\begin{cases}x&=&11\\y&=&0,8t'\\z&=&1+0,6t'\end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$. On résout le système $\begin{cases}t&=&11\\-1&=&0,8t'\\5z&=&1+0,6t'\end{cases}$ qui n'a pas de solutions, car on trouve t' négatif, donc $1+0,6t'<5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. (a) $\overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix}11-t\\0,8t+1\\0,6t-4\end{pmatrix}$ donc $M_tN_t^2=(11-t)^2+(0,8t+1)^2+(0,6t-4)^2$

$=121-22t+t^2+0,64t^2+1,6t+1+0,36t^2-4,8t+16=$

$\boxed{M_tN_t^2=2t^2-25,2t+138}$.

(b) M_tN_t est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

On considère la fonction $f : t\mapsto 2t^2-25,2t+138$; f est une fonction du second degré ; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t=\dfrac{25,2}{4}=6,3$.

La distance est **minimale** pour $\boxed{t=6,3\text{ s}}$

Exercice 33 énoncé Polynésie 2015

1. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AI} \iff B(6\,;\,0\,;\,0)$;

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AJ} \iff D(0\,;\,4\,;\,0)$;

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \iff \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AK} \iff E(0\,;\,0\,;\,2)$.

Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AK}$, donc G(6 ; 4 ; 2). On en déduit que $\overrightarrow{IJ}(-1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{JG}(6\,;\,3\,;\,2)$.

Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = -2+2+0 = 0$ et

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{JG} = 12+6-18 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc normal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (IJG) est normal à ce plan.

2. On sait qu'alors une équation du plan (IJG) est :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \iff 2x+2y-9z+d = 0$.

En particulier : $I(1\,;\,0\,;\,0) \in (IJG) \iff 2+0-0+d = 0 \iff d = -2$.

Une équation du plan (IJG) est : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \iff 2x+2y-9z-2 = 0$.

3. On a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, donc F(6 ; 0 ; 2).

Or $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (BF) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BF} \iff$

$$\begin{cases} x-6 &= t(6-6) \\ y-0 &= t(0-0) \\ z-0 &= t(2-0) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 6 \\ y &= 0 \\ z &= 2t \end{cases}$$

Donc si $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (IJG) \cap (BF)$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 6 \\ y &= 0 \\ z &= 2t \\ 2x+2y-9z-2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow 2\times 6+0-9\times 2t-2 = 0 \iff 10-18t = 0 \iff 10 = 18t \iff$$

$t = \frac{5}{9}$.

En remplaçant t par $\frac{5}{9}$ dans l'équation de la droite (BF), on obtient :

$L\left(6\,;\,0\,;\,\frac{10}{9}\right)$.

4. La section avec (ABCD) est la droite (IJ).

La section avec (ABFE) est la droite (IL).

La section avec (BCGF) est la droite (LG).

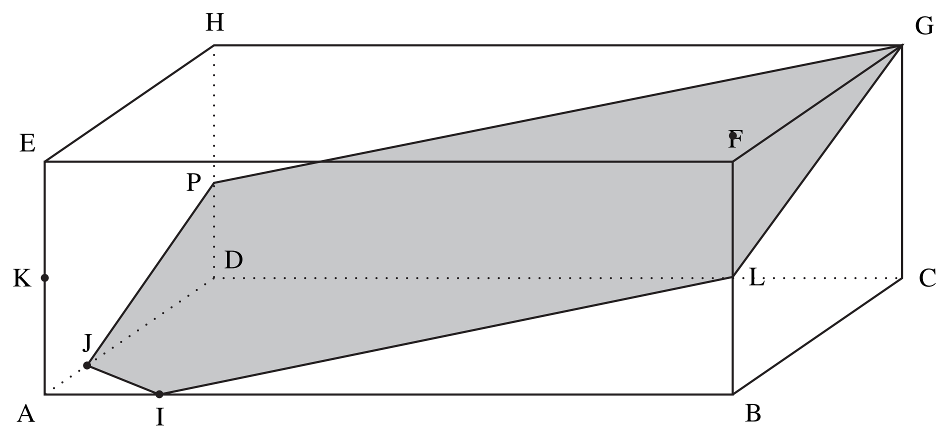
Il reste à trouver l'intersection P du plan (IJG) avec la droite (HD) : comme les plans (ABFE) et (DCGH) sont parallèles, les droites (IL) et (GP) sont parallèles.

On trace donc la parallèle à (IL) contenant G qui coupe (HD) en P.

La section est donc le pentagone JILGP (voir à la fin).

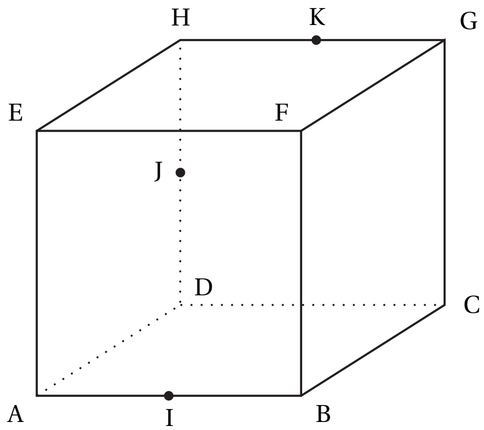
Annexe

À rendre avec la copie



EXERCICE 34 énoncé **Polynésie septembre 2015**

ABCDEFGH est un cube.
I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].
On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



On détermine les coordonnées tous les points de la figure dans le repère donné :

A(0 ; 0 ; 0) B(1 ; 0 ; 0) D(0 ; 1 ; 0) E(0 ; 0 ; 1)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Longrightarrow C(1;1;0)$ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow F(1;0;1)$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow H(0;1;1)$ $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Longrightarrow G(1;1;1)$

I est le milieu de [AB] donc $\left\{\begin{array}{lcl} x_I &=& \dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I &=& \dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_I &=& \dfrac{z_A+z_B}{2}\end{array}\right.$ et donc $I\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$

On trouve de même : $J\left(0;1;\dfrac{1}{2}\right)$ et $K\left(\dfrac{1}{2};1;1\right)$

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ sont $\left\{\begin{array}{lcl} x_E - x_C &=& -1\\ y_E - y_C &=& -1\\ z_E - z_C &=& 1\end{array}\right.$; celles de $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left\{\begin{array}{lcl} x_J - x_I &=& -\dfrac{1}{2}\\ y_J - y_I &=& 1\\ z_J - z_I &=& \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

et celles de $\overrightarrow{IK}$ sont $\left\{\begin{array}{lcl} x_K - x_I &=& 0\\ y_K - y_I &=& 1\\ z_K - z_I &=& 1\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IJ} = (-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right) + (-1)\times 1 + 1\times\dfrac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK} = 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{IK}$

Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ du plan (IJK), donc il est normal au plan (IJK).

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ sont $\left\{\begin{array}{lcl} x_D - x_B &=& -1\\ y_D - y_B &=& 1\\ z_D - z_B &=& 0\end{array}\right.$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD} = (-1)(-1) + (-1)\times 1 + 1\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{BD}$

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est un vecteur normal au plan (IJK) donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

On pourrait préciser la réponse en démontrant que la droite (BD) *n'est pas contenue dans le plan* (IJK) *mais ce n'est pas explicitement demandé dans le texte.*

Si le point B *appartient au plan* (IJK), *on peut dire que le point* A, *appartenant à la droite* (BI), *appartient aussi à ce plan donc les plans* (ABD) *et* (IJK) *sont confondus, ce qui est faux.*

3. Soit M un point de la droite (CE) donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CE}$ (où $k \in \mathbb{R}$), ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{lcl} x_M - x_C &=& k\times(-1)\\ y_M - y_C &=& k\times(-1)\\ z_M - z_C &=& k\times 1\end{array}\right. \Longleftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{lcl} x_M &=& 1-k\\ y_M &=& 1-k\\ z_M &=& k\end{array}\right.$

Le plan (BDM) et le plan (IJK) sont parallèles, s'ils ont les mêmes vecteurs normaux ; autrement dit pour que le plan (BDM) soit parallèle au plan (IJK) il faut et il suffit que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est normal au plan (IJK) soit également normal au plan (BDM).

Comme ce vecteur est déjà orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BD}$, il suffit qu'il soit orthogonal à un deuxième vecteur directeur du plan (BDM) non colinéaire à $\overrightarrow{BD}$, soit $\overrightarrow{BM}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\left\{\begin{array}{lcl} x_M - x_B &=& 1-k-1 = -k\\ y_M - y_B &=& 1-k-0 = 1-k\\ z_M - z_B &=& k-0 = k\end{array}\right.$

$\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CE} \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CE} = 0 \Longleftrightarrow (-k)\times(-1) + (1-k)\times(-1) + k\times 1 = 0 \Longleftrightarrow k-1+k+k=0$
$\Longleftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$

Donc M a pour coordonnées $\left(1-\dfrac{1}{3};1-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

Exercice 35 énoncé **Pondichéry 2015**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $P\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.

1. Voir la figure à la fin.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$. $\overrightarrow{MN}\left(-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{MP}\,(0\,;\,-1\,;\,-2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. (a) $-1\times 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)+\left(\frac{1}{4}\right)\times(-2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

(b) L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.

4.

5. (a) Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :

$5x-8y+4z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$;

$N\in(MNP)\iff -8\times\frac{1}{2}+4\times 1=d=\iff 0=d$

Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x-8y+4z=0$.

(b) On traduit la relation vectorielle : $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta\iff\overrightarrow{FM}=t\vec{n},\,t\in\mathbb{R}$ soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-1 & = & 5t\\ y-0 & = & -8t\\ z-1 & = & 4t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+5t\\ y & = & -8t\\ z & = & 1+4t\end{array}\right.$$

6. (a) Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 5x-8y+4z & = & 0\\ x & = & 1+5t\\ y & = & -8t\\ z & = & 1+4t\end{array}\right.\Rightarrow 5(1+5t)-8\times(-8t)+4(1+4t)=0\iff 105t+9=0\iff t=-\frac{9}{105}\iff t=-\frac{3}{35}.$$

D'où $x=1+5\times\left(-\frac{3}{35}\right)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$;

$y=-8\times\left(-\frac{3}{35}\right)=\frac{24}{35}$;

$z=1+4\times\left(-\frac{3}{35}\right)=1-\frac{12}{35}=\frac{23}{35}$.

Donc $F\left(\frac{4}{7}\,;\,\frac{24}{35}\,;\,\frac{23}{35}\right)$.

(b) Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc

$V_{MNPF}=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}(MNP\times FK)$.

Or MNP est rectangle en M, donc $\mathcal{A}(MNP=\frac{MN\times MP}{2}$.

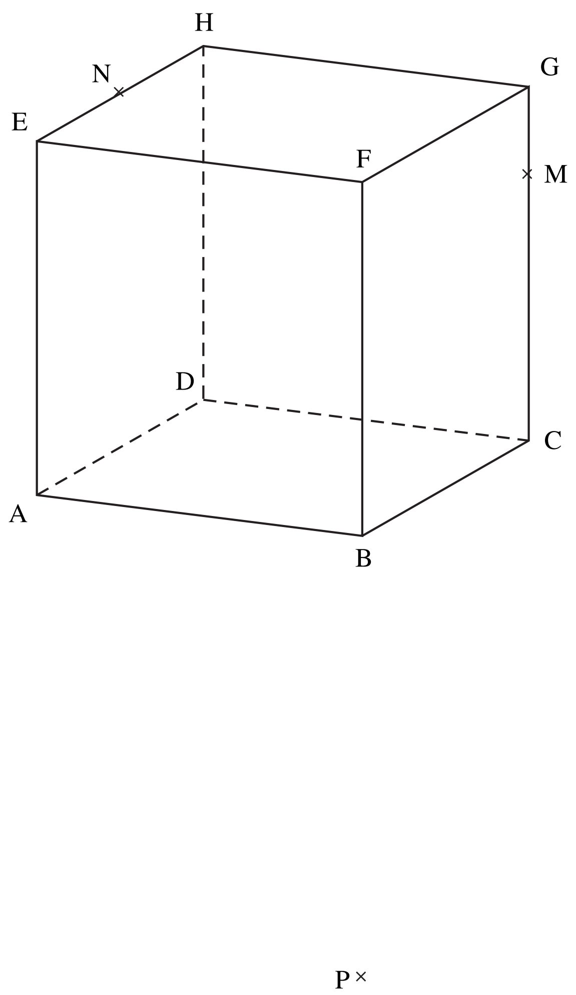
$MN^2=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{21}{16}\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{21}}{4}$;

$MP^2=1+4=5\Rightarrow MP=\sqrt{5}$;

Donc $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{4}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{27}{35}}=\frac{1}{24}\times\sqrt{\frac{21\times 27}{35}}\times\sqrt{5}=$

$\frac{1}{24}\times\sqrt{\frac{81}{5}}\times\sqrt{5}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

ANNEXE à remettre avec la copie



Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
l prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2$
m prend la valeur $g^2 + h^2 + i^2$
Si $k = 0$ et si $l = m$
    Afficher : « Le triangle MNP est rectangle isocèle en M »
Sinon Afficher : « Le triangle MNP n'est pas rectangle ou n'est pas isocèle en M »

EXERCICE 36 énoncé **Amerique du Nord 2016**

1. On sait que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et de même longueur, on en déduit que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux et de même norme 1.

(SO) est la hauteur de la pyramide, elle est donc perpendiculaire à la bas $ABCD$, on en déduit que $\overrightarrow{OS}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OB}$ et à $\overrightarrow{OC}$

de plus on sait que SOC est rectangle en O avec $OC = OB = 1$ et $SC = \sqrt{2}$ donc $SO = 1$

Finalement $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé

2. (a) Dans $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ on a $S(0\,;\,0\,;\,1)$, $D(-1\,;\,0\,;\,0)$

donc $\overrightarrow{SD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On en déduit $K\left(-\frac{1}{3}\,;\,0\,;\,\frac{2}{3}\right)$

(b) $I\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $B(1\,;\,0\,;\,0)$

donc $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

On peut donc conclure que B, I et K sont alignés

(c) (BCI) coupe (ABC) suivant la droite (BC)

(SAD) coupe (ABC) suivant la droite (AD)

or $(AD)//(BC)$ donc d'après le théorème du toit, (BCI) et (SAD) se coupent suivant une parallèle à (AD) et comme on sait déjà que K appartient à cette intersection, on en déduit que la parallèle à (AD) passant par K appartient à (BCI) et coupe $[SA]$

On a bien $(AD)//(KL)$

(d) $(KL)//(AD)$ donc K et L ont la même cote

$L \in (SOC)$ donc son abscisse est nulle

$L\left(0\,;\,y_L\,;\,\frac{2}{3}\right)$

Dans SAD, on a $K \in [SD]$, $L \in [SA]$ et $(KL)//(AD)$ donc d'après le théorème de Thalès on a $\frac{SL}{SA} = \frac{SK}{SD} \iff SL = SK$ car $SA = SD$

$SK^2 = \frac{2}{9}$ voir 2.a. or $SL^2 = y_L^2 + \frac{1}{9} \implies y_L^2 = \frac{1}{9}$ or $y_L < 0$

Finalement $L\left(0\,;\,-\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$

3. (a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI} = 0$

Donc $\vec{n}$ est normal au plan (BCI) car il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

(b) $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

on remarque que $\vec{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$ donc $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires

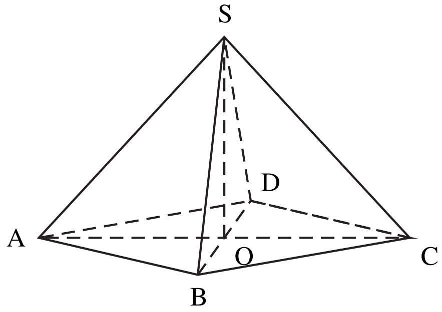
(c) $\vec{n}$ est normal au plan (BCI) et $\vec{n}$ est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires du plan (SAD)

On en déduit que $(BCI) \perp (SAD)$

Exercice 37 énoncé **AmeriqueSudS2016-exo-4.tex**

Partie A : Un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm.
On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



1. On sait que O est le centre du carré ABCD donc $OA = OC$.

On sait que la pyramide SABCD est équilatère à base carrée donc $SA = SC$.

On se place dans le triangle SAC.

$SA = SC$ donc le triangle SAC est isocèle.

$OA = OC$ donc O est le milieu de [AC] et donc (SO) est la médiane issue de S du triangle SAC.

Comme le triangle SAC est isocèle de sommet principal S, la médiane issue de S est aussi une médiatrice ; on en déduit que (SO) est perpendiculaire à (AC).

En se plaçant dans le triangle (SBD), on démontre de même que (SO) est perpendiculaire à (BD).

La droite (SO) est perpendiculaire à deux droites sécantes (AC) et (BD) du plan (ABC) donc la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. Le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

- La base de la pyramide est le carré ABCD dont les diagonales mesurent 24 cm.

  Dans le triangle ABC isocèle rectangle en B on a, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ce qui équivaut à $2AB^2 = 24^2$ ou $AB^2 = 288$.

  L'aire du carré ABCD est $AB^2 = 288 \text{ cm}^2$.

- D'après le texte, $SO = OA$ donc $SO = \dfrac{24}{2} = 12$.

Le volume de la pyramide est donc $V = \dfrac{288 \times 12}{3} = 1152 \text{ cm}^3$.

Partie B : Dans un repère

On considère le repère orthonormé $\left(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}\right)$.
On peut donc dire que les points O, A, B et S ont pour coordonnées respectives $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.
Comme O est le milieu de [AC] et de [BD], on peut dire que les points C et D ont pour coordonnées respectives $(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ -1\ ;\ 0)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].

Donc P et Q ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

(a) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ -3)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{PC}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\ ;\ 0\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

  $\vec{n}.\overrightarrow{PC} = 1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 + (-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{PC}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{QC}$ a pour coordonnées $\left(-1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

  $\vec{n}.\overrightarrow{QC} = 1 \times (-1) + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{QC}$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$ non colinéaires, donc il est normal au plan (QPC).

(b) Le plan (QPC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{CM}$ soient orthogonaux.

Si M a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, le vecteur $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $(x+1\ ;\ y\ ;\ z)$.

$\overrightarrow{CM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{CM}.\vec{n} = 0 \iff 1 \times (x+1) + 1 \times y - 3 \times z = 0 \iff x + y - 3z + 1 = 0$

Le plan (PQC) a pour équation $x + y - 3z + 1 = 0$.

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

(a) La droite (SH) est orthogonale au plan (PQC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est normal au plan (PQC).

La droite (SH) contient le point S de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

La droite (SH) a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = k \\ y = k \\ z = 1-3k \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{R}$

(b) H $\in$ (SH) $\cap$ (PQC) donc les coordonnées de H sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & k \\ y & = & k \\ z & = & 1-3k \\ x+y-3z+1 & = & 0 \end{array}\right.$

On a donc $k+k-3(1-3k)+1=0 \iff 11k=2 \iff k=\dfrac{2}{11}$.

$1-3k=1-3\times\dfrac{2}{11}=1-\dfrac{6}{11}=\dfrac{5}{11}$

Les coordonnées de H sont donc $\left(\dfrac{2}{11}\ ;\ \dfrac{2}{11}\ ;\ \dfrac{5}{11}\right)$.

(c) $\text{SH}^2=\left(\dfrac{2}{11}-0\right)^2+\left(\dfrac{2}{11}-0\right)^2+\left(\dfrac{5}{11}-1\right)^2=\dfrac{4}{11^2}+\dfrac{4}{11^2}+\dfrac{36}{11^2}=\dfrac{44}{11^2}$ donc $\text{SH}=\dfrac{\sqrt{44}}{11}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

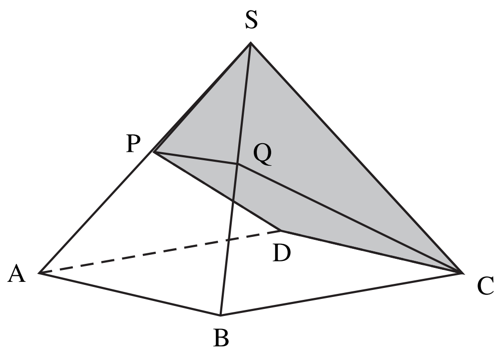
3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$

La pyramide SPQCD a pour base le quadrilatère PQCD et pour hauteur SH ; son volume est donc

$$\text{V}'=\dfrac{\text{SH}\times\text{aire(PQCD}}{3}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{11}}{11}\times\dfrac{3\sqrt{11}}{8}}{3}=\dfrac{\dfrac{6}{8}}{3}=\dfrac{1}{4}\ \text{unité de volume.}$$

Partie C : Partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.

Dans le repère de la partie B, la longueur OA est égale à une unité de longueur et à 12 cm. Donc l'unité de longueur vaut 12 cm et l'unité de volume vaut $12^3=1728\ \text{cm}^3$.
Le volume de la pyramide SABCD est égal à 1 152 cm ^{3}.
Le volume de la pyramide SPQCD est égal à 0,25 unité de volume, soit $0,25\times1728=432\ \text{cm}^3$.
Or $\dfrac{1\,152}{2}=576\neq432$ donc le partage proposé par Fanny n'est pas équitable.

EXERCICE 38 énoncé Antilles 2016

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) On a $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0+1\times(-1)+1\times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BE} = 1\times(-1)+1\times 0+1\times 1 = 0.$$

On en déduit que

$$(DF)\perp(BG) \quad \text{et} \quad (DF)\perp(BE).$$

La droite (DF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BGE), elle est donc orthogonale à ce plan, et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est donc un vecteur normal au plan (BGE).

(b) Les plans $\mathcal{P}$ et (BGE) sont parallèles, le vecteur $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc également un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Ce dernier a donc une équation cartésienne du type :

$$x+y+z+d=0$$

où d est un réel à déterminer. Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$, donc

$$\frac{1}{2}+1+0+d=0 \iff d=-\frac{3}{2}.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $\boxed{x+y+z-\frac{3}{2}=0}$.

2. Les plans $\mathcal{P}$ et (BGE) sont parallèles. Leurs intersections respectives avec le plan (ABE) sont donc deux droites parallèles. L'une de ces droites est (IN), l'autre est (BE). Ainsi dans le triangle ABE les droites (IN) et (BE) sont parallèles et I est le milieu de $[AB]$, donc d'après le théorème « de la droite des milieux » le point N est le milieu de $[AE]$.

3. (a) La droite (HB) passe par le point $H(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\left\{\begin{array}{lll} x &=& t \\ y &=& t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}) \ .$$

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (HG) est le plan $\mathcal{P}$ sont donc sécants en un unique point T. Comme $T\in(HG)$, il existe un réel t tel que $T(t\ ;\ t\ ;\ 1-t)$. Alors :

$$T\in\mathcal{P} \iff t+t+1-t-\frac{3}{2}=0 \iff t=\frac{1}{2},$$

les coordonnées de T sont donc $T\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

4. Le tétraèdre $FBGE$

- a pour base le triangle FBG qui est rectangle isocèle en F et a pour aire $\mathcal{B}=\frac{1}{2}\times FE\times FB=\frac{1}{2}$;
- pour hauteur $h=FE=1$.

Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $FBGE$ est donc

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}.$$

EXERCICE 39 énoncé **Antilles septembre 2016**

Commun à tous les candidats

1. Le point H a pour coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{BH}) \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}\, \overrightarrow{\mathrm{BM}} = t\overrightarrow{\mathrm{BH}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-0 & = & t(1-0) \\ y-0 & = & t(1-0) \\ z-0 & = & t(1-0) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right.$$

2. On a D(1 ; 1 ; 0), E(1 ; 0 ; 1) et G(0 ; 1 ; 1).

D'où $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\,(0\ ;\ -1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{DG}}\,(-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et à $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$, soit à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG). Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ est donc normal au plan (DEG) : la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. D'après la question précédente une équation du plan (DEG) est :

$\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{DEG}) \iff 1x+1y+1z+d=0$.

On a par exemple $\mathrm{D} \in (\mathrm{DEG}) \iff 1+1+0+d=0 \iff d=-2$.

Donc $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\mathrm{DEG}) \iff x+y+z-2=0$.

4. les coordonnées de P vérifient l'équation paramétrique de la droite (Bh) et l'équation du plan (DEG) soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \\ x+y+z-2 & = & 0 \end{array}\right. \implies 3t-2=0 \iff t=\frac{2}{3}.$$

On a donc $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

5. On a :

$\mathrm{PD}^2 = \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + 0$;

$\mathrm{PE}^2 = \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + 0 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2$;

$\mathrm{PG}^2 = 0 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2$.

On a donc de façon évidente $\mathrm{PD}^2 = \mathrm{PE}^2 = \mathrm{PG}^2$ soit $\mathrm{PD} = \mathrm{PE} = \mathrm{PG}$.

Le point P est donc équidistant des trois sommets du triangle (DEG), c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle (DEG), mais comme celui-ci est équilatéral car ses trois côtés sont des diagonales de carrés de côté 1, le point P est orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre de gravité du triangle équilatéral (DEG).

EXERCICE 40 énoncé **Asie 2016**

1. *Propriété des catadioptres*

Un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a;b;c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC).

Après réflexion sur le plan (OAB), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(a;b;-c)$.

Après réflexion sur le plan (OBC), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(-a;b;-c)$.

Après réflexion sur le plan (OAC), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(-a;-b;-c)$ donc qui est égal à $-\vec{v}$; le rayon final est donc parallèle au rayon initial.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan* (OBC)

(a) La droite d_2 passe par le point $\mathrm{I}_1\,(2\,;\,3\,;\,0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}\,(-2;-1;1)$, donc d_2 a pour représentation paramétrique

$$d_2: \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 3-\ t \\ z = \quad\ t \end{cases} \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

(b) Le plan (OBC) a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ de coordonnées $(1\,;\,0\,;\,0)$.

Le plan (OBC) a pour équation $x=0$.

(c) Soit I_2 le point de coordonnées $(0;2;1)$.

- $x_{\mathrm{I}_2}=0$ donc le point I_2 appartient au plan (OBC) d'équation $x=0$.
- On regarde si la droite d_2 contient le point I_2 autrement dit s'il existe une valeur du paramètre t telle que $\begin{cases} 0 = 2-2t \\ 2 = 3-\ t \\ 1 = \quad\ t \end{cases}$
  C'est vrai pour $t=1$ donc $\mathrm{I}_2\in d_2$.
- Le point I_1 appartient à la droite d_2 mais n'appartient pas au plan (OBC) car son abscisse est non nulle ; la droite d_2 n'est donc pas contenue dans le plan (OBC).

On a donc démontré que le plan (OBC) et la droite d_2 étaient sécants en I_2.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC)

La droite d_3 passe par le point $\mathrm{I}_2\,(0\,;\,2\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$d_3: \begin{cases} x = \quad 2t \\ y = 2-\ t \\ z = 1+\ t \end{cases} \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

La plan (OAC) a pour équation $y=0$.

Pour déterminer le point d'intersection de la droite d_3 et du plan (OAC), on résout le système :

$$\begin{cases} x = \quad 2t \\ y = 2-\ t \\ z = 1+\ t \\ y = \quad 0 \end{cases}$$

$y=0$ et $y=2-t$ entraîne $t=2$ donc $x=4$ et $z=3$.

Le point I_3 d'intersection de d_3 et du plan (OAC) a pour coordonnées $(4\,;\,0\,;\,3)$.

4. *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $\vec{u}\,(1;-2;0)$, et on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

(a)• Le plan $\mathcal{P}$ est défini par les droites d_1 et d_2 donc il a pour vecteurs directeurs les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ qui ne sont pas colinéaires.

- $\vec{u}.\overrightarrow{v_1}=-2+2+0=0$ donc $\vec{u}\perp\overrightarrow{v_1}$
- $\vec{u}.\overrightarrow{v_2}=-2+2+0=0$ donc $\vec{u}\perp\overrightarrow{v_2}$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

(b) Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites d_1 et d_2 ; les trois droites d_1, d_2 et d_3 seront dans un même plan si et seulement si elles sont dans le plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si la droite d_3 est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ a le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal et il contient le point I_1 qui appartient à d_1 ; donc :

$\mathcal{P}=\left\{\mathrm{M}\ /\ \overrightarrow{\mathrm{I_1M}}\perp\vec{u}\right\}$

Si on appelle $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées de M, les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{I_1M}}$ sont $(x-2\ ;\ y-3;\ z)$.

$\overrightarrow{\mathrm{I_1M}} \perp \overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{\mathrm{I_1M}}.\overrightarrow{u} = 0 \iff (x-2)(1)+(y-3)(-2)+z(0)=0 \iff x-2y+4=0$

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x-2y+4=0$.

La droite d_3 a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t \\ y &=& 2-\ t \\ z &=& 1+\ t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

En prenant $t=1$, on prouve que le point H $(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ appartient à d_3.

Mais $x_{\mathrm{H}}-2y_{\mathrm{H}}+4=4\neq 0$ donc H $\notin \mathcal{P}$.

La droite d_3 n'est pas contenue dans $\mathcal{P}$ donc les trois droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan.

(c) Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites d_1 et d_2 ; les trois droites d_1, d_2 et d_4 seront dans un même plan si et seulement si elles sont dans le plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si la droite d_4 est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

La droite d_4 représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC) ; le point d'intersection du rayon avec le plan (OAC) est le point $\mathrm{I}_3\,(4\ ;\ 0\ ;\ 3)$ donc $\mathrm{I}_3 \in d_4$.

$x_{\mathrm{I_3}}-2y_{\mathrm{I_3}}+4=8\neq 0$ donc $\mathrm{I}_3 \notin \mathcal{P}$

La droite d_4 n'est pas contenue dans le plan $\mathcal{P}$, donc les trois droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.

Exercice 41 énoncé **Liban 2016**

Commun à tous les candidats

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre J. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. (a) Montrons que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que les deux pyramides ABCDE et ABCDF sont identiques, et que toutes les arêtes ont la même longueur 1. Ce sont donc des pyramides régulières à base carrée et E comme F ont pour projeté orthogonal sur ABCD le point I, centre du carré ABCD.

I est le centre du carré ABCD de côté 1, c'est donc le milieu de [AC] et on a :

$AC = \sqrt{2}$ et $AI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme I est le projeté orthogonal de E sur ABCD, le triangle AEI est rectangle en I et on a :

$IE^2 = AE^2 - AI^2 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. Et finalement $\boxed{IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

I est le milieu de [BD] et $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, d'où : $\boxed{I\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)}$.

On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$, d'où : $\boxed{E\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Par raison de symétrie par rapport à ABCD : $\boxed{F\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

(b) Montrons que le vecteur $\vec{n}\left(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2}\right)$ est normal au plan (ABE).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires et on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n} = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABE donc $\vec{n}\,(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2})$ est normal au plan (ABE).

(c) Déterminons une équation cartésienne du plan (ABE).

(ABE) passe par le point $A\,(0;0;0)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}\,(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2})$.

On en déduit une équation cartésienne de (ABE) : $\boxed{-2y + \sqrt{2}z = 0}$.

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

(a) Démontrons que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

Dans le plan (FDC) considérons les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF}$ qui ne sont pas colinéaires.

Comme ABCD est un carré on : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et on a : $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

D'autre part sachant que $D(0\,;\,1\,;\,0)$, on a : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. On a : $\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{FD}\cdot\vec{n} = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FDC) : $\vec{n}\left(0\,;\,-2\,;\,\sqrt{2}\right)$ est normal au plan (FDC)

Les plans (FDC) et (ABE) admettent un même vecteur normal donc ils sont parallèles.

(b) Déterminons l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

Comme M appartient à [EM] et que M est le milieu de [FD], M appartient à l'intersection de (EMN) et (FDC).

Comme (FDC) et (ABE) sont parallèles, le plan (EMN) les coupe suivant deux droites parallèles.

Or l'intersection de (EMN) et (ABE) est la droite (EN).

On en déduit que l'intersection de (EMN) avec (FDC) est la droite parallèle à (EN) passant par M.

(c) Construisons (voir annexe) la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

Soit G l'intersection de la parallèle à (EN) passant par M avec le plan (BCF) : c'est l'intersection de (EM) avec (CD).

Le segment [GM] est la section de la face FCD par le plan (EMN).

Par raison de symétrie, les plan (CDE) et (ABF) sont parallèles.

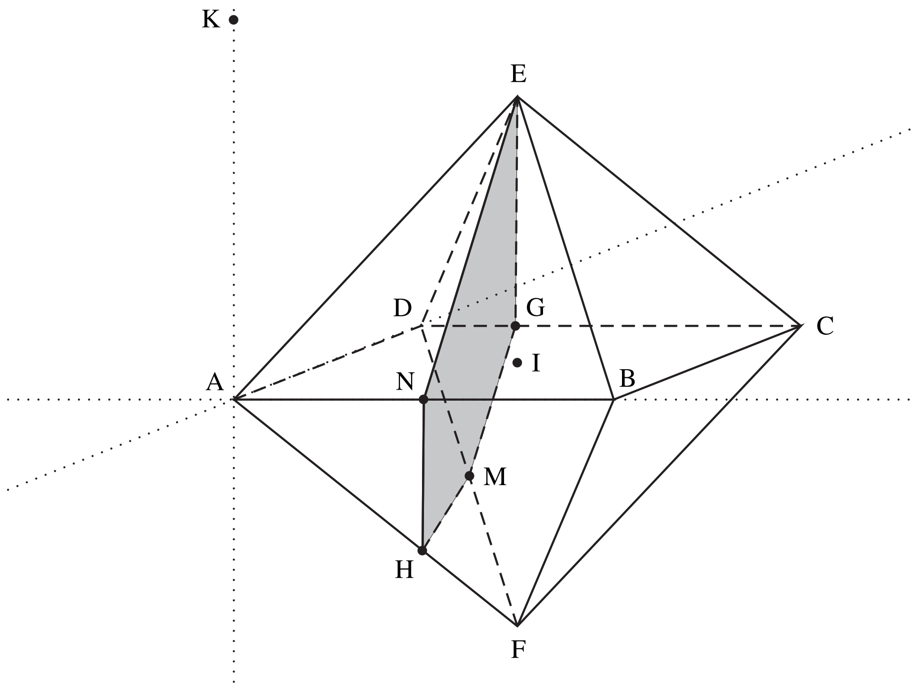
En tenant le même raisonnement que précédemment, on montre que le plan (EMN) les coupe suivant deux droites parallèles.

Or l'intersection de (EMN) avec le plan (CDE) est la droite (EG). Alors le plan(EMN) coupe le plan(ABF) suivant la parallèle à (ERG) passant par N.

Cette droite coupe (AF) en H.

Le segment [NH] est la section de la face ABF par le plan (EMN).

On en déduit que le polygone ENHMG est la section du solide par le plan (EMN).



Exercice 42 énoncé **Métropole 2016**

Commun à tous les candidats

Affirmation 1

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Puisque $\frac{-2}{2} \neq \frac{-2}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés :

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$:

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : on en déduit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) :

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3

Première méthode :

- Montrons tout d'abord que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants :

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux. Calculons $\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EF} = 0 \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2$$

Puisque $\vec{n}.\overrightarrow{EF} \neq 0$, alors

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants

- Puisque le milieu I du segment [BC] appartient manifestement au plan (ABC), il suffit de vérifier si I appartient à la droite (EF) :

Le milieu I du segment [BC] a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2} ; \frac{z_B + z_C}{2}\right) = (1, 0, 1)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$, les points E, I et F sont alignés :

$$I \in (EF)$$

On a prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le milieu du segment [BC] :

L'affirmation 3 est vraie.

Seconde méthode :

- Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EF) :

La droite (EF) passe par $E(-1 ; -2 ; 3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de la droite (EF) est alors

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC), noté $\mathcal{P}$: Puisque $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$, ce dernier a une équation de la forme

$$y - z + d = 0 \text{ où } d \in \mathbb{R}$$

Puisque $A(1,2,3)$ est un point de $\mathcal{P}$, alors $y_A - z_A + d = 0$, soit $d = -y_A + z_A = 1$

Une équation du plan $\mathcal{P}$ est $y - z + 1 = 0$

- Déterminons $(EF) \cap \mathcal{P}$:

Soit M un point de la droite (EF). IL existe alors un nombre réel t tel que

$$\begin{cases} x_M = -1-t \\ y_M = -2-t \\ z_M = 3+t \end{cases}$$

M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $y_M - z_M + 1 = 0$, i.e :

$$-2-t-(3+t)+1=0$$

soit

$$t=-2$$

La droite (EF) et le plan $\mathcal{P}$ sont donc sécants en un point I de coordonnées $(-1-(-2), -2-(-2), 3+(-2)) = (1,0,1)$

Reste à vérifier que I est le milieu de [BC] :

Le milieu du segment [BC] a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}, \frac{z_B+z_C}{2}\right) = (1,0,1)$$

On en déduit que I est le milieu de [BC]

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4

Première méthode :

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. N'ayant pas leurs coordonnées proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires :

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

- Les droites (AB) et (CD) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires, selon que le point D appartient ou non au plan (ABC) :

  - Une première manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

    D appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

    Puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -1+4 = 3 \neq 0$, alors D n'appartient pas au plan (ABC).

  - Une seconde manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

    Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, D appartient au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ s'écrit en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, autrement dit si et seulement si il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

    L'égalité ci-dessus est équivalente au système :

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ -1 = -2\alpha - 2\beta \\ -4 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$$

    Les deux dernières équations étant incompatibles, D n'est pas un point du plan (ABC). Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas coplanaires :

L'affirmation 4 est fausse.

Seconde méthode :

- Déterminons des représentations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

La droite (AB) passe par A(1 ; 2 ; 3) et est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = 3-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

La droite (CD) passe par C(-1 ; 0 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite (D) est donc :

$$\begin{cases} x = -1+3t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

• Déterminons $(AB) \cap (CD)$: Résolvons pour cela le système $\begin{cases} 1+2t = -1+3t' \\ 2-2t = t' \\ 3-2t = t' \end{cases}$ (1) :

(1) $\iff \begin{cases} 2t-3t' = -2 \\ 2t+t' = 2 \\ 2t+t' = 3 \end{cases}$ Le système n'ayant pas de solution, on en déduit que les droites ne sont pas sécantes :

L'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 43 énoncé **Nouvelle Calédonie 2017**

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).
On considère les points $A(-1\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $B(6\ ;\ -5\ ;\ 1)$, $C(1\ ;\ 2\ ;\ -2)$ et $S(13\ ;\ 37\ ;\ 54)$.

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$; $7\times\dfrac{2}{7}=2$ et $-4\times\dfrac{2}{7}\neq 3$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs.

(b) Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\,.\overrightarrow{AB}=5\times 7+16\times(-4)+29\times 1=35-64+29=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$.

$\vec{n}\,.\overrightarrow{AC}=5\times 2+16\times 3+29\times(-2)=10+48-58=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$.

Donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

(c) Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Si M a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x+1\ ;\ y+1\ ;\ z)$.

$\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\iff\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n}=0\iff 5(x+1)+16(y+1)+29z=0\iff 5x+16y+29z+21=0$

Le plan (ABC) a pour équation $5x+16y+29z+21=0$.

2. (a) $AB^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=7^2+(-4)^2+1^2=49+16+1=66$

$AC^2=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=2^2+3^2+(-2)^2=4+9+4=17$

$BC^2=(1-6)^2+(2+5)^2+(-2-1)^2=25+49+9=83$

$66+17=83$ ce qui équivaut à $AB^2+AC^2=BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

(b) Le triangle ABC est rectangle en A donc son aire vaut $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{\sqrt{66}\times\sqrt{17}}{2}=\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. (a) Les points A, B, C et S sont coplanaires si et seulement si le point S appartient au plan (ABC).

Le plan (ABC) a pour équation $5x+16y+29z+21=0$.

$5x_S+16y_S+29z_S+21=5\times 13+16\times 37+29\times 54+21=1705\neq 0$ donc $S\notin(ABC)$.

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

(b) La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par S coupe le plan (ABC) en un point noté H.

La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{SH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$ donc le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(5k\ ;\ 16k\ ;\ 29k)$ où k est un réel. Si le point H a pour coordonnées $(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H)$, le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(x_H-13\ ;\ y_H-37\ ;\ z_H-54)$.

On en déduit : $\left\{\begin{array}{rcl}x_H&=&13+5k\\y_H&=&37+16k\\z_H&=&54+29k\end{array}\right.$

On exprime que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$\begin{aligned}5x_H+16y_H+29z_H+21=0&\iff 5(13+5k)+16(37+16k)+29(54+29k)+21=0\\&\iff 65+25k+592+256k+1566+841k+21=0\\&\iff 2244+1122k=0\iff k=-2\end{aligned}$$

Donc le point H a pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{rcl}x_H&=&13+5(-2)&=&3\\y_H&=&37+16(-2)&=&5\\z_H&=&54+29(-2)&=&-4\end{array}\right.$

4. Le volume du tétraèdre SABC est $\dfrac{\text{aire(ABC)}\times SH}{3}$.

Le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(5k\ ;\ 16k\ ;\ 29k)$ donc $(5(-2)\ ;\ 16(-2)\ ;\ 29(-2))=(-10\ ;\ -32\ ;\ -58)$. Donc $SH^2=(-10)^2+(-32)^2+(-58)^2=4488$ et donc $SH=\sqrt{4488}=2\sqrt{1122}$.

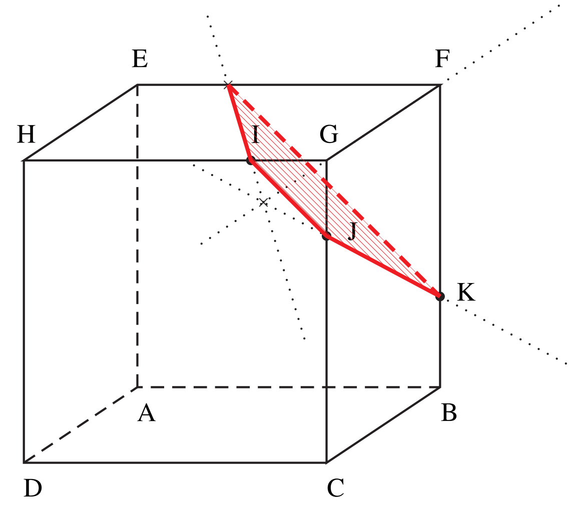
$\text{aire(ABC)}=\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$ donc le volume du tétraèdre est $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1122}}{2}\times 2\sqrt{1122}}{3}=\dfrac{1122}{3}=374$ unités de volume.

Exercice 44 énoncé **Nouvelle Calédonie novembre 2016**

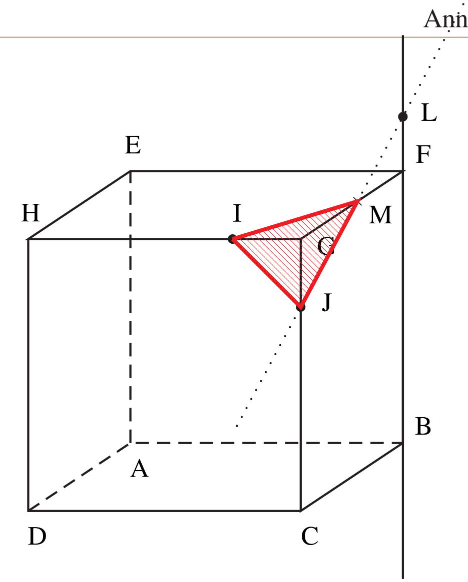
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.

1. On trace la section du cube par le plan (IJK) :



2. On trace la section du cube par le plan (IJL) :



3. On cherche s'il existe un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral.

On regarde la configuration de la question précédente et on se demande s'il n'y a pas une position du point L sur la droite (BF) telle que les points B, F et L soient dans cet ordre, pour laquelle le triangle IJM serait équilatéral.

Soit K le point de [GF] tel que $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.

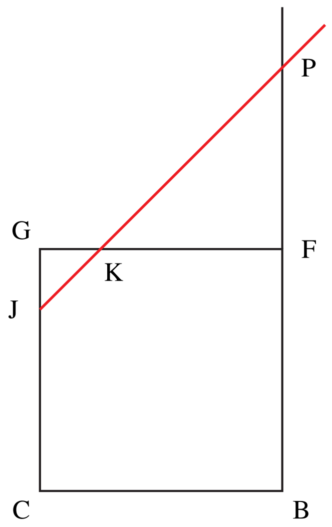
Les trois triangles GIJ, GJK et GIK sont superposables donc $IJ = JK = KJ$; le triangle IJK est donc équilatéral.

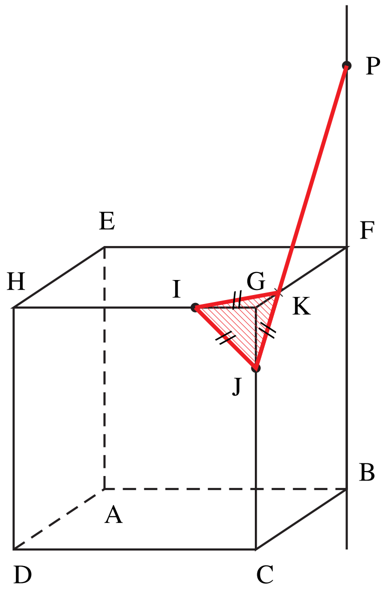
Soit P le point d'intersection des droites (JK) et (BF).

D'après le théorème de Thalès dans les triangles KGJ et KFP, on a $\frac{FP}{GJ} = \frac{KF}{KG}$.

Par construction du point K, on a $\frac{KF}{KG} = 3$ et on sait que, si on appelle a la longueur d'une arête du cube, $GJ = \frac{a}{4}$; on en déduit que $FP = \frac{3a}{4}$.

Le point P tel que le triangle IJK est équilatéral, est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{FP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$.


P
G
F
K
J
C
B

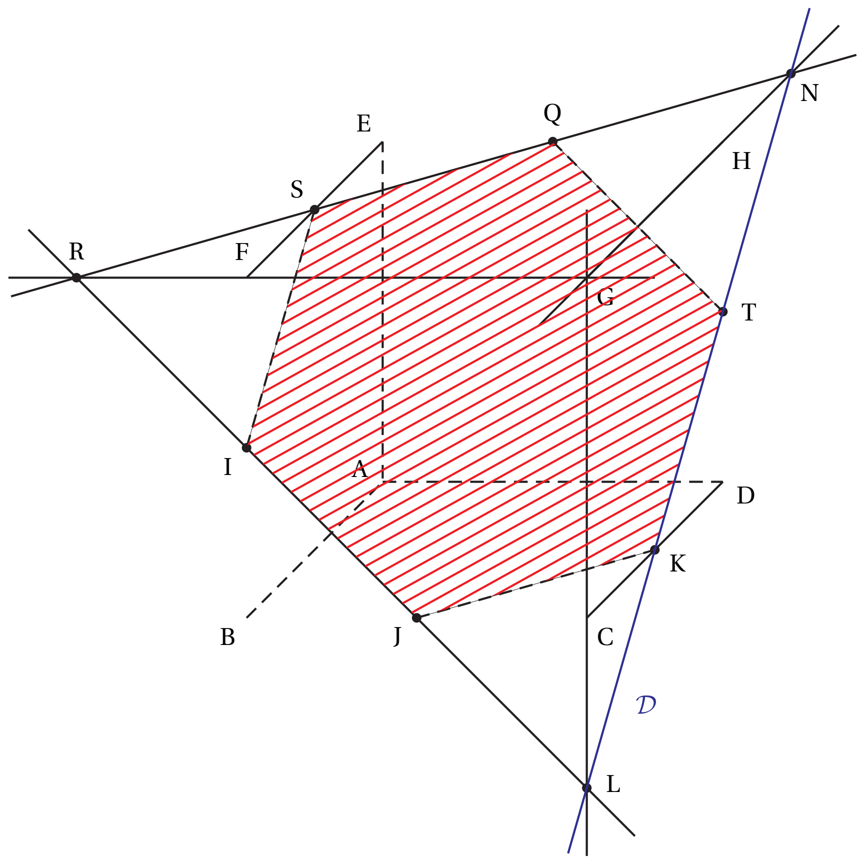

P
E
F
H
I
G
K
J
B
A
D
C

Exercice 45 énoncé **Pondichéry 2016**

Partie A

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

On construit :
- le point L ;
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des sommets du cube sont :

A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), C(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), G(1 ; 1 ; 1).

Le point I est le milieu de [BF] donc I a pour coordonnées $\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.

Le point J est le milieu de [BC] donc J a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

Le point K est le milieu de [CD] donc K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;1\,;0\right)$.

2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a les mêmes coordonnées que le point G c'est-à-dire $(1\,;1\,;1)$.

- $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(1-1\,;\frac{1}{2}-0\,;0-\frac{1}{2}\right)=\left(0\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$.

  $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IJ}=1\times 0+1\times\frac{1}{2}+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{IJ}$

- $\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}-1\,;1-\frac{1}{2}\,;0-0\right)=\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

  $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{JK}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\frac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{JK}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ ne sont pas colinéaires ; le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc il est normal au plan (IJK).

(b) Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) ; le plan (IJK) est l'ensemble des points $P(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{IP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AG}$:

Le vecteur $\overrightarrow{IP}$ a pour coordonnées $\left(x-1\,;y-0\,;z-\frac{1}{2}\right)=\left(x-1\,;y\,;z-\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{IP}=0 \iff 1\times(x-1)+1\times y+1\times\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \iff x+y+z-\frac{3}{2}=0$

Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\frac{3}{2}=0$.

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AG}$; donc le point M a pour coordonnées $(t\,;t\,;t)$.

(a) $\text{IM}^2=(t-1)^2+(t-0)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=t^2-2t+1+t^2+t^2-t+\frac{1}{4}=3t^2-3t+\frac{5}{4}$

(b) Le trinôme ax^2+bx+c avec $a>0$ est minimal pour $x=-\dfrac{b}{2a}$, donc $3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$ est minimal pour $t=-\dfrac{-3}{2\times 3}$ donc pour $t=\dfrac{1}{2}$.

MI^2 donc MI est minimal pour $t=\dfrac{1}{2}$; cela correspond au point M_m de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

4. (a) Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$ et le point M_m a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

$x_{\text{M}_m}+y_{\text{M}_m}+z_{\text{M}_m}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}=0$ donc $\text{M}_m\in(\text{IJK})$

(b) Les points I et M_m appartiennent au plan (IJK) et le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (IJK) ; on en déduit que les droites (IJ) et (AG) sont orthogonales.

Mais le point M_m est le milieu de [AG] donc il appartient à (AG).

On peut donc en déduire que les droites (IM_m) et (AG) sont perpendiculaires en M_m.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{IM}_m}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}-1\,;\dfrac{1}{2}-0\,;\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$

$\overrightarrow{\text{BF}}=\overrightarrow{\text{AE}}$ donc le vecteur $\overrightarrow{\text{BF}}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;1)$.

$\overrightarrow{\text{BF}}\cdot\overrightarrow{\text{IM}_m}=0\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\times\dfrac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{\text{BF}}\perp\overrightarrow{\text{IM}_m}$ donc la droite (IM_m) est orthogonale à la droite (BF).

Mais le point I appartient aux deux droites (IM_m) et (BF) donc on peut dire que les droites (IL) et (BF) sont perpendiculaires en I.